Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2012, № 13(1).— С. 163–180.

Біфуркація автоколивань у двовимірній системі з повільно змінними параметрами

І. О. Парасюк,

Київський національний університет імені Т. Шевченка

Б. В. Репета,

Київський національний університет імені Т. Шевченка

Анотація. За допомогою методу нормальних форм досліджено динамічний аналог біфуркації Андронова–Гопфа, яка супроводжує втрату стійкості положення рівноваги двовимірної системи з повільно змінними параметрами

Ключові слова: метод нормальних форм, біфуркація Андронова-Гопфа, двовимірна система диференціальних рівнянь з повільно змінними параметрами.

Bifurcation of auto-oscillations in system with slowly varying parameters

I. O. Parasiuk,

Taras Shevchenko National University of Kyiv

B. V. Repeta,

Taras Shevchenko National University of Kyiv

Abstract. By means of normal form method, we study a dynamical analogue of Andronov-Hopf bifurcation which accompanies the stability loss of equilibrium for system with slowly varying parameters

Key words: normal form method, bifurcation, system with slowly varying parameters.

AMS Subject Classifications (2010): 65Q10

1. Вступ

При моделюванні різноманітних процесів і явищ досить часто доводиться зустрічатися з ситуацією, коли ті чи інші параметри досліджуваного об'єкта повільно еволюціонують у часі. З огляду на цю обставину предметом постійної уваги фахівців з теорії диференціальних рівнянь є системи вигляду

$$\dot{x} = f(t, \tau, x, y), \quad \dot{y} = \varepsilon g(t, \tau, x, y), \tag{1}$$

де ε — малий дійсний параметр, t — незалежна змінна (реальний час), $\tau = \varepsilon t$ — так званий повільний час, $x \in \mathbb{R}^n$ та $y \in \mathbb{R}^m$ шукані вектор-функції, $\dot{x} := \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $\dot{y} := \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, а $f : D \mapsto \mathbb{R}^n$ та $g : D \mapsto \mathbb{R}^m$ — задані вектор функції певного класу гладкості з областю визначення $D \subseteq \mathbb{R}^{2+n+m}$. Якщо за незалежну змінну взяти повільний час, дістанемо сингулярно збурену систему

$$\varepsilon x' = f(\tau/\varepsilon, \tau, x, y), \quad y' = g(\tau/\varepsilon, \tau, x, y), \tag{2}$$

де $x' := \mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau$, $y' := \mathrm{d}y/\mathrm{d}\tau$.

Різним аспектам теорії систем вигляду (1) та (2) присвячено велику кількість робіт, зокрема, [**1**]–[**10**]. Вагомий внесок у розвиток асимптотичних методів аналізу систем з повільно змінними параметрами та сингулярно збурених систем було зроблено представниками наукової школи, очолюваної М.І. Шкілем [**2, 3, 4, 9**].

Останніми роками активно розвивається якісна теорія систем (1) та (2). У цьому зв'язку відзначимо праці, присвячені дослідженню динамічних біфуркацій в таких системах [**11, 12**].

Мета даної роботи полягає в аналізі явища динамічної біфуркації, яке спостерігається в двовимірній системі з повільно змінними параметрами внаслідок втрати стійкості тривіального розв'язку. Досліджувана система має вигляд

$$\dot{x} = F(\tau, x, \varepsilon), \tag{3}$$

де $x \in \mathbb{R}^2$, а $F(\cdot,\cdot,\cdot) : \mathbb{R} \times B^2_\delta(0) \times (-\varepsilon_*, \varepsilon_*) \mapsto \mathbb{R}^2$ — гладка вектор-функція така, що $F(\tau, 0, \varepsilon) = 0$ (тут $B^2_\delta(0)$ — круг в $\mathbb{R}^2$ радіусом δ з центром в початку координат). Припускається, що матриця лінеаризованої системи

$$A(\tau, \varepsilon) = F'_x(\tau, 0, \varepsilon)$$

обмежена на $\mathbb{R}\times(-\varepsilon_*, \varepsilon_*)$ разом зі своїми похідними і має такі властивості: власні числа матриці $A_0(\tau) := A(\tau, 0)$ — суто уявні і відокремлені від нуля на $\mathbb{R}$; дійсна частина комплексно спряжених власних чисел матриці $A_0(\tau) + \varepsilon A_1(\tau)$, де $A_1(\tau) := A'_\varepsilon(\tau, 0)$, від'ємна на $(-\infty, 0)$ і додатна на $(0, +\infty)$. Іншими словами, лінеаризована система в першому наближенні втрачає стійкість, коли повільний час τ минає нульове значення. Якщо б, починаючи з деякого моменту $T = O(1/\varepsilon)$, коефіцієнти системи було заморожено, тобто було покладено $\tau \equiv T$ при $\tau \geq T$, то до одержаної у такий спосіб автономної системи можна було б застосувати стандартну теорію біфуркації Андронова-Гопфа і встановити умови як м'якого народження автоколивань амплітудою $O(\sqrt{\varepsilon})$ (м'якої біфуркації граничного циклу з положення рівноваги), так і жорсткого збудження. Природно сподіватися, що схожі явища можна спостерігати і без замороження коефіцієнтів системи, однак в цьому випадку за термінологією [**11, 12**] матимемо справу з динамічною біфуркацією. Для дослідження такого типу біфуркації ми застосуємо метод нормальних форм [**13**]. Цей метод, запропонований А. Пуанкаре для вивчення локальної поведінки автономних систем, згодом було пристосовано і для аналізу систем, явно залежних від часу [**14, 15, 16**]. Оскільки на даний час метод неавтономної нормалізації ще не здобув широкої популярності, наступний розділ буде присвячено викладу відповідної процедури для n-вимірної нелінійної системи з повільним часом. Близький варіант процедури нормалізації систем з повільно змінними параметрами запропоновано в [**17**].

2. Метод неавтономної нормалізації системи з повільно змінними параметрами

Застосуємо метод нормальних форм до системи, яка має вигляд

$$\dot{x} = A(\tau,\varepsilon)x + \sum_{k\geq 2} F_k(\tau,\varepsilon)x^k, \tag{4}$$

де

$$A(\tau,\varepsilon) = \sum_{l\geq 0} A_l(\tau)\varepsilon^l, \quad F_k(\tau,\varepsilon) = \sum_{l\geq 0} F_{k,l}(\tau)\varepsilon^l$$

— збіжні або формальні ряди, коефіцієнтів яких задовольняють такі умови:

H1: всі відображення

$$A_l(\cdot) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R} \mapsto \mathrm{gl}(n;\mathbb{R}))\,, F_{k,l}(\cdot) \in \mathrm{C}^\infty\big(\mathbb{R} \mapsto \mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^n)\big)\,,$$

обмежені на $\mathbb{R}$ разом зі своїми похідними довільного порядку (тут $\mathrm{gl}(n;\mathbb{R})$ — алгебра квадратних $n \times n$ матриць, $\mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^n)$ — простір $\mathbb{R}^n$-значних однорідних поліномних форм степеня k);

H2: власні числа $\lambda_1(\tau),\ldots,\lambda_n(\tau)$ матриці $A_0(\tau)$ справджують нерівності

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} |\lambda_i(\tau) - \lambda_j(\tau)| > 0 \quad \forall i,j:\ 1 \leq i < j \leq n.$$

При виконанні цих припущень матриця $A_0(\tau)$ має нормований власний базис $\boldsymbol{a}_1(\tau),\ \ldots, \boldsymbol{a}_n(\tau)$, елементи якого, як і $\lambda_1(\tau),\ldots,\lambda_n(\tau)$, є гладкими функціями на $\mathbb{R}$ (див., наприклад, [**2**, с.32]). Функції $\lambda_j(\tau)$ є також і обмеженими на $\mathbb{R}$. Справді, в обмеженості кожної функції $\lambda_k(\tau)$ можна легко переконатися міркуванням від супротивного: якщо б знайшлася послідовність $\{\tau_j\}$ така, що $\lim_{j\to\infty} |\lambda_k(\tau_j)| = \infty$, то, поділивши обидві частини рівності

$$\det\left(\lambda_k(\tau_j)E - A_0(\tau_j)\right) = 0.$$

на $\lambda_k(\tau_j)$ і перейшовши до границі при $j \to \infty$, ми б дійшли протиріччя у вигляді хибної рівності $1 = 0$.

Тепер наша мета полягатиме в тому, щоб заміною змінних вигляду

$$x = \sum_{k\geq 1} H_k(\tau,\varepsilon) y^k, \tag{5}$$

де

$$H_k(\tau,\varepsilon) = \sum_{l\geq 0} H_{k,l}(\tau)\varepsilon^l, \quad H_{1,0}(\tau) := E,$$

привести початкову систему до, в певному сенсі, простішого вигляду

$$\dot{y} = \bar{A}(\tau,\varepsilon) y + \sum_{k\geq 2} G_k(\tau,\varepsilon) y^k, \tag{6}$$

де

$$\bar{A}(\tau,\varepsilon) = \sum_{l\geq 0} \bar{A}_l(\tau)\varepsilon^l, \quad \bar{A}_0(\tau) \equiv A_0(\tau), \quad G_k(\tau,\varepsilon) = \sum_{l\geq 0} G_{k,l}(\tau)\varepsilon^l.$$

При цьому $H_{k,l}(\cdot), G_{k,l}(\cdot) \in \mathrm{C}^\infty\big(\mathbb{R} \mapsto \mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^n)\big)$.

Набір власних чисел $\lambda_1(\tau),\dots,\lambda_n(\tau)$ і набір $\boldsymbol{a}_1(\tau),\dots,\boldsymbol{a}_n(\tau)$ векторів-стовпців власного базису матриці $A_0(\tau)$ надалі вважатимемо впорядкованим за таким принципом: $\lambda_1(\tau),\dots,\lambda_{2r}(\tau)$ — це всі комплексні власні числа і при цьому $\lambda_j(\tau) = \bar{\lambda}_{j+r}(\tau)$, $j = 1,\dots,r$ (зауважимо, що з огляду на умову **H2** r не залежить від τ).

Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що матрицю $A_0(\tau)$ вже зведено до дійсної канонічної форми. Справді, якщо це не так, то кожній парі комплексно спряжених стовпців $\boldsymbol{a}_j(\tau)$, $\boldsymbol{a}_{j+r}(\tau) = \bar{\boldsymbol{a}}_j(\tau)$ поставимо у відповідність пару дійсних векторів $\boldsymbol{t}_{2j-1}(\tau) := \operatorname{Re}\boldsymbol{a}_j(\tau)$, $\boldsymbol{t}_{2j}(\tau) := \operatorname{Im}\boldsymbol{a}_j(\tau)$, і покладемо $\boldsymbol{t}_j(\tau) = \boldsymbol{a}_j(t)$, $j = 2r+1,\dots,n$. Утворена у такий спосіб матриця $T(\tau) = [\boldsymbol{t}_1(\tau),\dots,\boldsymbol{t}_n(\tau)]$ здійснює зведення матриці $A_0(\tau)$ до дійсної канонічної форми. Якщо тепер в системі (4) зробити лінійну заміну змінних $x = T(\tau)\xi$, то дістанемо систему такого ж типу, що й (4), а саме,

$$\dot{\xi} = \left[T^{-1}(\tau)A(\tau,\varepsilon)T(\tau) - \varepsilon T^{-1}(\tau)T'(\tau)\right]\xi + \sum_{k\geq 2} T^{-1}(\tau)F_k(\tau,\varepsilon)\left[T(\tau)\xi\right]^k,$$

однак замість $A_0(\tau)$ у ній фігуруватиме матриця $T^{-1}(\tau)A_0(\tau)T(\tau)$ в дійсній канонічній формі.

Виведемо так зване гомологічне рівняння, з якого визначатимуться невідомі $H_{k,l}(\tau)$, $\bar{A}_l(\tau)$, $G_{k,l}(\tau)$. Підставивши (5) в (4) з урахуванням (6), дістанемо

$$H_1(\tau,\varepsilon)\left[\bar{A}(\tau,\varepsilon)y+\sum_{k\geq 2}G_k(\tau,\varepsilon)y^k\right]+\sum_{k\geq 2}\left[H_k(\tau,\varepsilon)y^k\right]'_y\bar{A}(\tau,\varepsilon)y+$$
$$+\sum_{i\geq 2}\left[H_i(\tau,\varepsilon)y^i\right]'_y\left[\sum_{j\geq 2}G_j(\tau,\varepsilon)y^j\right]+\sum_{k\geq 1}\varepsilon\left[H_k(\tau,\varepsilon)\right]'_\tau y^k=$$
$$=A(\tau,\varepsilon)\left[H_1(\tau,\varepsilon)y+\sum_{k\geq 2}H_k(\tau,\varepsilon)y^k\right]+\sum_{i\geq 2}F_i(\tau,\varepsilon)\left[\sum_{j\geq 1}H_j(\tau,\varepsilon)y^j\right]^i.$$

Шляхом прирівнюванням коефіцієнтів біля однакових степенів щодо y дістаємо

$$H_1(\tau,\varepsilon)\bar{A}(\tau,\varepsilon)y-A(\tau,\varepsilon)H_1(\tau,\varepsilon)=-\varepsilon\left[H_1(\tau,\varepsilon)\right]'_\tau$$

$$\left[H_k(\tau,\varepsilon)y^k\right]'_y\bar{A}(\tau,\varepsilon)y-A(\tau,\varepsilon)H_k(\tau,\varepsilon)y^k=$$
$$=M_k(\tau,\varepsilon)y^k-\varepsilon\left[H_k(\tau,\varepsilon)\right]'_\tau y^k-H_1(\tau,\varepsilon)G_k(\tau,\varepsilon)y^k,\quad k=2,3,\ldots,$$

де $M_k(\tau,\varepsilon)y^k$ форма степеня k в розвиненні виразу

$$\sum_{i\geq 2}F_i(\tau,\varepsilon)\left[\sum_{j\geq 1}H_j(\tau,\varepsilon)y^j\right]^i-\sum_{i\geq 2}\left[H_i(\tau,\varepsilon)y^i\right]'_y\left[\sum_{j\geq 2}G_j(\tau,\varepsilon)y^j\right]$$

за степенями y. Коефіцієнти цієї форми можуть залежати лише від форм $H_j(\tau,\varepsilon)y^j$, $G_i(\tau,\varepsilon)y^i$, у яких $i<k$, $j<k$. Далі прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях ε.

Для лінійних щодо y членів маємо

$$H_{1,0}\bar{A}_0(\tau)-A_0(\tau)H_{1,0}\equiv A_0(\tau)-A_0(\tau)\equiv 0,$$
$$\sum_{i+j=l}\left[H_{1,i}(\tau)\bar{A}_j(\tau)-A_j(\tau)H_{1,i}(\tau)\right]=-H'_{1,l-1}(\tau),\quad l\geq 1,$$

тобто

$$\sum_{i=0}^{l}\left[H_{1,i}(\tau)\bar{A}_{l-i}(\tau)-A_{l-i}(\tau)H_{1,i}(\tau)\right]=-H'_{1,l-1}(\tau),\quad l\geq 1.$$

або

$$H_{1,l}A_0(\tau)-A_0(\tau)H_{1,l}=$$
$$=A_l(\tau)+\sum_{i=1}^{l-1}\left[A_{l-i}(\tau)H_{1,i}(\tau)-H_{1,i}(\tau)\bar{A}_{l-i}(\tau)\right]-H'_{1,l-1}(\tau)-\bar{A}_l(\tau).\qquad(7)$$

З цих рівнянь послідовно будемо знаходити $H_{1,l}(\tau)$ та $\bar{A}_l(\tau)$ при $l=1,2,\ldots$

Для форм степеня $k \geq 2$ маємо

$$\left[H_{k,0}(\tau)y^k\right]'_y A_0(\tau)y - A_0(\tau)H_{k,0}(\tau)y^k = M_{k,0}(\tau)y^k - G_{k,0}(\tau)y^k,$$

$$\sum_{i+j=l}\left(\left[H_{k,i}(\tau)y^k\right]'_y \bar{A}_j(\tau)y - A_j(\tau)H_{k,i}(\tau)y^k\right) =$$

$$= M_{k,l}(\tau)y^k - \left[H_{k,l-1}(\tau)\right]'_\tau y^k - \sum_{i+j=l} H_{1,i}G_{k,j}(\tau)y^k, \quad l \geq 1$$

або

$$\left[H_{k,0}(\tau)y^k\right]'_y A_0(\tau)y - A_0(\tau)H_{k,0}(\tau)y^k = M_{k,0}(\tau)y^k - G_{k,0}(\tau)y^k,$$

$$\left[H_{k,l}(\tau)y^k\right]'_y A_0(\tau)y - A_0(\tau)H_{k,l}(\tau)y^k =$$

$$= \sum_{i=0}^{l-1}\left(\left[H_{k,i}(\tau)y^k\right]'_y \bar{A}_{l-i}(\tau)y - A_{l-i}(\tau)H_{k,i}(\tau)y^k\right) +$$

$$+ M_{k,l}(\tau)y^k - \left[H_{k,l-1}(\tau)\right]'_\tau y^k - \sum_{i=1}^{l} H_{1,i}G_{k,l-i}(\tau)y^k - G_{k,l}(\tau)y^k, \quad l \geq 1$$

Якщо “заморозити” τ і ввести гомологічний оператор

$$\mathcal{L}[A_0(\tau)]\cdot = \left[\frac{\partial}{\partial y}\cdot\right] A_0(\tau)y - A_0(\tau)\cdot,$$

то дістанемо стандартні гомологічні рівняння вигляду

$$\mathcal{L}[A_0(\tau)]H_{k,l}(\tau)y^k = P_{k,l}(\tau)y^k - G_{k,l}(\tau)y^k, \quad k \geq 1, \quad l \geq 0,$$

де коефіцієнти форм $P_{k,l}(\tau)y^k$ відомі, а коефіцієнти форм $H_{k,l}(\tau)y^k$ та $G_{k,l}(\tau)y^k$ підлягають визначенню, при чому задля однотипності позначень при $k = 1$ і $l \geq 1$ ми пишемо $G_{1,l}(\tau)$ замість $\bar{A}_l(\tau)$.

Відповідно до зробленого припущення матрицю $A_0(\tau)$ записано у дійсній канонічній формі, а тому її власний базис $\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_n$ не залежить від τ. Утворимо матрицю стовпців $S = [\boldsymbol{s}_1; \ldots; \boldsymbol{s}_n]$ та вектор власних чисел $\Lambda(\tau) := (\lambda_1(\tau), \ldots, \lambda_n(\tau))$ і домовимося про позначення $x^{\mathbf{q}} := x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n}$ для пари векторів $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$ та $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Форми

$$\boldsymbol{e}_{j,\mathbf{q}}(y) := \boldsymbol{s}_j \left[S^{-1}y\right]^{\mathbf{q}}, \quad j = 1, ..., n, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n_+,$$

де $|\mathbf{q}| = q_1 + \cdots + q_n \geq 1$, утворюють власний базис гомологічного оператора $\mathcal{L}\left[A_0(\tau)\right]$, оскільки

$$\mathcal{L}\left[A_0(\tau)\right]\boldsymbol{e}_{j,\mathbf{q}}(y) = \left[\langle \mathbf{q}, \Lambda(\tau)\rangle - \lambda_j(\tau)\right]\boldsymbol{e}_{j,\mathbf{q}}(y)$$

(див., наприклад, [**18**]). Тепер стандартним чином послідовно розв'язуємо гомологічні рівняння методом невизначених коефіцієнтів, а саме, визначаємо коефіцієнти розвинень

$$H_{k,l}(\tau)y^k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{|\mathbf{q}|=k} h_{j,\mathbf{q},l}(\tau)\boldsymbol{e}_{j,\mathbf{q}}(y), \quad G_{k,l}(\tau)y^k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{|\mathbf{q}|=k} g_{j,\mathbf{q},l}(\tau)\boldsymbol{e}_{j,\mathbf{q}}(y),$$

за коефіцієнтами розвинень

$$P_{k,l}(\tau)y^k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{|\mathbf{q}|=k} p_{j,\mathbf{q},l}(\tau)\boldsymbol{e}_{j,\mathbf{q}}(y)$$

з рівнянь

$$\left[\langle \mathbf{q}, \Lambda(\tau)\rangle - \lambda_j(\tau)\right] h_{j,\mathbf{q},l}(\tau) = p_{j,\mathbf{q},l}(\tau) - g_{j,\mathbf{q},l}(\tau)$$

Означення 1. Базисну форму $\boldsymbol{e}_{j,\mathbf{q}}(y)$ і, відповідно, набір індексів $j, \mathbf{q}$ назвемо $\mathcal{L}[A_0(\tau)]$ -резонансними, якщо

$$\inf_{\tau\in\mathbb{R}} \left[\langle \mathbf{q}, \Lambda(\tau)\rangle - \lambda_j(\tau)\right] = 0.$$

Для резонансних індексів покладаємо

$$g_{j,\mathbf{q},l}(\tau) := p_{j,\mathbf{q},l}(\tau), \quad h_{j,\mathbf{q},l}(\tau) = 0,$$

а для нерезонансних —

$$h_{j,\mathbf{q},l}(\tau) := \left[\langle \mathbf{q}, \Lambda(\tau)\rangle - \lambda_j(\tau)\right]^{-1} p_{j,\mathbf{q},l}(\tau), \quad g_{j,\mathbf{q},l}(\tau) := 0$$

Неважко переконатися в тому, що коефіцієнти шуканого перетворення задовольняють умову дійсності (див. [**18**]):

$$\overline{h_{j,\mathbf{q},l}(\tau)} = h_{\sigma j, I\mathbf{q},l}(\tau).$$

Тут ι — інверсія на індексах, I — матриця інверсії в $\mathbb{R}^n$:

$$\iota j = \begin{cases} j+r, & 1 \le j \le r, \\ j-r, & r+1 \le j \le 2r \\ j, & 2r+1 \le j \le n; \end{cases} \qquad I = \begin{pmatrix} 0 & E_r & 0 \\ E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-2r} \end{pmatrix}$$

(E_m позначає одиничну матрицю розміром $m \times m$).

Зазначимо, що при $k = 1$ гомологічне рівняння набуває вигляду

$$\left[\lambda_i(\tau) - \lambda_j(\tau)\right] h_{j,\mathbf{e}_i,l}(\tau) = p_{j,\mathbf{e}_i,l}(\tau) - g_{j,\mathbf{e}_i,l}(\tau).$$

Пояснимо, що собою являють коефіцієнти $h_{j,\mathbf{e}_i,l}(\tau)$, $p_{j,\mathbf{e}_i,l}(\tau)$, $g_{j,\mathbf{e}_i,l}(\tau)$. Для довільної матриці $B \in \mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$ у рівності

$$By = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{j,\mathbf{e}_i}\boldsymbol{e}_{j,\mathbf{e}_i}(y)$$

покладемо $y = Sz$ і домножимо обидві її частини зліва на S^{-1}. Дістанемо

$$S^{-1}BSz = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{j,\mathbf{e}_i} z_i \mathbf{e}_j.$$

Звідси випливає, що $b_{j,\mathbf{e}_i}$ — це елемент матриці $S^{-1}BS$, який розміщується на перетині її j-го рядка та i-го стовпця. Таким чином, $h_{j,\mathbf{e}_i,l}(\tau)$, $p_{j,\mathbf{e}_i,l}(\tau)$, $g_{j,\mathbf{e}_i,l}(\tau)$ — це елементи матриць

$$S^{-1}H_{1,l}(\tau)S, \quad S^{-1}P_{1,l}(\tau)S, \quad S^{-1}G_{1,l}(\tau)S = S^{-1}\bar{A}(\tau)S$$

з індексами ji. Оскільки

$$L(\tau) := S^{-1}A_0(\tau)S = \mathrm{diag}\,[\lambda_1(\tau),\ldots,\lambda_n(\tau)]\,,$$

а

$$g_{j,\mathbf{e}_i,l}(\tau) = \begin{cases} p_{j,\mathbf{e}_i,l}(\tau), & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

то $S^{-1}\bar{A}_l(\tau)S$ — діагональна матриця:

$$S^{-1}\bar{A}_l(\tau)S = \mathrm{diag}\,(\lambda_{1,l}(\tau),\ldots,\lambda_{n,l}(\tau)) =: L_l(\tau).$$

Звідси випливає таке твердження.

Твердження 1. *Справджується рівність*

$$S^{-1}\left[A_0(\tau) + \sum_{l\geq 1}\varepsilon^l \bar{A}_l(\tau)\right]S = L(\tau) + \sum_{l\geq 1}\varepsilon^l L_l(\tau),$$

а отже, $\lambda_{j,l}(\tau)$ — це коефіцієнт біля ε^l в розвиненні за степенями ε j-го власного числа матриці $A_0(\tau)+\sum_{l\geq 1}\varepsilon^l\bar{A}_l(\tau)$, тобто того числа, яке при $\varepsilon = 0$ перетворюється в $\lambda_j(\tau)$.

Результатом наведених вище міркувань є теорема про нормальну форму системи з повільно змінними коефіцієнтами.

Теорема 1. *Якщо система* (4) *задовольняє умови **H1** та **H2** і матриця $A_0(\tau)$ представлена дійсною канонічною формою, то існує формальна заміна* (5), *яка зводить цю систему до вигляду* (6), *в якому форми $\bar{A}_l(\tau)y$ та $G_{k,l}(\tau)y^k$ розкладаються* *лише за $\mathcal{L}[A_0(\tau)]$-резонансними базисними формами $\mathbf{e}_{j,\mathbf{q}}(\tau)$. Якщо в зведеній системі зробити заміну змінних $y = Sz$, то дістанемо систему вигляду*

$$\dot{z}_j = \left[\lambda_j(\tau) + \sum_{l\geq 1} \lambda_{j,l}(\tau)\varepsilon^l\right] z_j + \sum_{|\mathbf{q}|\geq 2}{}' \sum_{l\geq 0}^{n} \varepsilon^l g_{j,\mathbf{q},l}(\tau) z^{\mathbf{q}}, \quad j = 1, \ldots, n$$

з гладкими і обмеженими на $\mathbb{R}$ коефіцієнтами $\lambda_{j,l}(\tau)$, $g_{j,\mathbf{q},l}(\tau)$, де штрих біля знака суми означає, що підсумовування здійснюється лише за резонансними індексами $j, \mathbf{q}$.

Зауважимо, що при $l = 1$ правою частиною рівняння (7) є $A_1(\tau) - \bar{A}_1(\tau)$. Звідси приходимо до такого висновку.

Твердження 2. *Елементами матриці*

$$L_1(\tau) := \operatorname{diag}\left[\lambda_{1,1}(\tau), \ldots, \lambda_{n,1}(\tau)\right]$$

є відповідні елементи головної діагоналі матриці

$$B_1(\tau) := S^{-1} A_1(\tau) S.$$

При обчисленні елементів $\lambda_{j,1}(\tau)$ можна скористатися таким твердженням.

Твердження 3. *Елемент $\lambda_{j,1}(\tau)$ дорівнює коефіцієнту біля ε в розвиненні j-го власного числа матриці $A_0(\tau) + \varepsilon A_1(\tau)$ за степенями ε.*

Доведення. Матриця $A_0(\tau) + \varepsilon A_1(\tau)$ та подібна їй матриця

$$L(\tau) + \varepsilon B_1(\tau) = S^{-1}\left[A_0(\tau) + \varepsilon A_1(\tau)\right] S$$

мають однакові власні числа. Будемо шукати j-й власний вектор і j-е власне число останньої матриці у вигляді розвинень за степенями ε

$$\mathbf{e}_j + \varepsilon \mathbf{b}_{1,j} + \varepsilon^2 \mathbf{b}_{2,j} + \cdots, \quad \lambda_j(\tau) + \varepsilon\beta_{1,j}(\tau) + \varepsilon^2\beta_{2,j}(\tau) + \cdots,$$

які мають задовольняти систему

$$\begin{aligned}&\left[L(\tau) + \varepsilon B_1(\tau)\right]\left[\mathbf{e}_j + \varepsilon \mathbf{b}_{1,j}(\tau) + \cdots\right] = \\ &= \left[\lambda_j(\tau) + \varepsilon\beta_{1,j}(\tau) + \cdots\right]\left[\mathbf{e}_j + \varepsilon \mathbf{b}_{1,j}(\tau) + \cdots\right].\end{aligned}$$

Прирівнявши коефіцієнти біля ε дістанемо

$$\left[L(\tau) - \lambda_j(\tau)E\right]\mathbf{b}_{1,j}(\tau) = \left[\beta_{1,j}(\tau)E - B_1(\tau)\right]\mathbf{e}_j \tag{8}$$

Вектор в лівій частині має нульовий j-й елемент. Тому $\beta_{1,j}(\tau)$ з необхідністю має дорівнювати j-му елементу головної діагоналі матриці $B_1(\tau)$, тобто з урахуванням твердження 3 маємо рівність $\lambda_{j,1}(\tau) = \beta_{1,j}(\tau)$. Система (8) тепер однозначно визначає вектор $\mathbf{b}_{1,j}(\tau)$ з нульовою j-ю компонентою. □

3. Виникнення автоколивань у двовимірній системі з повільно змінними параметрами

Розглянемо двовимірну систему вигляду (4), яка задовольняє припущення **H1** та **H2**, а також додаткову умову:

H3: матриця $A_0(\tau)$ має суто уявні власні числа $\pm \mathrm{i}\omega_0(\tau)$. а отже,

$$A_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0(\tau) \\ \omega_0(\tau) & 0 \end{pmatrix}.$$

Зведемо таку систему до неавтономної нормальної форми згідно з теоремою 1. При цьому, як зазначалося в попередньому п., без обмеження загальності міркувань можемо вважати, що $A_0(\tau)$ представлена дійсною канонічною формою

$$A_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0(\tau) \\ \omega_0(\tau) & 0 \end{pmatrix}.$$

Резонансні індекси $1, \mathbf{q}$ характеризують умови

$$\mathrm{i}\omega_0(\tau) q_1 - \mathrm{i}\omega_0(\tau) q_2 = \mathrm{i}\omega_0(\tau)$$

тобто

$$q_1 - q_2 - 1 = 0,$$

Покладемо $q_2 = k$. Тоді $q_1 = k + 1$ і $q_1 + q_2 = 2k + 1$. Перейдемо до власного базису

$$y = z\boldsymbol{s}_1 + \bar{z}\boldsymbol{s}_2, \quad \boldsymbol{s}_1 = \bar{\boldsymbol{s}}_2.$$

Тоді нормалізовану систему можна подати у вигляді одного комплексного рівняння

$$\dot{z} = \left(\mathrm{i}\omega_0(\tau) + \sum_{l \geq 1} \varepsilon^l \lambda_{1,l}(\tau)\right) z + \sum_{k \geq 1} a_k(\tau, \varepsilon) \left|z\right|^{2k} z,$$

де

$$a_k(\tau, \varepsilon) = \sum_{l \geq 0} \varepsilon^l a_{k,l}(\tau).$$

Друге рівняння системи буде комплексно спряженим з першим (див. [**18**]).

Увівши полярні координати за формулою $z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, та поклавши

$$\alpha_l(\tau) = \operatorname{Re} \lambda_{1,l}(\tau), \quad \omega_l(\tau) = \operatorname{Im} \lambda_{1,l}(\tau),$$

$$b_k(\tau, \varepsilon) = \operatorname{Re} a_k(\tau, \varepsilon), \quad c_k(\tau, \varepsilon) = \operatorname{Im} a_k(\tau, \varepsilon),$$

дістанемо систему

$$\dot{\rho} = \rho\left(\sum_{l\geq 1}\varepsilon^l \alpha_l(\tau) + \sum_{k\geq 1} b_k(\tau,\varepsilon)\rho^{2k}\right),$$
$$\dot{\varphi} = \sum_{l\geq 0}\varepsilon^l \omega_l(\tau) + \sum_{k\geq 1} c_k(\tau,\varepsilon)\rho^{2k}.$$

Відзначимо, що неформальним перетворенням, поліномним щодо координат і малого параметра, вихідну систему можна звести до системи, яка в полярних координатах набуває вигляду

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \rho\left(\sum_{l=1}^{m}\varepsilon^l \alpha_l(\tau) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{m} b_{k,l}(\tau)\rho^{2k}\varepsilon^l + O\left(\varepsilon^{m+1}(1+\rho^{2m+2})\right)\right),\\ \dot{\varphi} &= \sum_{l=0}^{m}\varepsilon^l \omega_l(\tau) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{m} c_{k,l}(\tau)\rho^{2k}\varepsilon^l + O\left(\varepsilon^{m+1}(1+\rho^{2m+2})\right),\end{aligned} \tag{9}$$

з рівномірним щодо $(\tau,\varphi)\in\mathbb{R}^2$ відношенням підпорядкування O в правих частинах. Природно припустити, що як і в теорії статичної біфуркації граничного циклу, основні якісні властивості системи (9) можна описати за допомогою модельної системи

$$\dot{\rho} = \rho(\varepsilon\alpha(\tau) - \beta(\tau)\rho^2), \quad \dot{\varphi} = \omega_0(\tau), \tag{10}$$

де

$$a(\tau) := \alpha_1(\tau), \quad b(\tau) := -b_{1,0}(\tau).$$

Унаслідок масштабного перетворення $\rho = \sqrt{\varepsilon}r,\ t = \tau/\varepsilon$ система (9) набуває вигляду

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = r\left[\sum_{l=0}^{m-1}\varepsilon^l \alpha_{l+1}(\tau) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{m} b_{k,l}(\tau)r^{2k}\varepsilon^{k+l-1} + O\left(\varepsilon^m\right)\right] \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\omega_0(\tau)}{\varepsilon} + \sum_{l=0}^{m-1}\varepsilon^l \omega_{l+1}(\tau) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{m} c_{k,l}(\tau)r^{2k}\varepsilon^{k+l-1} + O\left(\varepsilon^m\right), \tag{12}$$

а модельна система — вигляду

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = a(\tau)r - b(\tau)r^3, \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\omega_0(\tau)}{\varepsilon}. \tag{14}$$

Зауважимо, що яке б не було $R>0$ знайдеться достатньо мале $\varepsilon_0>0$ таке, що праві частини системи (11)–(12) є гладкими, обмеженими функціями на множині

$$\mathcal{D} := \{\tau\in\mathbb{R}\}\times\{r\in[0,R]\}\times\{\varphi\in\mathbb{R}\}\times\{\varepsilon\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]\}, \tag{15}$$

які мають період 2π щодо змінної φ.

Укажемо умови, при виконанні яких в цій системі спостерігається явище виникнення незатухаючих коливань, аналогічне явищу біфуркації Андронова-Гопфа. Насамперед накладемо обмеження на коефіцієнти $a(\tau)$ та $b(\tau)$, які гарантують таку властивість рівняння (13): кожен його розв'язок, який у віддалений в минуле початковий момент $\tau_0 < 0$ набуває додатного значення $r_0 > 0$, на проміжку $[\tau_0, 0]$ монотонно спадає, наближаючись при $\tau \to -0$ до тривіального розв'язку тим ближче, чим більше $|\tau_0|$; коли ж $\tau \to +\infty$, розв'язок прямує до деякого усталеного режиму, який не залежить від початкових даних (τ_0, r_0).

Твердження 4. *Для довільних $\tau_0 \in \mathbb{R}$, $r_0 > 0$ позначимо через $r(\tau; \tau_0, r_0)$ розв'язок рівняння 13, який задовольняє початкову умову $r(\tau_0; \tau_0, r_0) = r_0$, і припустимо, що функції $a(\tau)$ і $b(\tau)$ мають такі властивості:*

$$a(\tau) \leq 0, \quad b(\tau) \geq 0 \quad \forall \tau \leq 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{0} b(\tau) \mathrm{d}\tau = +\infty,$$

$$a(\tau) > 0 \quad \forall \tau > 0, \; b(\tau) > 0 \quad \forall \tau \geq 0,$$

$$\liminf_{\tau \to +\infty} \frac{a(\tau)}{b(\tau)} > 0, \quad \limsup_{\tau \to +\infty} \frac{a(\tau)}{b(\tau)} < \infty.$$

Тоді якщо $\tau_0 < 0$, то функція $r(\cdot; \tau_0, r_0)$ на проміжку $[\tau_0, 0]$ монотонно спадає, причому

$$\lim_{\tau_0 \to -\infty} r(0; \tau_0, r_0) = 0,$$

а при $\tau \to +\infty$ вона має асимптотику

$$r(\tau; \tau_0, r_0) \sim \mathrm{e}^{\int_0^\tau a(s) \mathrm{d}s} \left[2 \int\limits_0^\tau \mathrm{e}^{2 \int_0^s a(t) \mathrm{d}t} b(s) \mathrm{d}s \right]^{-1/2},$$

і задовольняє нерівності

$$\liminf_{\tau \to \infty} r(\tau; \tau_0, r_0) \geq \sqrt{\liminf_{\tau \to +\infty} \frac{a(\tau)}{b(\tau)}},$$

$$\limsup_{\tau \to \infty} r(\tau; \tau_0, r_0) \leq \sqrt{\limsup_{\tau \to +\infty} \frac{a(\tau)}{b(\tau)}}.$$

Доведення. Оскільки

$$\frac{\mathrm{d}r(\tau; \tau_0, r_0)}{\mathrm{d}\tau} \leq -b(\tau) r^3(\tau; \tau_0, r_0) \leq 0 \quad \forall \tau \leq 0,$$

то

$$\frac{1}{r^2(0;\tau_0,r_0)} \le \frac{1}{r_0^2} + 2\int\limits_{\tau_0}^{0} b(s)\mathrm{d}s,$$

а отже, $r(0;\tau_0,r_0)$ можна зробити як завгодно малим, вибравши $|\tau_0|$ достатньо великим.

Поклавши

$$\xi(\tau) := \mathrm{e}^{2\int_{\tau_0}^{\tau} a(s)\mathrm{d}s}, \quad \eta(\tau) := \frac{1}{r_0^2} + 2\int\limits_{\tau_0}^{\tau} \xi(s)b(s)\mathrm{d}s$$

і зінтегрувавши рівняння Бернуллі (13), для довільних $\tau_0 \in \mathbb{R}$ і $\tau \ge \tau_0$, дістаємо

$$r^2(\tau;\tau_0,r_0) = \frac{\xi(\tau)}{\eta(\tau)}.$$

Легко бачити, що умови теореми гарантують нескінченність границь:

$$\xi(+\infty) = +\infty, \quad \eta(+\infty) = +\infty.$$

Звідси випливає асимптотичне зображення для $r(\tau;\tau_0,r_0)$. Скориставшись теоремою Коші (див., наприклад, [**19**, с. 143]), дістаємо нерівності

$$\liminf_{\tau\to\infty} r^2(\tau;\tau_0,r_0) \ge \liminf_{\tau\to\infty} \frac{\xi'(\tau)}{\eta'(\tau)},$$

$$\limsup_{\tau\to\infty} r^2(\tau;\tau_0,r_0) \le \limsup_{\tau\to\infty} \frac{\xi'(\tau)}{\eta'(\tau)},$$

які з урахуванням явного вигляду функцій $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$ завершують доведення. □

Тепер доведемо основну теорему про асимптотичне інтегрування системи рівнянь (11)–(12), з якої, зокрема випливає, що за додаткової умови на функції $a(\cdot)$ та $b(\cdot)$ r-компонента розв'язку задачі Коші $r(\tau_0) = r_0$, $\varphi(\tau_0) = \varphi_0$ при $\varepsilon \to 0$ рівномірно на півосі $[\tau_0,\infty)$ прямує до $r(\tau;\tau_0,r_0)$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови твердження* 4 *і додатково*

$$3\liminf_{\tau\to\infty} \frac{a(\tau)}{b(\tau)} > \limsup_{\tau\to\infty} \frac{a(\tau)}{b(\tau)} > 0. \tag{16}$$

Тоді для довільних $\tau_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi_0 \in [0,2\pi)$, $r_0 \in (0,R)$ *(див.* (15)*)*, $m \in \mathbb{N}\cap[2,\infty)$ *можна вказати числа* $C > 0$ *і* $\varepsilon_0 > 0$ *такі, що розв'язок системи* (11)–(12)*, який задовольняє початкові умови* $r(\tau_0) = r_0$, $\varphi(\tau_0) = \varphi_0$*, при кожному* $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ *допускає* *зображення*

$$r=\sum_{i=0}^{m-1}\varepsilon^i r_i(\tau)+\varepsilon^m u(\tau;\varepsilon), \tag{17}$$

$$\varphi=\varphi_0+\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\left[\frac{\omega_0(s)}{\varepsilon}+\sum_{l\geq 0}^{m-1}\varepsilon^l\omega_{l+1}(s)\right]\mathrm{d}s+$$

$$+\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=0}^{m}c_{k,l}(s)\left(\sum_{i=0}^{m-1}\varepsilon^i r_i(s)\right)^{2k}\varepsilon^{k+l-1}\mathrm{d}s+\varepsilon^{m-1}\psi(\tau;\varepsilon),$$

де $r_0(\tau):=r(\tau;\tau_0,r_0)$ *— розв'язок модельного рівняння* (13)*, який задовольняє початкову умову*$r_0(\tau_0)=r_0$*, а* $r_i(\tau)$*,* $u(\tau,\varepsilon)$ *та* $\psi(\tau,\varepsilon)$ *— гладкі щодо* $\tau\geq\tau_0$ *функції такі, що* $r_i(\tau_0)=0$ *і*

$$\max_{\tau\geq\tau_0}\{r_i(\tau),u(\tau,\varepsilon),\psi(\tau,\varepsilon)/(\tau-\tau_0)\}\leq C\quad i=1,\dots m-1.$$

Доведення. Підставивши (17) в (11) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε, дістанемо для визначення функцій $r_i(\tau)$ набір рівнянь вигляду

$$\frac{\mathrm{d}r_0}{\mathrm{d}\tau}=a(\tau)r_0-b(\tau)r_0^3,\quad r_0(\tau_0)=r_0,$$

$$\frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}\tau}=\left[a(\tau)-3b(\tau)r_0^2(\tau)\right]r_i+f_i(\tau),\quad r_i(\tau_0)=0,\quad i=1,\dots,m-1,$$

де функції $f_i(\tau)$ утворено з використанням функцій $r_j(\tau)$, $0\leq j\leq i-1$. Властивості функції $r_0(\tau)$ визначаються твердженням (4). Зокрема, $\inf_{\tau\geq\tau_0}r_0(\tau)>0$. З умови (16) випливає нерівність

$$\limsup_{T,s\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{s}^{T+s}\left[a(\tau)-3b(\tau)r_0^2(\tau)\right]\mathrm{d}\tau<0,$$

яка означає, що генеральний показник рівняння $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}=\left[a(\tau)-3b(\tau)r_0^2(\tau)\right]r$ від'ємний, а тому розв'язок $r_i(\tau)$ буде обмеженим на півосі $[\tau_0,\infty)$ [**20**, с. 186]. Конкретніше, знайдуться додатні сталі γ та K такі, що

$$\chi(\tau,s):=\exp\left(\int\limits_{s}^{\tau}\left[a(t)-3b(t)r_0^2(t)\right]\mathrm{d}t\right)\leq K\mathrm{e}^{-\gamma(\tau-s)}\quad\forall\tau\geq s\geq\tau_0,$$

а тому

$$r_i(\tau):=\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\chi(\tau,s)f_i(s)\mathrm{d}s\quad\Rightarrow\quad\sup_{\tau\geq\tau_0}|r_i(\tau)|\leq\frac{K}{\gamma}\sup_{\tau\geq\tau_0}|f_i(\tau)|=:N_i.$$

Неважко переконатися в тому, функції u та ψ мають задовольняти систему вигляду

$$\dot{u} = \left[a(\tau) - 3b(\tau)r_0^2(\tau)\right] u + F\left(\tau, \varepsilon^m u, \varepsilon^m \psi, \varepsilon\right),$$
$$\dot{\psi} = G(\tau, \varepsilon u, \varepsilon^{m-1}\psi, \varepsilon),$$

та набувати нульових початкових початкових значень при $\tau = \tau_0$, причому з урахуванням відокремленості $r_0(\tau)$ від нуля на $[\tau_0, \infty)$, а також вигляду області $\mathcal{D}$ (формула (15)) знайдуться достатньо малі додатні числа ϱ та ε_0 такі, що функції $F(\tau, r, \varphi, \varepsilon)$ та $G(\tau, r, \varphi, \varepsilon)$ є гладкими, обмеженими і 2π-періодичними щодо змінної φ на множині

$$\Delta := \mathbb{R} \times [-\varrho, \varrho] \times \mathbb{R} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0].$$

Забезпечивши мализною ε_0 виконання нерівності

$$\varepsilon_0^m \sigma \le \rho, \tag{18}$$

де $\sigma := KM/\gamma$, зазначену пару функції (u, ψ) будемо шукати як нерухому точку оператора

$$\mathcal{A}[u, \psi](\tau) :=$$
$$:= \left(\int_{\tau_0}^{\tau} \chi(\tau, s) F\left(s, \varepsilon^m u(s), \varepsilon^m \psi(s), \varepsilon\right) \mathrm{d}s, \int_{\tau_0}^{\tau} G\left(s, \varepsilon^m u(s), \varepsilon^m \psi(s), \varepsilon\right) \mathrm{d}s \right),$$

визначеного на просторі

$$\mathcal{S} := \left\{ (u(\tau), \psi(\tau)) : (u(\cdot), \psi(\cdot)) \in \mathrm{C}\left(I_{\tau_0}^+ \mapsto J_\sigma \times \mathbb{R}\right), \psi(\tau)/(\tau - \tau_0) \le M \right\},$$

де $I_{\tau_0}^+ := [\tau_0, \infty)$, $M := \max\left\{ \max_{\Delta} |F|, \max_{\Delta} |G| \right\}$, $J := [-\sigma, \sigma]$.

Оскільки з урахуванням (18) для всіх $(u, \psi) \in \mathcal{S}$ і $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ маємо

$$\left| \int_{\tau_0}^{\tau} \chi(\tau, s) F\left(s, \varepsilon^m u(s), \varepsilon^m \psi(s), \varepsilon\right) \mathrm{d}s \right| \le \sigma,$$
$$\left| \int_{\tau_0}^{\tau} G\left(s, \varepsilon^m u(s), \varepsilon^m \psi(s), \varepsilon\right) \mathrm{d}s \right| \le M\left(\tau - \tau_0\right),$$

то оператор $\mathcal{A}$ відображає простір $\mathcal{S}$ у себе. Гладкость функцій F та G гарантує існування сталої Ліпшица $L > 0$ такої, що

$$|F(\tau, r_1, \varphi_1, \varepsilon) - F(\tau, r_2, \varphi_2, \varepsilon)| \le L\left[|r_1 - r_2| + |\varphi_1 - \varphi_2|\right],$$
$$|G(\tau, r_1, \varphi_1, \varepsilon) - G(\tau, r_2, \varphi_2, \varepsilon)| \le L\left[|r_1 - r_2| + |\varphi_1 - \varphi_2|\right]$$

для всіх $(\tau, r_k, \varphi_k, \varepsilon) \in \Delta$, $k = 1, 2$. Якщо тепер перетворити $\mathcal{S}$ у повний метричний простір, увівши на ньому метрику

$$d((u_1, \psi_1), (u_2, \psi_2)) :=$$
$$:= \sup_{\tau \geq \tau_0} \left[\mathrm{e}^{L(\tau_0 - \tau)} \left(|u_1(\tau) - u_2(\tau)| + |\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)| \right) \right],$$

то для довільних $(u_k, \psi_k) \in \mathcal{S}$, $k = 1, 2$, матимемо

$$d(\mathcal{A}[u_1, \psi_1], \mathcal{A}[u_2, \psi_2]) \leq$$
$$\leq \varepsilon^m \sup_{\tau \geq \tau_0} \Big\{ \mathrm{e}^{L(\tau_0 - \tau)} \Big[\int\limits_{\tau_0}^{\tau} K L \mathrm{e}^{\gamma(s-\tau)} \left[|u_1(s) - u_2(s)| + |\psi_1(s) - \psi_2(s)| \right] \mathrm{d}s +$$
$$+ \int\limits_{\tau_0}^{\tau} L \left[|u_1(s) - u_2(s)| + |\psi_1(s) - \psi_2(s)| \right] \mathrm{d}s \Big] \Big\} \leq$$
$$\leq \varepsilon^m \sup_{\tau \geq \tau_0} \Big\{ \mathrm{e}^{L(\tau_0 - \tau)} \int\limits_{\tau_0}^{\tau} (K+1) \, L \mathrm{e}^{L(s-\tau_0)} \mathrm{d}s \Big\} d((u_1, \psi_1), (u_2, \psi_2))$$
$$\leq \varepsilon^m (K+1) d((u_1, \psi_1), (u_2, \psi_2)).$$

Отже, умова $\varepsilon_0^m (K+1) < 1$ разом з (18) гарантує стискання простору $\mathcal{S}$ під дією $\mathcal{A}$, а разом із тим існування для нього єдиної нерухомої точки.

Для того, аби завершити доведення, достатньо покласти $C := \max_{1 \leq i \leq m-1} \{N_i, \sigma, M\}$.

$\square$

4. Висновки

За допомогою методу нормальних форм побудовано асимптотичне зображення розв'язку двовимірної системи з повільно змінними параметрами, який описує процес виникнення автоколивань при втраті стійкості положення рівноваги. На відміну від явища статичної біфуркації, коли в першому наближення амплітуда коливань визначається коренем деякого алгебраїчного рівняння, в досліджуваному випадку амплітуда коливань повільно змінюється в часі, причому її еволюція в першому наближенні описується нетривіальним розв'язком рівняння Бернуллі з кубічною нелінійністю.

Література

[1] *Боголюбов Н.Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний/ Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. — М.: Наука, 1974. — 503 с.

[2] *Фещенко С.Ф.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений/ С.Ф. Фещенко, Н.И. Шкиль, Л.Д. Николенко. — К.: Наук. думка, 1966. — 249 с.

[3] *Шкіль М.І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях/ М.І. Шкіль. — К.: Вища шк., 1971. — 228 с.

[4] *Шкиль Н.И.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями/ Н.И. Шкиль, И.И. Старун, В.П. Яковец. — К.: Вища шк., 1991. — 207 с.

[5] *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений/ С.А. Ломов — М.: Наука, 1981. — 398 с.

[6] *Мищенко Е.Ф.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания/ Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов. — М.: Наука, 1975. — 248 с.

[7] *Васильева А.Б.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях/ А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. — 106 с.

[8] *Самойленко А.М.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань/ А.М. Самойленко. Р.І. Петришин. – К.: Наук. думка, 2004. – 474 с.

[9] *Самусенко П.Ф.* Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціально-функціональних рівнянь з виродженнями. За редакцією М.І. Шкіля/ П.Ф. Самусенко. — К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2011. — 343 с.

[10] *Щоголев С.А.* Деякі задачі теорії коливань для диференціальних систем, які містять повільно змінні параметри: дис. . . . докт. фіз.-мат. наук: 01.01.02/ Щоголев Сергій Аленірович. — Одеса., 2011.

[11] *Neishtadt A.* On stability loss delay for dynamical bifurcations/ Anatoly Neishtadt// Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. S 2. — 2009. — № 4. — 897-909.

[12] *Butuzov V.F.* Singularly perturbed problems in case of exchange of stabilities// V.F. Butuzov, N.N. Nefedov, K.R. Schneider// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2004. — **121**, № 1. — p. 1973-2079.

[13] *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений/ А.Д. Брюно. — М.: Наука, 1979. — 256 с.

[14] *Костин В.В.* Нормальные формы неавтономных систем/ В.В. Костин// Докл. АН УССР. — 1973. — № 8. — С. 693-696.

[15] *Ломов С.А., Сафонов В.Ф.* Алгоритм нормальных форм в нелинейных сингулярно возмущенных системах с нестабильным спектром/ С.А. Ломов, В.Ф. Сафонов// Укр. мат. журн. — 1986. — 38, N 4, — С. 453-464.

[16] *Siegmund S.* Normal forms for nonautonomous differential equations/ Stefan Siegmund// J. Differential Equations. — 2002. — **178**. — p. 541–573.

[17] *Lee DeVille R.E.* Analysis of a renormalization group method and normal form theory for perturbed ordinary differential equations/ R.E. Lee DeVille, Anthony Harkin, Matt Holzer, Kresimir Josic, Tasso J. Kaper// - Phys. D. — 2008. — **237**, № 8. — P. 1029-1052.

[18] *Парасюк І.О.* Вступ до якісної теорії диференціальних рівнянь: Навчальний посібник/ І.О. Парасюк. — К.: Вид.-поліграф. центр "Київ. ун-т", 2005. — 88 с.

[19] *Дороговцев А.Я.* Математический анализ. Краткий курс в современном изложении/ А.Я. Дороговцев — К.: Факт, 2004. — 560 с.

[20] *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве/ Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн — М.: Наука, 1970. — 536 с.

References

[1] Bogolubov N.N. *Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnyh kolebanij* - 1974, 503 p.

[2] S.F. Feshhenko, N.I. Shkil, L.D. Nikolenko. *Asimptoticheskie metody v teorii linejnyh differencial'nyh uravnenij (Asymptotic methods in the theory of lineardifferential Equations)* - 1966, 249 p.

[3] Shkil M.I. *Asymptotychni metody v dyferencial'nyh rivnjannjah (Asymptotic methods in differential equations)* - 1971, 228 p.

[4] N.I. Shkil, I.I. Starun,V.P. Yakovets. *Asimptoticheskoe integrirovanie linejnyh sistem differencial'nyh uravnenij s vyrozhdenijami (Asymptotic integration of linearsystems of differential equations with degenerations)* - 1991, 207 p.

[5] S.A. Lomov *Vvedenie v obshhuju teoriju singuljarnyh vozmushhenij (Introduction to the general theory of singular perturbations)* - 1981 - 398p.

[6] E.F. Mishhenko, N.H. Rozov. *Differencial'nye uravnenija s malym parametrom i relaksacionnye kolebanija (Differential equations with small parameters and relaxations)* - 1975, 248 p.

[7] A.B. Vasil'eva, V.F. Butuzov. *Singuljarno vozmushhennye uravnenija v kriticheskih sluchajah (Singularly perturbed equationsin critical cases)* - 1978, 106 p.

[8] A.M. Samoilenko. R.I. Petrishin. *Matematichni aspekti teoriï nelinijnih kolivan' (Mathematical aspects of the theory of nonlinear fluctuations)* - 2004, 474 p.

[9] Samusenko P.F. *Asimptotichne integruvannja singuljarno zburenih sistem diferencial'no-funkcional'nih rivnjan' z virodzhennjami. (Asymptotic integration of singularlyperturbed systems of differential-functional equations with degeneracy.)* - 2011, 343 p.

[10] Shogolev S.A. *Dejaki zadachi teorii' kolyvan' dlja dyferencial'nyh system, jaki mistjat' povil'no zminni parametry (Some problems of oscillation theory for differential systems that contain slow variing parameters)* - 2011.

[11] Neishtadt A. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* - 2009, 4, pp. 897-909

[12] Butuzov V.F., Nefedov N.N., Schneider K.R.*J. Math. Sci. (N. Y.).* - 2004, 1, pp. 1973-2079

[13] Bruno A.D. *Lokal'nyj metod nelinejnogo analiza differencial'nyh uravnenij (Local methods in nonlinear differentialequations)* - 1979, pp. 256 p.

[14] Kostin V.V. *Dokl. AN USSR (Reports of AS USSR)* - 1973, 8, pp. 693-696.

[15] Lomov S.A., Safonov V.F. *Ukr. math. journ.* - 1986, 4, pp. 453-464.

[16] Siegmund S. *J. Differential Equations.* - 2002, pp. 541-573.

[17] R.E. Lee DeVille, Anthony Harkin, Matt Holzer, Kresimir Josic, Tasso J. Kaper *Analysis of a renormalization group method and normal form theory for perturbed ordinary differential equations* - 2008, pp. 1029-1052.

[18] Parasiuk I.O. *Vstup do jakisnoi' teorii' dyferencial'nyh rivnjan': Navchal'nyj posibnyk* - 2005, 88 p.

[19] Dorogovtsev A.Ja. *Matematicheskij analiz. Kratkij kurs v sovremennom izlozhenii (Mathematical analysis. A short course in the modern introduction)*

[20] Daleckij Ju.L., Krein M.G. *Ustojchivost' reshenij differencial'nyh uravnenij v banahovom prostranstve* - 1970, 536 p.