Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2012, № 13(1).— С. 118–127.

УДК 511.7, 512.5

Математичні структури в просторах узагальнених послідовностей Фібоначчі

Д. М. Карвацький

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Н. М. Василенко

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Анотація. У статті вивчаються двовимірні лінійні простори узагальнених послідовностей Фібоначчі, а саме, послідовностей дійсних чисел (u_n), які володіють такою властивістю: $u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n, n \in \mathbb{N}_0$, де p та s — фіксовані дійсні числа. Розглядаються математичні структури у просторі узагальнених послідовностей Фібоначчі, зокрема, вводиться базис, скалярний добуток, норма, метрика. Розглядається підпростір нескінченно малих узагальнених послідовностей Фібоначчі та вивчаються його властивості.

Ключові слова: послідовність Фібоначчі, простори узагальнених послідовностей Фібоначчі.

The mathematical structure in the space of generalized Fibonacci sequence

N. Karvatskyi,

National Pedagogical Dragomanov University

N. Vasylenko,

National Pedagogical Dragomanov University

Abstract. In this paper, we study two-dimensional linear space of generalized Fibonacci sequences, i.e., sequences of real numbers (u_n) that have the property: $u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n, n \in \mathbb{N}_0$, where p and s — fixed real numbers. We consider the mathematical structure in the space of generalized Fibonacci sequence, including injected base, scalar product, norm, metric. We consider the subspace of infinitesimal generalized Fibonacci and investigated its properties.

AMS Subject Classifications (2010): 11B39, 28A80, 60G30.

Key words: Fibonacci sequence, generalized Fibonacci sequences.

1. Вступ

Класична послідовність Фібоначчі та її властивості широко використовуються в різних розділах математики, зокрема, для побудови метричної, ймовірнісної та фрактальної теорій дійсних чисел. У роботі [**4**] досліджено властивості лінійного простору довільних послідовностей Фібоначчі, тобто послідовностей дійсних чисел (u_n), які володіють властивістю: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,\ u_0, u_1 \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0$. Аналогічні задачі можна розв'язувати і для узагальнених послідовностей Фібоначчі. На множині таких послідовностей можна, природнім способом, ввести лінійні операції (додавання та множення на скаляр поля $\mathbb{R}$), скалярний добуток, норму, метрику. Таким чином, при фіксованих p і s, множина всіх узагальнених послідовностей Фібоначчі буде утворювати двовимірний лінійний простір, в якому існує підпростір нескінченно малих послідовностей.

2. Узагальнені послідовності Фібоначчі

Означення 1. Послідовність дійсних чисел $(u_n) \equiv (u_n)_{n=0}^{\infty}$, $n \in \mathbb{N}_0$, яка має властивість

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n,\ u_0, u_1, p, s \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

називатимемо *узагальненою послідовністю Фібоначчі.*

Узагальнена послідовність Фібоначчі є чотирьохпараметричним об'єктом, оскільки з (1) зрозуміло, що вираз її загального члена залежить від параметрів $u_0,\ u_1,\ p,\ s$.

Тривіальним прикладом узагальненої послідовності Фібоначчі є $(0) = (0, 0, 0, \ldots)$ — нуль-послідовність. Очевидно, що коли $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ — узагальнена послідовність Фібоначчі, то $(u_n)_{n=m}^{\infty}$ — теж узагальнена послідовність Фібоначчі.

Прикладами узагальнених послідовностей Фібоначчі є наступні послідовності:

1. Довільна геометрична прогресія $(b_0q^n) = (b_0, b_0q, b_0q^2, \ldots)$;
2. Класична послідовність Фібоначчі $(F_n) = (1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$;
3. Послідовність чисел Люка $(L_n) = (2, 1, 3, 4, 7, 11, \ldots)$.

Теорема 1. *Для загального члена послідовності* (1) *має місце рівність*

$$u_n = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{\Phi^n\,(u_1 - u_0\Psi) - \Psi^n\,(u_1 - u_0\Phi)}{\Phi - \Psi} & \text{при}\quad \Phi, \Psi \in \mathbb{R}, \Phi \neq \Psi, \\[2ex] \Phi^n \left(u_0 + n\left(\dfrac{u_1}{\Phi} - u_0\right)\right) & \text{при}\quad \Phi, \Psi \in \mathbb{R}, \Phi = \Psi, \\[2ex] \dfrac{\rho^n(u_0\rho\sin(1-n)\gamma + u_2\sin(n)\gamma)}{\rho\sin\gamma} & \text{при}\quad \Phi, \Psi \in \mathbb{C}, \end{array}\right.$$

де $\Phi = \frac{p+\sqrt{p^2+4s}}{2}$, $\Psi = \frac{p-\sqrt{p^2+4s}}{2}$, *та* $\rho = |\Phi| = \sqrt{-s}$, $\gamma = \arg\Phi = \arctan\frac{\sqrt{-p^2-4s}}{p}$.

Доведення. Задача знаходження загального члена послідовності (1) рівносильна задачі розв'язання однорідного різницевого рівняння другого порядку

$$y\left(x+2\right)-py\left(x+1\right)-sy\left(x\right)=0. \tag{2}$$

В цьому випадку характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2-p\lambda-s=0. \tag{3}$$

Вигляд загального члена послідовності (1) буде залежати від того, які будуть розв'язки характеристичного рівняння (3).

Випадок 1. Корені рівняння (3) дійсні та різні, тобто $\Phi\neq\Psi$ — є розв'язками характеристичного рівняння. Ці корені дають два розв'язки рівняння (2): $y_1\left(x\right)=\Phi^x$ та $y_2\left(x\right)=\Psi^x$. У такому випадку загальний розв'язок рівняння (2) це функція

$$y(x)=c_1\Phi^x{+}c_2\Psi^x,$$

а враховуючи початкові умови

$$\begin{cases} c_1y_1\left(0\right)+c_2y_2\left(0\right)=y_0,\\ c_1y_1\left(1\right)+c_2y_2\left(1\right)=y_1, \end{cases} \tag{4}$$

можна знайти сталі c_1 та c_2. Матимемо

$$c_1=\frac{u_1-u_0\Psi}{\Phi-\Psi},\quad c_2=-\frac{u_1-u_0\Phi}{\Phi-\Psi}.$$

Таким чином загальний член послідовності (1) буде мати вигляд

$$u_n=\frac{\Phi^n\left(u_1-u_0\Psi\right)-\Psi^n\left(u_1-u_0\Phi\right)}{\Phi-\Psi}.$$

Випадок 2. Корені рівняння (3) дійсні та однакові, тобто $\Phi=\Psi$ — кратний корінь характеристичного рівняння. Функції $y_1(x)=\Phi^x$ та $y_2(x)=x\Phi^x$ будуть розв'язками рівняння (2). У такому випадку загальний розв'язок (2) матиме вигляд

$$y\left(x\right)=\Phi^x\left(c_1x{+}c_2\right).$$

Звідси враховуючи початкові умови (4), отримаємо загальний член послідовності (1), а саме

$$u_n=\Phi^n\left(u_0+n\left(\frac{u_1}{\Phi}-u_0\right)\right).$$

Випадок 3. Корені рівняння (3) комплексні та різні, тобто $\Phi=\frac{p+\sqrt{-p^2-4si}}{2}$ та $\Psi=\frac{p-\sqrt{-p^2-4si}}{2}$ — два спряжені корені характеристичного рівняння. Використавши тригонометричну форму запису комплексного числа, розв'язки рівняння (2) можна записати у вигляді $y_1\left(x\right)=\rho^x\cos\gamma x$ та $y_2\left(x\right)=\rho^x\sin\gamma x$. Отже, функція

$$y(x)=\rho^x\left(c_1\cos(n\gamma)+c_2\sin(n\gamma)\right)$$

буде загальним розв'язком рівняння (2) у випадку комплексних коренів характеристичного рівняння. Розв'язавши систему (4) відносно невідомих c_1 та c_2, прийдемо до рівності

$$u_n = \frac{\rho^n \left(u_0 \rho \sin(1-n)\gamma + u_1 \sin(n\gamma)\right)}{\rho \sin\gamma}.$$

□

Наслідок 1. *Якщо* $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $p = 1$, $s = 1$, *то* $(u_n) \equiv (F_n)$ *— класична послідовність Фібоначчі, і має місце рівність (формула Біне)*

$$F_n = \frac{\varphi^{n+1} - \widehat{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}}, \quad \text{де} \ \ \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \widehat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{5}$$

Наслідок 2 ([**4**]). *Якщо* (u_n) *— узагальнена послідовність Фібоначчі така, що* $p = s = 1$, *то має місце рівність*

$$u_n = u_0 F_{n-3} + u_1 F_{n-2}. \tag{6}$$

Наслідок 3. *Якщо* (u_n) *– узагальнена послідовність Фібоначчі така, що* $u_1 \neq u_0\Psi$ *та* $u_1 \neq u_0\Phi$, $p^2 + 4s \geq 0$, *то для довільного натурального* k *має місце рівність*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+k}}{u_n} = T^k, \quad \text{де} \ \ T = \begin{cases} \Phi, & \text{якщо} \ \ |\Phi| \geq |\Psi| \\ \Psi, & \text{якщо} \ \ |\Phi| < |\Psi|. \end{cases}$$

Доведення. Розглянемо випадок $p^2 + 4s = 0$. За таких умов, користуючись теоремою 1, одержимо рівність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+k}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi^{n+k}\left(u_0 + (n+k)\left(\frac{u_1}{\Phi} - u_0\right)\right)}{\Phi^n\left(u_0 + n\left(\frac{u_1}{\Phi} - u_0\right)\right)} = \Phi^k.$$

У випадку $p^2 + 4s > 0$, за теоремою 1, буде мати місце інша рівність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+k}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi^{n+k}(u_1 - u_0\Psi) - \Psi^{n+k}(u_1 - u_0\Phi)}{\Phi^n(u_1 - u_0\Psi) - \Psi^n(u_1 - u_0\Phi)} = \begin{cases} \Phi^k, & \text{якщо} \ \ |\Phi| \geq |\Psi| \\ \Psi^k, & \text{якщо} \ \ |\Phi| < |\Psi|. \end{cases}$$

□

3. Простір узагальнених послідовностей Фібоначчі

Нехай

$$F = \{(u_n) : \ u_0, u_1 \in \mathbb{R}, \ u_n = pu_{n-1} + su_{n-2}, \ n \geq 2\}$$

множина узагальнених послідовностей Фібоначчі з **фіксованими параметрами** p та s. Для елементів множини F введемо лінійні операції (додавання та множення на скаляр) за законами:

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) \quad \text{та} \ \ \lambda(a_n) = (\lambda a_n), \ n \in \mathbb{N}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Неважко переконатися, що бінарна операція додавання є замкненою (алгебраїчною):

$$a_n + b_n = pa_{n-1} + sa_{n-2} + pb_{n-1} + sb_{n-2} = p\left[a_{n-1} + b_{n-1}\right] + s\left[a_{n-2} + b_{n-2}\right].$$

Таким чином множина F разом з операцією додавання є комутативною групою, нейтральним елементом якої є нуль-послідовність (0), а симетричним (протилежним) елементом до послідовності (a_n) є послідовність $(-a_n)$.

Операція множення на скаляр є також замкненою:

$$\lambda\left(a_n\right) = \lambda\left[pa_{n-1} + sa_{n-2}\right] = \lambda pa_{n-1} + \lambda sa_{n-2}.$$

Отже, можна зробити висновок, що множина F з операціями додавання та множення на скаляр утворюють лінійний простір.

Лема 1. *Вектори*

$\overrightarrow{e}_1 = (1,\ 0,\ s,\ ps,\ \ldots,\ pu_{n-1}+su_{n-2},\ \ldots)$ *та* $\overrightarrow{e}_2 = (0,\ 1,\ p,\ p^2+s,\ \ldots,\ pu_{n-1}+su_{n-2},\ \ldots)$ *є лінійно незалежними і для довільного* $\overrightarrow{x} = (x_0,\ x_1,\ px_1 + sx_2,\ \ldots,\ pu_{n-1} + su_{n-2},\ \ldots)$ *з* F *виконується рівність*

$$\overrightarrow{x} = x_0\overrightarrow{e}_1 + x_1\overrightarrow{e}_2. \tag{7}$$

Доведення. Легко бачити, що рівність $\alpha_1\overrightarrow{e}_1+\alpha_2\overrightarrow{e}_2 = \overrightarrow{0}$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Отже, вектори $\overrightarrow{e}_1$ та $\overrightarrow{e}_2$ є лінійно незалежними.

Нехай $\overrightarrow{x} = (x_n)$ — довільно вибраний елемент з F. Тоді, за теоремою 1, має місце одна з трьох рівностей:

$$x_n = \frac{\Phi^n\left(x_1 - x_0\Psi\right) - \Psi^n\left(x_1 - x_0\Phi\right)}{\Phi - \Psi} \quad \text{при} \quad \Phi, \Psi \in \mathbb{R}, \Phi \neq \Psi;$$

$$x_n = \Phi^n\left(x_0 + n\left(\frac{x_1}{\Phi} - x_0\right)\right) \quad \text{при} \quad \Phi, \Psi \in \mathbb{R}, \Phi = \Psi;$$

$$x_n = \frac{\rho^n(u_0\rho\sin(1-n)\gamma + u_1\sin(n\gamma))}{\rho\sin\gamma} \quad \text{при} \quad \Phi, \Psi \in \mathbb{C}.$$

Кожна з трьох останніх рівностей рівносильна рівності (7). □

Наслідок 4. *Впорядкована пара векторів* $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ *утворює базис, в якому вектор* $\overrightarrow{x} = (x_n)$ *має координати* $(x_0;\ x_1)$.

Теорема 2. *Множина* F *разом з операціями додавання та множення на скаляр, тобто математична структура* $(F, +, \lambda(\cdot))$, *є двовимірним векторним простором.*

4. Оператор зсуву у просторі узагальнених послідовностей Фібоначчі

У векторному просторі $(F, +, \lambda(\cdot))$ розглянемо оператор

$$L\left(\overrightarrow{x}\right) = \left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\right),$$

де $\overrightarrow{x} = \left(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots\right) \in F,\ k \in \mathbb{N}_0$, який назвемо *оператором зсуву.*

Очевидно, що оператор зсуву є лінійним, тобто

$$L\left(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\right) = L\left(\overrightarrow{x}\right) + L\left(\overrightarrow{y}\right) \quad \text{і} \quad L\left(\alpha\overrightarrow{x}\right) = \alpha L\left(\overrightarrow{x}\right).$$

Нехай $L^{(k)}(\cdot)$ — k-ий степінь оператора L, тобто

$$L^k\left(\overrightarrow{x}\right) = L\left(L\left(\ldots L\left(\overrightarrow{x}\right)\right)\right) = \left(x_k,\ x_{k+1},\ \ldots\right).$$

Теорема 3. *При довільному натуральному k два вектори $\overrightarrow{s} = \left(s_0,\ s_1,\ s_2,\ \ldots\right)$ і $L^k\left(\overrightarrow{s}\right) = \left(s_k,\ s_{k+1},\ \ldots\right)$ з F є лінійно залежними тоді і тільки тоді, коли $s_1 = s_0\Phi$ або $s_1 = s_0\Psi$.*

Доведення. Нехай k — фіксоване натуральне число. Векторна рівність

$$\gamma_1\overrightarrow{s} + \gamma_2 L^k\left(\overrightarrow{s}\right) = \overrightarrow{0} \tag{8}$$

рівносильна системі рівнянь

$$\alpha_1 s_n + \alpha_2 s_{k+n} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Оскільки всі рівняння системи, починаючи з третього, є наслідком перших двох, то остання система рівнянь рівносильна наступньому

$$\begin{cases} \alpha_1 s_0 + \alpha_2 s_k & = & 0, \\ \alpha_2 s_1 + \alpha_2 s_{k+1} & = & 0. \end{cases}$$

З курсу лінійної алгебри відомо, що система двох лінійних однорідних рівнянь з двома невідомими має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_k \\ s_1 & s_{k+1} \end{vmatrix} = 0,$$

що рівносильно рівності $s_0 s_{k+1} - s_1 s_k = 0$.

Враховуючи вигляд загального члена послідовності (1) при умові $\Phi \neq \Psi$ (див. 1), остання рівність може бути переписана у вигляді

$$s_0\frac{\Phi^{k+1}\left(s_1 - s_0\Psi\right) - \Psi^{k+1}\left(s_1 - s_0\Phi\right)}{\Phi - \Psi} - s_1\frac{\Phi^k\left(s_1 - s_0\Psi\right) - \Psi^k\left(s_1 - s_0\Phi\right)}{\Phi - \Psi} = 0.$$

Звідки

$$s_0^2\left(\Phi\Psi\right) + s_1^2 - s_0 s_1\left(\Phi + \Psi\right) = 0.$$

Отримаємо два розв'язками даної квадратичної форми $s_1 = \Phi s_0$ та $s_1 = \Psi s_0$.

Враховуючи вигляд загального члена послідовності (1) при умові $\Phi = \Psi$ (див. 1), перепишемо рівність $s_0 s_{k+1} - s_1 s_k = 0$ у вигляді

$$s_0 \Phi^{k+1} \left(s_0 + (k+1) \left(\frac{s_1}{\Phi} - s_0 \right) \right) - s_1 \Phi^k \left(s_0 + k \left(\frac{s_1}{\Phi} - s_0 \right) \right) = 0.$$

Виконавши певні перетворення, отримаємо

$$s_0^2 \left(\Phi^2 \right) + s_1^2 - s_0 s_1 \left(2\Phi \right) = 0,$$

звідки $s_1 = \Phi s_0$. □

Наслідок 5. *При довільному натуральному k вектори $\overrightarrow{s}$ і $L^k\left(\overrightarrow{s}\right)$ є лінійно незалежними тоді і тільки тоді, коли*

$$s_1 \neq s_0 \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4s}}{2}.$$

Наслідок 6. *Впорядкована пара векторів $\overrightarrow{s} = (s_0,\ s_1,\ \ldots)$ і $L^k\left(\overrightarrow{s}\right) = (s_k,\ s_{k+1},\ \ldots)$, де $s_1 \neq s_0 \frac{p \pm \sqrt{p^2+4s}}{2}$, є базисом лінійного простору F.*

Теорема 4. *Якщо вектор $\overrightarrow{x}$ в базисі $\langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle$ має координати $(x_0; x_1)$, а в базисі $\left\langle \overrightarrow{s}, L^k\left(\overrightarrow{s}\right) \right\rangle$ — координати $(x_0'; x_1')$, то*

$$\begin{cases} x_0 &= s_0 x_0' + s_{k+1} x_1', \\ x_1 &= s_1 x_0' + s_k x_1'. \end{cases}$$

5. Евклідовість та повнота простору узагальнених послідовностей Фібоначчі

Означимо скалярний добуток двох елементів з простору узагальнених послідовностей Фібоначчі. Для цього використаємо означений раніше фіксований базис $\langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle$. Тоді для довільних елементів $x, y \in F$, їх скалярний добуток може бути означеним як сума добутків однойменних координат у фіксованому базисі

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = x_0 y_0 + x_1 y_1. \tag{9}$$

Неважко переконатися, що у такому випадку всі аксіоми скалярного добутку будуть виконуватися. Окрім того, за допомогою скалярного добутку в просторі $(F, +, \lambda(\cdot))$ норму можна означити наступним чином

$$\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}} = \sqrt{{x_0}^2 + {x_1}^2}. \tag{10}$$

Для визначеного таким чином функціонала будуть виконуватися усі аксіоми норми:

1) $\|\overrightarrow{x}\| \geq 0,\ \|\overrightarrow{x}\| = 0 \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$;
2) $\|\lambda \overrightarrow{x}\| = |\lambda|\, \|\overrightarrow{x}\|,\ \lambda \in \mathbb{R}$;
3) $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leq \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|$.

Виконання властивостей 1) і 2) випливає з властивостей скалярного добутку, а виконання властивості 3) слідує з нерівності Коші-Буняковського

$$(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y})^2 < (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x})\,(\overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y})\,.$$

Очевидно, що в базисі $\langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} \rangle$ маємо $\overrightarrow{e_1} = (1;0)\,,\ \overrightarrow{e_2} = (0;1)\,$, тому використовуючи рівності (9) та (10) неважко переконатися, що вибраний базис є ортонормованим. Скалярний добуток, визначений в ортонормованому базисі рівністю (9) будемо називати *природним.*

Будь-який скінченновимірний евклідовий простів можна метризувати, ввівши у ньому відстань між двома елементами $\overrightarrow{x}$ та $\overrightarrow{y}$ наступним чином

$$\rho\,(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\| = \sqrt{(x_0 - y_0)^2 + (x_1 - y_1)^2}. \tag{11}$$

Аксіоми метричного простору виконуватимуться, оскільки виконуються аксіоми норми. Скінченновимірний нормований простір $(F, +, \lambda(\cdot), \cdot)$ автоматично є повним [**5**].

Теорема 5. *Простір* $(F, +, \lambda(\cdot), \cdot)$ *є сепарабельним метричним простором.*

Доведення. Розглянемо множину

$$A = \{(u_n):\ u_0, u_1 \in,\ u_n = pu_{n-1} + su_{n-2},\ n \geq 2\}\,,$$

узагальнених послідовностей Фібоначчі з першими двома раціональними членами, яка є підмножиною F. A — зліченна, оскільки вона бієктивна множині ^{2}. Крім того, підмножина A буде всюди щільною в множині F, оскільки

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \ (\forall\,(u_n) \in F)\ \ (\exists\,(x_n) \in A):\ \rho\,(u_n, x_n) = \sqrt{(u_0 - x_0)^2 + (u_1 - x_1)^2} < \varepsilon.$$

□

6. Підпростір нескінченно малих узагальнених послідовностей Фібоначчі

Теорема 6. *Для того, щоб узагальнена послідовність Фібоначчі* (1)*, з фіксованими параметрами* p *та* s*, була нескінченно малою необхідно і достатньо, щоб виконувалася хоча б одна із систем:*

$$\begin{cases} |\Phi| < 1, \\ |\Psi| < 1, \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} |\Phi| < 1, \\ u_1 = u_0\Phi, \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} |\Psi| < 1, \\ u_1 = u_0\Psi. \end{cases} \tag{14}$$

Зауваження 1. *Виконання систем* (13) *та* (14) *рівносильно тому, що послідовність* (u_n) *являє собою збіжну геометричну прогресію.*

Теорема 7. *З простору* $(F, +, \lambda(\cdot))$ – *узагальнених послідовностей Фібоначчі можна виділити підпростір* S *нескінченно малих послідовностей.*

Доведення. Розглянемо декілька випадків відносно чисел $|\Phi|$ та $|\Psi|$, які у свою чергу залежать від фіксованих параметрів p і s.

Випадок 1: Одночасно виконуються дві нерівності $|\Phi| < 1$ та $|\Psi| < 1$. У такому випадку будь-яка послідовність (u_n), згідно з теоремою 6 буде нескінченно малою. Звідки $S{=}F$.

Випадок 2: Одне з чисел $|\Phi|$ та $|\Psi|$ менше одиниці. Нехай, наприклад, $|\Psi| < 1$. Позначимо через S підмножину всіх нескінченно малих узагальнених послідовностей Фібоначчі, тобто

$$S = \{(b_n) :\ b_n = pb_{n-1} + sb_{n-2},\ b_n \to 0\ (n \to \infty)\}\,.$$

Оскільки послідовність $(\Psi^n)_{n=0}^{\infty} = (1,\ \Psi,\ \Psi^2,\ \ldots, \Psi^n,\ \ldots) \in S$, то S містить елементи відмінні від нуль-послідовності. Причому, нескладно переконатися, що для елементів простору S будуть виконуватися наступні властивості

(1) для довільних $\left(b_n^{(1)}\right),\ \left(b_n^{(2)}\right) \in S\ \Rightarrow\ \left(b_n^{(1)}\right) + \left(b_n^{(2)}\right) \in S$;

(2) для довільних $(b_n) \in S$ та $\lambda \in \mathbb{R}\ \Rightarrow\ \lambda\,(b_n) \in S$.

Тобто S є одновимірним підпростором лінійного простору F.

Випадок 3: Жодне з чисел $|\Phi|$ та $|\Psi|$ не менше одиниці. У такому випадку будь-яка послідовність з простору F (окрім нуль-послідовності) не буде нескінченно малою, оскільки не виконуватимуться умови теореми 6. Звідки слідує, що $S = \left\{(\,\overrightarrow{0}\,)\right\}$. □

Теорема 8. *Підмножина* F^1 *множини* F *таких узагальнених послідовностей Фібоначчі* (a_n) *для яких ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається, утворює лінійний простір, який співпадає з підпростором нескінченно малих узагальнених послідовностей Фібоначчі* S.

Доведення. Покажемо, що F^1 задовольняє означення підпростору. Нагадаємо, що для двох збіжних рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ та довільних дійсних чисел α та β має місце рівність

$$\alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n {+} \beta b_n). \tag{15}$$

Тоді з рівності (15) випливає, що F^1 є підпростором простору F. □

Література

[1] *Miller M. D.* On generalized Fibonacci numbers // Amer. Math. Monthly, 1971. — **78**. — P. 1108-1109.

[2] *Rachidi M.* Extending generalized Fibonacci sequences and their Binet-type formula // Advances in Difference Equations, 2006. — **2006**, № 5. — P. 1-11. (Article ID 23849)

[3] *Беклемишев Д. В.* Дополнительные главы линейной алгебры. — М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1983. — 336 с.

[4] *Василенко Н.М., Працьовитий М.В.* Математичні структури в просторі послідовностей Фібоначчі // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — **9**. — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2008. — С. 129-150.

[5] *Воеводин В.В.* Линейная алгебра. — М.: Наука, 1980. — 400 с.

[6] *Волков Ю.І., Войналович Н.М.* Елементи дискретної математики: Навчальний посібник. — Кіровоград: РВГ ІЦ КДПУ ім. В.Винниченка, 2000. — 190 с.

[7] *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1969. — 112 с.

[8] *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре: Учебное пособие для студентов вузов; 4-е издание, дополненное. — М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1971. — 271 с.

[9] *Романко В.К.* Разностные уравнения. — М.: БИНОМ, 2006. — 112 с.

[10] *Шилов Г. Е.* Математический анализ (конечномерные линейные пространства). — М.: Наука, 1969. — 432 с.

References

[1] Miller M., *Amer. Math. Monthly*, 1971, 78, pp. 1108-1109.

[2] Rachidi M., *Advances in Difference Equations*, 2006, 5, pp. 1-11. (Article ID 23849)

[3] Beklemyshev D., *Dopolnitel'nye glavy linejnoj algebry (Additional chapters of linear algebra)*, 1983, 336 p.

[4] Vasylenko N., Pratsiovytyi M., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.-Math. Sciences)*, 2008, pp. 129-150.

[5] Voevodin V., *Linejnaja algebra (Linear Algebra)*, 1980, 400 p.

[6] Volkov Yu, Vojnalovich M., *Elementy dyskretnoi' matematyky (Elements of Discrete Mathematics)*, 2000, 190 p.

[7] Vorobev N., *Chisla Fibonachchi (Fibonacci Numbers)*, 1969, 112 p.

[8] Gelfand I., *Lekcii po linejnoj algebre (Linear Algebra in Lectures)*, 1971, 271 p.

[9] Romanko V.,*Raznostnye uravnenija (The difference equations)*, 2006, 112 p.

[10] Shilov G., *Matematicheskij analiz: konechnomernye linejnye prostranstva (Mathematical analysis: finite-dimensional vector space)*, 1969, 432 p.