Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2012, № 13(1).— С. 51–67.

Стабільна диференціальна точка звороту 2-го роду в системі диференціальних рівнянь 4-го порядку

В. М. Бобочко

Карпатський інститут підприємництва

В. О. Болілий

Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка

І. О. Зеленська

Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка

Анотація. Побудовано рівномірну асимптотику розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь 4-го порядку з диференціальною точкою звороту. Розглянуто випадок, коли спектр граничного оператора містить кратні і тотожньо рівні нулю елементи

Ключові слова: диференціальні рівняння, спектр граничного оператора, диференціальна точка звороту

Stable differential turning point of 2-nd order in the system of 4-th order differential equations

V. Bobochko,

Carpathian Institute of Entrepreneurship

V. Boliliy,

V. Vinnichenko Kirovohrad State Pedagogical University

I. Zelenska,

V. Vinnichenko Kirovohrad State Pedagogical University

Abstract. A uniform asymptotic of solution is constructed for a system of singularly perturbed differential equations with a turning point. The paper investigates the case when the spectrum of boundary operator consists of multiple and zero elements

Keywords: differential equations, spectrum of the limit operator, differential turnover point.

AMS Subject Classifications (2010): 35B40.

E-mail: bobochko@kspu.kr.ua, basilb@mail.ru, kopchuk@yandex.ua

1. Вступ

В даній роботі запропоновано метод побудови розв'язку систем сингулярно-збурених диференціальних рівнянь (ССЗДР) з точкою звороту. Основна увага приділяється системі, що відповідає відомому в гідромеханіці рівнянню Орра-Зоммерфельда, яке у простому випадку плоскопаралельної течії є наслідком лінійного рівняння Нав'є-Стокса. З математичної точки зору це рівняння має вигляд:

$$\varepsilon^3 y^{(4)}(x,\varepsilon) + a(x)y^{(2)}(x,\varepsilon) + b(x)y(x,\varepsilon) = h(x).$$

Слід зауважити, що задача такого типу є предметом дослідження багатьох авторів, існує низка робіт опублікованих в літературі з гідродинаміки і з диференціальних рівнянь, пов'язаних з даною проблемою. Особливо, на наш погляд, слід відмітити теоретичні здобутки Р. Лангера [**15**], В. Вазова [**23, 24**], С. Ліна і А. Рабенштейна [**19**], М. Накано і Т. Нішимото [**20, 21, 22**], Л. Ю. Мотильова [**14**], А.М. Самойленко [**9, 10**], М.І. Шкіля [**11**].

Подібно до робіт Лангера, ідея побудови рівномірної асимптотики розв'язку ССЗДР 4-го порядку супроводжується загальною схемою розробленої теорії для систем нижчих порядків. Основна відмінність і особливість даної роботи від попередніх [**1, 2, 3, 4, 7, 8, 6, 5**]:

(1) вироджене рівняння є диференціальним рівнянням 2-го порядку;
(2) точка звороту $x = 0$ знаходиться біля другої похідної;
(3) будується рівномірна асимптотика розв'язку на всьому відрізку, включаючи і точку звороту, для ССЗДР.

2. Постановка задачі

Розглянемо ССЗДР виду:

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon) - A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon) = h(x), \tag{1}$$

де $\varepsilon \to 0$, $x \in [0,l]$, $Y(x,\varepsilon) = colon(y_1(x,\varepsilon), y_2(x,\varepsilon), y_3(x,\varepsilon), y_4(x,\varepsilon))$ - шукана вектор-функція, $h(x) = colon(0,0,0,h(x))$ – задана вектор-функція, а

$$A(x,\varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c(x) & -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix},$$

– відома матриця, елементи якої $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $b(x)$, $c(x)$ – необмежено диференційовні функції на відрізку $[0;l]$. Слід зауважити, що дане векторне рівняння можна поставити у відповідніть скалярному СЗДР вигляду:

$$\varepsilon^2 y^{(4)}(x,\varepsilon) + a(x)y^{(2)}(x,\varepsilon) + b(x)y'(x,\varepsilon) + c(x)y(x,\varepsilon) = h(x).$$

Систему рівнянь (1) будемо досліджувати за умови, що $\widetilde{a}(x) > 0$.

У роботах [**1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 6**] показано, що структура розв'язку скалярного рівняння з диференціальною точкою звороту залежить від знаків коефіцієнтів, що входять до данного рівняння.

Тому накладемо умови і на інші коефіцієнти матриці $A(x,0)$, нехай $\widetilde{b}(x) < 0$, $\widetilde{c}(x) < 0$.

В цьому випадку для побудови одного лінійно незалежного розв'язку ССЗДР (1) можно використати розв'язок виродженого рівняння

$$-A(x,0)Y(x,0) = h(x), \tag{2}$$

де матриця $A(x,0)$ прийме вигляд

$$A(x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c(x) & -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Накладання вище зазначених умов забезпечить стабільність точки звороту. Необхідно зауважити, що у [**1, 13**] було досліджено рівняння Ейрі-Дородніцина вигляду

$$U''(t) + tU(t) = 0 \tag{3}$$

за початкових умов $U_1(0) = U_2'(0) = 1$, $U_1'(0) = U_2(0) = 0$. Як відомо, воно має два обмежені розв'язки при $t \geq 0$. При розв'язуванні векторного рівняння (1) використана модифікація рівняння Ейрі вигляду (3). Функції Ейрі-Дородніцина широко використовуються при дослідженні сингулярних задач [**1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 23, 24, 16**]. Нагадаємо, що в нашому випадку, векторне рівняння (1) досліджується на відрізку $[0;l]$; графічно поведінка функцій Ейрі-Дородніцина, як розв'язків рівняння (3), представлено на Рис. 1.

Аналізуючи графіки функцій, бачимо, що розв'язки рівняння (2) є обмеженими, коли $t \geq 0$. Таку точку звороту $x = 0$ прийнято називати *стабільною точкою звороту*[**1**].

Необхідно зауважити, що в роботі [**5**] досліджено рівняння 4-го порядку в скалярній формі з диференціальною точкою звороту. Автор розглянув відповідне йому вироджене рівняння вигляду

$$-x\tilde{a}(x)\omega''(x) + b(x)\omega'(x) + c(x)\omega(x) = h(x).$$

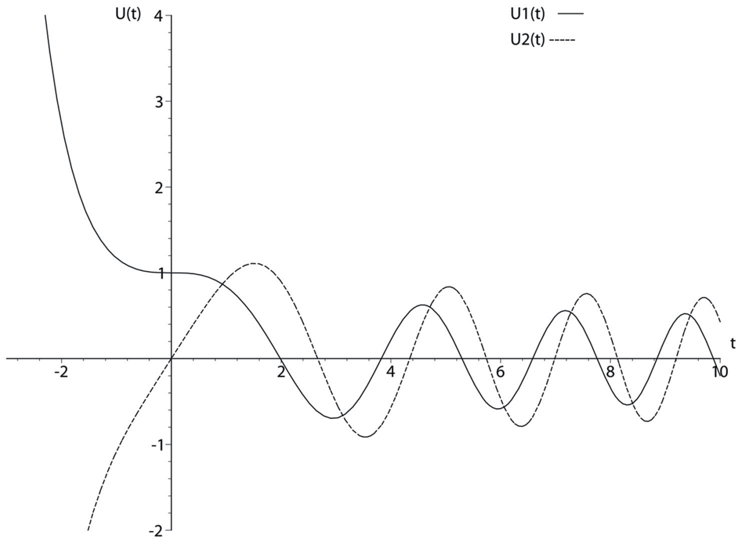

Рис. 1. Графік функцій Ейрі-Дородніцина.

Під час дослідження подібних задач [**15, 4, 7, 8, 14, 2, 6**], для визначення типу точки звороту, принято користуватись зовнішньою ознакою виродженого рівняння. Оскільки точка звороту знаходиться біля похідної другого порядку, то таку точку звороту називають **диференціальною точкою звороту другого роду** [**2, 4, 6**]. Узагальнюючи проведені дослідження скалярного рівняння, можемо означити диференціальну точку звороту для векторного рівняння (1) як:

Означення 1. Якщо у виродженому векторному рівнянні (1) елемент x_{43} матриці $A(x,0)$ розміру 4×4 містить точку звороту $x_{43} = x\tilde{a}(x)$, то така точка звороту називається диференціальною точкою звороту 2-го роду для ССЗДР 4-го порядку.

Необхідно зауважити, що вироджене рівняння не має гладкого розв'язку в околі точки звороту, тому у явному вигляді його розв'язок не можна використати для побудови рівномірної асимптотики розв'язку досліджуваного рівняння.

Характеристичне рівняння, що відповідає заданій задачі (1) має вигляд

$$|A(x,0)-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -c(x) & -b(x) & -a(x) & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(-\lambda^2 + x\tilde{a}(x)) = 0. \qquad (4)$$

Корені характеристичного рівняння (4) представляються

$$\lambda_{1,2} = 0, \qquad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{x\tilde{a}(x)}.$$

Для того, щоб $x = 0$ була класичною точкою звороту для системи (1) необхідно накласти певні умови:

$$\mathrm{trace} A(x,0) \equiv 0, \qquad \det A(0,0) = 0.$$

Задану задачу будемо вивчати виходячи із гіпотези, що після регуляризації векторного рівняння, розширений оператор повинен містити вище згаданий модельний оператор функцій Ейрі (3).

3. Регуляризація системи сингулярно збурених рівнянь

З метою вивчення сингулярної залежності від ε заданої системи і виділення всіх істотно особливих функцій (ІОФ), що виникають у розв'язку системи(1) за рахунок особливої точки $\varepsilon = 0$, введемо регуляризуючу змінну $t = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi(x)$, де показник p і регуляризуюча функція $\varphi(x)$ підлягають визначенню. Згідно з методом регуляризації істотньо-особливих функцій, задачу будемо вивчати за умови

$$\tilde{y}(y,t,\varepsilon)|_{t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x)} \equiv y(x,\varepsilon).$$

Для побудови розширеного рівняння, підставимо розширену функцію і її похідну у векторне рівняння (1)

$$\widetilde{L}_\varepsilon \tilde{y}(x,t,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{1-p}\varphi' \frac{\partial \tilde{y}(x,t,\varepsilon)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{y}(x,t,\varepsilon)}{\partial x} - A(x,\varepsilon)\tilde{y}(x,t,\varepsilon) = h(x). \qquad (5)$$

3.1. Простір безрезонансних розв'язків. Асимптотику розв'язку розширеного рівняння (5) шукаємо у вигляді

$$\tilde{y}(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{2} D_k(x,t,\varepsilon) + f(x,\varepsilon)\psi(t) + \varepsilon^\gamma g(x,\varepsilon)\psi'(t) + \omega(x,\varepsilon). \qquad (6)$$

Множина $D_k(x,t,\varepsilon)$ складається з прямої суми елементів $\alpha_j(x,\varepsilon)U_k(t)$ та $\varepsilon^\gamma\beta_j(x,\varepsilon)U_k'(t)$, $k = 1; 2$, $j = \overline{1;4}$, які є розв'язками однорідного векторного рівняння

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon) - A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon) = 0. \qquad (7)$$

Аналітичні функції $\alpha(x,\varepsilon)$ і $\beta(x,\varepsilon)$ залежать від малого параметру $\varepsilon > 0$ і є нескінченно диференційовними за змінною $x \in [0;l]$. Функції U_k є функціями Ейрі-Дородніцина. Функції $\psi(t)$, її похідна та функція $\omega(x,\varepsilon)$ відповідають за частинний розв'язок неоднорідної системи (2).

Істотньо особлива функція $\psi(t)$ є частинним розв'язком неоднорідного рівняння

$$U''(t) + tU(t) = 1,$$

тобто

$$\psi(t) = \int_{+\infty}^{t} [U_2(t) \cdot U_1(\tau) - U_1(t) \cdot U_2(\tau)]d\tau,$$

якщо попередньо задані такі початкові умови **[17, 18]**:

$$\psi(0) = 3^{-\frac{2}{3}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \qquad \psi'(0) = -3^{-\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

Як показали дослідження **[1]** для побудови рівномірно придатного розв'язку неоднорідної задачі з точкою звороту необхідно використати також і похідну функції $\psi(t)$

$$\psi'(t) = U_2'(t)\int_{+\infty}^{t} U_1(\tau)d\tau - U_1'(t)\int_{+\infty}^{t} U_2(\tau)d\tau.$$

3.2. Регуляризація ССЗДР. Для того, щоб визначити регуляризуючу змінну t необхідно знайти показник p і функцію $\varphi(x)$. Тому згідно розробленого методу, засобами якого знаходимо асимптотику, необхідно спочатку вивчити дію оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ на вектор-функцію $D_k(x,t,\varepsilon)$ і підставити результат цієї дії в однорідне розширене векторе рівняння, тоді

$$\tilde{L}_\varepsilon(\alpha_k(x,\varepsilon)U_k(t) + \varepsilon^\gamma\beta_k(x,\varepsilon)U_k'(t)) = \varepsilon^{1-p}\alpha_k(x,\varepsilon)\varphi'(x)U_k'(t) -$$
$$-\varepsilon^{1+\gamma-2p}\beta_k(x,\varepsilon)\varphi'(x)\varphi(x)U_k(t) - A(x,\varepsilon)\alpha_k(x,\varepsilon)U_k(t) -$$
$$-\varepsilon^\gamma A(x,\varepsilon)\beta_k(x,\varepsilon)U_k'(t) + \varepsilon\alpha_k'(x)U_k(t) + \varepsilon^{1+\gamma}\beta_k'(x)U_k'(t) = 0.$$

Біля ІОФ $U_k(t)$, $k = 1,2$ та їх похідних зрівняємо коефіцієнти, в результаті одержимо векторні рівняння:

$$U_k'(t) : \varepsilon^{1-p}\alpha_k(x,\varepsilon)\varphi'(x) - \varepsilon^\gamma[A_0(x) + \varepsilon A_1]\beta_k(x,\varepsilon) = -\varepsilon^{1+\gamma}\beta_k'(x,\varepsilon),$$
$$U_k(t) : \varepsilon^{1+\gamma-2p}\beta_k(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) - [A_0(x) + \varepsilon A_1]\alpha_k(x,\varepsilon) = -\varepsilon\alpha_k'(x,\varepsilon).$$

Для того, щоб позбутися малого параметра $\varepsilon > 0$ в лівій частині векторних рівнянь, накладемо на показники степеня такі умови:

$$1 - p = \gamma \qquad \text{і} \qquad 1 + \gamma - 2p = 0.$$

Тоді з одержаних рівнянь однозначно визначимо:

$$p = \frac{2}{3} \qquad \text{і} \qquad \gamma = \frac{1}{3}.$$

Оскільки після такого визначення показники степеня ε однакові, то можемо провести скороченння малого параметра за цими степенями. В результаті будемо мати

$$U_k'(t) : \alpha_k(x,\varepsilon)\varphi'(x) - A_0(x)\beta_k(x,\varepsilon) = -\mu^3\beta_k'(x,\varepsilon) + \mu^3 A_1\beta_k(x,\varepsilon), \tag{8}$$

$$U_k(t) : \beta_k(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) + A_0(x)\alpha_k(x,\varepsilon) = \mu^3\alpha_k'(x,\varepsilon) - \mu^3 A_1\alpha_k(x,\varepsilon), \tag{9}$$

де $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{3}}$.

З (8) та (9) випливає, що

$$\begin{cases} \alpha_{k1}(x,\varepsilon)\varphi'(x) = \mu^3[\beta_{k2}(x,\varepsilon) - \beta_{k1}'(x,\varepsilon)], \\ \alpha_{k2}(x,\varepsilon)\varphi'(x) = \mu^3[\beta_{k3}(x,\varepsilon) - \beta_{k2}'(x,\varepsilon)], \\ \alpha_{k3}(x,\varepsilon)\varphi'(x) - \beta_{k4}(x,\varepsilon) = -\mu^3\beta_{k3}'(x,\varepsilon), \\ \alpha_{k4}(x,\varepsilon)\varphi'(x) + c(x)\beta_{k1}(x,\varepsilon) + b(x)\beta_{k2}(x,\varepsilon) + a(x)\beta_{k3}(x,\varepsilon) = -\mu^3\beta_{k4}'(x,\varepsilon), \\ \beta_{k1}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) = \mu^3[\alpha_{k1}'(x,\varepsilon) - \alpha_{k2}(x,\varepsilon)], \\ \beta_{k2}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) = \mu^3[\alpha_{k2}'(x,\varepsilon) - \alpha_{k3}(x,\varepsilon)], \\ \beta_{k3}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) + \alpha_{k4}(x,\varepsilon) = \mu^3\alpha_{k3}'(x,\varepsilon), \\ \beta_{k4}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) - c(x)\alpha_{k1}(x,\varepsilon) - b(x)\alpha_{k2}(x,\varepsilon) - a(x)\alpha_{k3}(x,\varepsilon) = \mu^3\alpha_{k4}'(x,\varepsilon). \end{cases} \tag{10}$$

Очевидно, що (10) регулярно збурені відносно малого параметра системи алгебраїчних рівнянь.

4. Формалізм побудови однорідної розширеної системи

Оскільки розширений оператор (5) регулярно збурений за малим параметром, то розв'язок системи (10) шукаємо у вигляді наступних рядів вектор-функцій ($k = 1; 2$):

$$\alpha_k(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \alpha_{kr}(x), \qquad \beta_k(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \beta_{kr}(x). \tag{11}$$

Для визначення компонент вектор-функцій $\alpha_{kr} = colon(\alpha_{k1r}(x), \alpha_{k2r}(x), \alpha_{k3r}(x), \alpha_{k4r}(x))$ та $\beta_{kr}(x) = colon(\beta_{k1r}(x), \beta_{k2r}(x), \beta_{k3r}(x), \beta_{k4r}(x))$ отримаємо наступні рекурентні системи рівнянь:

$$\Phi(x)Z_{kr}(x) = 0, \qquad r = \overline{0;2}, \qquad \Phi(x)Z_{kr}(x) = FZ_{k(r-3)}(x), \qquad r \geq 3. \tag{12}$$

Тут $Z_{kr}(x) = colon(\alpha_{k1r}(x), \alpha_{k2r}(x), \alpha_{k3r}(x), \alpha_{k4r}(x), \beta_{k1r}(x), \beta_{k2r}(x), \beta_{k3r}(x), \beta_{k4r}(x))$, а

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi'(x) & c(x) & b(x) & x\tilde{a}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 \\ -c(x) & -b(x) & -x\tilde{a}(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$FZ_{k(r-3)} =$$
$$= colon\begin{pmatrix} (\beta_{k2(r-3)}(x) - \beta'_{k1(r-3)}(x)), (\beta_{k3(r-3)}(x) - \beta'_{k2(r-3)}(x)), -\beta'_{k3(r-3)}(x), -\beta'_{k4(r-3)}(x), \\ (\alpha_{k2(r-3)}(x) - \alpha'_{k1(r-3)}(x)), (\alpha_{k3(r-3)}(x) - \alpha'_{k2(r-3)}(x)), -\alpha'_{k3(r-3)}(x), -\alpha'_{k4(r-3)}(x) \end{pmatrix}.$$

З метою визначення регуляризуючої функції $\varphi(x)$, обчислимо визначник цієї системи

$$\det\Phi(x) = \varphi'^2[\varphi(x)\varphi_2'(x)]^2 \cdot [\varphi(x)\varphi'^2(x) - a(x)]^2 = 0.$$

$$\varphi(x)\varphi'^2(x) = a(x) \equiv x\tilde{a}, \qquad \varphi(0) = 0. \tag{14}$$

Розв'язком задачі (13) буде функція виду

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{x\widetilde{a}(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Оскільки $\det\Phi(x) \equiv 0$, то існує нетривіальний розв'язок однорідної системи рівнянь $\Phi(x)Z_{kr} = 0$, при $r = \overline{0,2}$ вигляду

$$Z_{kr}(x) = colon\left(0, 0, \frac{1}{\varphi'(x)}\beta_{k4r}(x), -\varphi\varphi'(x)\beta_{k3r}(x), 0, 0, \beta_{k3r}(x), \beta_{k4r}(x)\right), \tag{15}$$

де $\beta_{0ik}(x)$, $k = 1; 2$, $i = \overline{1;4}$ – до певного часу довільні, досить гладкі функції при $x \in [0; l]$.

Займемось розв'язуванням неоднорідних систем (12). Спочатку розглянемо ці системи, коли $r = 3$. Врахувавши одержаний розв'язок (15), будемо мати

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{k13}(x) = \beta_{k20}(x) - \beta'_{k10}(x) \equiv \beta_{k20}(x) \equiv 0, \\ \varphi'(x)\alpha_{k23}(x) = \beta_{k30}(x) - \beta'_{k20}(x) \equiv \beta_{k30}(x), \\ \varphi'(x)\alpha_{k33}(x) - \beta_{k43}(x) = -\beta'_{k30}(x), \\ \varphi'(x)\alpha_{k43}(x) + (x)\beta_{k13}(x) + b(x)\beta_{k23}(x) + a(x)\beta_{k33}(x) = -\beta'_{k40}(x). \end{cases} \tag{16}$$

та

$$\begin{cases} \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k13}(x) = \alpha'_{k10}(x) - \alpha_{k20}(x) \equiv -\alpha_{k20}(x) \equiv 0, \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k23}(x) = \alpha'_{k20}(x) - \alpha_{k30}(x) \equiv -\alpha_{k30}(x) \equiv -[\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k40}(x), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33}(x) + \alpha_{k43}(x) = \alpha'_{k30}(x) \equiv \frac{d}{dx}([\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k40}(x)), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k43}(x) - c(x)\alpha_{k13}(x) - b(x)\alpha_{k23}(x) - a(x)\alpha_{k33}(x) = \alpha'_{k40}) \equiv (-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k30})'. \end{cases} \tag{17}$$

З першого і другого рівнянь систем (16) і (17) визначимо функції $\alpha_{k13} \equiv 0$, $\beta_{k13} \equiv 0$ та $\alpha_{k23}(x) = [\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k30}(x)$ та $\beta_{k23}(x) = -[\varphi'(x)]^{-2}[\varphi(x)]^{-1}\beta_{k40}(x)$. Тоді системи (16) і (17) набудуть вигляду

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{k33}(x) - \beta_{k43}(x) = -\beta'_{k30}(x), \\ -a(x)\alpha_{k33}(x) + \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k43}(x) = \frac{d}{dx}(-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k30}(x)) + b(x)[\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k30}, \end{cases} \tag{18}$$

та

$$\begin{cases} \alpha_{k43}(x) + \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33}(x) = \alpha'_{k30}(x) \equiv \frac{d}{dx}([\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k40}(x)), \\ \varphi'(x)\alpha_{k43}(x) + a(x)\beta_{k33}(x) = -\beta'_{k40}(x) + b(x)[\varphi(x)\varphi'^2(x)]^{-1}\beta_{k40}(x). \end{cases} \tag{19}$$

Оскільки регуляризуюча функція $\varphi(x)$ визначена як розв'язок задачі (14), то визначники цих систем однакові і тотожно рівні нулеві, тобто $\Delta(x) = [\varphi'(x)]^2\varphi(x) - a(x) \equiv 0$. Тоді умови сумісності систем (18) і (19) еквівалентні умовам: $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$.

Розглянемо систему (18), для якої

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\beta_{k30}(x) & -1 \\ (-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k30}(x))' + b(x)\alpha_{k23}(x) & \varphi(x)\varphi'(x) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \varphi'(x) & -\beta_{k30}(x) \\ -a(x) & (-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k30}(x))' + b(x)\alpha_{k23}(x) \end{vmatrix}.$$

Обчисливши обидва визначника, одержимо однакові диференціальні рівняння виду:

$$-2a(x)\beta_{k30}(x) + \varphi'(x)(-\varphi(x)\varphi'(x))'\beta_{k30}(x) + b(x)\beta_{k30}(x) = 0.$$

Аналогічним чином розглянемо систему (19). В результаті будемо мати:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\beta'_{k40}(x) + b(x)\frac{\beta_{k40}(x)}{\varphi(x)\varphi'^2(x)} & a(x) \\ (\frac{\beta_{k40}(x)}{\varphi'(x)})' & \varphi(x)\varphi'(x) \end{vmatrix}. \tag{20}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \varphi'(x) & -\beta'_{k40}(x) + b(x)\frac{\beta_{k40}(x)}{\varphi(x)\varphi'^2(x)} \\ 1 & (\frac{\beta_{k40}(x)}{\varphi'(x)})' \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Результатом обчислення визначників (20) і (21) також буде диференціальне рівняння вигляду:

$$-2a(x)\beta'_{k40}(x)+\varphi(x)(\varphi(x)\varphi'(x))'\beta_{k40}(x)+b(x)\beta_{k40}(x)=0.$$

Легко бачити, що на даному етапі розв'язки системи визначаються з точністю до двох довільних сталих множників β_0^{ki0}, $i=3,4$ при $k=1,2$ можемо записати вектор-функції $Z_{k0}(x)$. Тоді існують розв'язки неоднорідних систем алгебраїчних рівнянь (18) і (19) вигляду:

$$Z_{k3}(x)=\left(\begin{array}{l} 0;[\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k30}(x);\frac{\beta_{k43}(x)-\beta'_{k30}(x)}{\varphi'(x)};(\frac{\beta_{k40}(x)}{\varphi'(x)})'-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33};\\ 0;-\beta_{k40}(x)[\varphi(x)\varphi'^2(x)];\beta_{k33}(x);\beta_{k43}(x)\end{array}\right),$$

де $\beta_{k33}(x)$ та $\beta_{k43}(x)$, як і в (15), до певного часу довільні, достатньо гладкі функції для всіх $x\in[0;l]$. Продовжуючи далі розв'язувати ітераційні системи алгебраїчних рівнянь (18) і (19) при $r\geq 3$ можна показати, що ці системи алгебраїчних рівнянь асимптотично коректні в такому смислі. Якщо вимагати існування розв'язків систем рівнянь (18) і (19) при $r=\overline{0;q}$, то кожна з цих систем при $k=1,2$ визначається з точністю до двох довільних скалярних множників β^0_{k3r}і β^0_{k4r}, які утворюють довільний вектор $\beta^0_{kr}=colon(\beta^0_{k1r},\beta^0_{k2r},\beta^0_{k3r},\beta^0_{k4r})$.

Зауваження 1. *Розв'язуючи поступово системи рівнянь (18) і (19), отримаємо формальні розв'язки однорідного розширеного векторного рівняння (11) вигляду*

$$D_k(x,t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r[\alpha_{kr}(x)U_k(t)+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_k(x,\varepsilon)U'_k(t)]\qquad k=1;2,\tag{22}$$

де

$$\alpha_{kr}=colon(\alpha_{k1r}(x),\alpha_{k2r}(x),\alpha_{k3r}(x),\alpha_{k4r}(x)),$$
$$\beta_{kr}(x)=colon(\beta_{k1r}(x),\beta_{k2r}(x),\beta_{k3r}(x),\beta_{k4r}(x))$$

– відомі вектор-функції.

Проведемо звуження в отриманих формальних розв'язках (22) при $t=\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)$. Тоді отримаємо два формальні розв'язки досліджуваного однорідного векторного рівняння вигляду ($k=1;2$):

$$D_k(x,\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x),\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r[\alpha_{kr}(x)U_k(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_k(x,\varepsilon)U'_k(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))].$$

5. Побудова формальних частинних розв'язків неоднорідної розширеної системи

Для того, щоб одержати частинний розв'язок неоднорідної системи СЗДР подіємо розширеним опреатором на функцію $f(x,\varepsilon)\psi(t)+\varepsilon^{\gamma}g(x,\varepsilon)\psi'(t)+\omega(x,\varepsilon)$. Результатом дії будуть наступні векторні рівняння:

$$\psi'(t) : \varphi'(x)f(x,\varepsilon) - [A_0(x)+\mu^3 A_1]g(x,\varepsilon) = -\mu^3 g'(x,\varepsilon), \tag{23}$$

$$\psi(t) : \varphi(x)\varphi'(x)g(x,\varepsilon) + [A_0(x)+\mu^3 A_1]f(x,\varepsilon) = -\mu^3 f'(x,\varepsilon), \tag{24}$$

$$\mu^3\omega'(x,\varepsilon) - [A_0(x)+\mu^3 A_1]\omega(x,\varepsilon) + \mu^2\varphi'(x)g(x,\varepsilon) = h(x). \tag{25}$$

Розглянемо векторні рівняння (23) і (24). За структурою вони схожі на (14) і (15), але використати результати попереднього розділу і одразу записати розв'язки системи ми не можемо, оскільки необхідно врахувати і (25). Для забезпечення гладкого розв'язку системи (1), асимптотику розв'язку будуємо у вигляді рядів:

$$f(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r f_r(x), \qquad g(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r g_r(x), \qquad \omega(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r \omega_r(x). \tag{26}$$

Компоненти вектор-функцій

$$f_r = colon(f_{1r}(x), f_{2r}(x), f_{3r}(x), f_{4r}(x)),$$

$$g_r(x) = colon(g_{1r}(x), g_{2r}(x), g_{3r}(x), g_{4r}(x))$$

будемо визначати з наступних рекурентних систем рівнянь:

$$\Phi(x)Z_0(x) = 0, \qquad r = 0;1;2, \qquad \Phi(x)Z_r(x) = -Z_{(r-3)}(x), \qquad r \geq 1.$$

$$Z_r(x) = colon(f_{1r}(x), f_{2r}(x), f_{3r}(x), f_{4r}(x), g_{1r}(x), g_{2r}(x), g_{3r}(x), g_{4r}(x)).$$

Оскільки $\det\Phi(x) \equiv 0$, то за аналогією з попереднім (13) отримаємо нетривіальний розв'язок однорідної системи (26) вигляду

$$Z_{kr}(x) = colon\left(0, 0, \frac{1}{\varphi'(x)}g_{3r}(x), -\varphi\varphi'(x)g_{4r}(x), 0, 0, g_{3r}(x), g_{4r}(x)\right),$$

де $g_{0i}(x), i = \overline{1;4}$ – до певного часу довільні, досить гладкі функції при $x \in [0;l]$. Знову, за аналогією з попереднім, отримаємо такі дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi'(x)f_{33}(x) - g_{43}(x) = -g'_{30}(x), \\ -a(x)f_{33}(x) + \varphi(x)\varphi'(x)g_{43}(x) = \frac{d}{dx}(-\varphi(x)\varphi'(x)g_{30}(x)) + b(x)[\varphi'(x)]^{-1}g_{30}, \end{cases} \tag{27}$$

та

$$\begin{cases} f_{43}(x) + \varphi(x)\varphi'(x)g_{33}(x) = f'_{30}(x) \equiv \frac{d}{dx}([\varphi'(x)]^{-1}g_{40}(x)), \\ \varphi'(x)f_{43}(x) + a(x)g_{k33}(x) = -g'_{40}(x) + b(x)[\varphi(x)\varphi'^2(x)]^{-1}g_{40}(x). \end{cases} \tag{28}$$

Бачимо, що для визначення коефіцієнтів систем (27) і (28) маємо повну аналогію з визначенням коефіцієнтів систем (18) та (19). Тому, щоб не повторюватися, зробимо наступний аналогічний висновок. Продовжуючи далі розв'язувати ітераційні системи алгебраїчних рівнянь (27) і (28) при $r \geq 3$, можна показати, що ці системи рівнянь асимптотично коректні в такому розумінні. Якщо вимагати існування розв'язків систем рівнянь (27) і (28) при $r = \overline{0;q}$, то кожна з цих систем при $r = \overline{0;q-1}$, визначається з точністю до двох довільних сталих $g^0_{3r}(x)$ та $g^0_{4r}(x)$, які утворюють довільний вектор $g^0_r(x) = colon(0, 0, g^0_{3r}(x), g^0_{4r}(x))$.

Третій формальний розв'язок векторного рівняння (5) одержимо з рівняння (25) у вигляді ряду:

$$\omega(x,\varepsilon) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_r(x) \equiv colon\left(\sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{1r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{2r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{3r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{4r}(x)\right). \tag{29}$$

Підставивши (29) в рівняння (25) отримаємо наступну рекурентну систему векторних рівнянь:

$$\begin{array}{l} -A_0(x)\omega_0(x) = h(x), \qquad -A_0(x)\omega_1(x) = 0, \qquad r = 1, \\ -A_0(x)\omega_2(x) = -\varphi'(x)g_0(x) \qquad r = 2, \qquad\qquad\qquad . \\ -A_1\omega_0(x) - A_0(x)\omega_r(x) = -\varphi'(x)g_{r-2}(x) - \omega'_{r-3}(x). \end{array} \tag{30}$$

Розглянемо рівняння (30) при $r = 0$. Для цього розпишемо праву частину у скалярній формі. Будемо мати:

$$\begin{cases} \omega_{40}(x) = 0, \\ c(x)\omega_{10}(x) + b(x)\omega_{20}(x) + a(x)\omega_{30}(x) = h(x). \end{cases} \tag{31}$$

Виберемо довільні функції $\omega_{20}(x)$ і $\omega_{30}(x)$ таким чином, щоб існували достатньо гладкі розв'язки системи (31):

$$\omega_0 = \left(\frac{h(x) - b(x)\omega_{20}(x) - a(x)\omega_{30}(x)}{c(x)}; \omega_{20}(x); \omega_{30}(x); 0\right).$$

Дослідимо систему (31) при $r = 1$.

$$\begin{cases} \omega_{41}(x) = 0, \\ c(x)\omega_{11}(x) + b(x)\omega_{21}(x) + a(x)\omega_{31}(x) = 0, \end{cases}$$

$$\omega_1 = \left(\frac{-b(x)\omega_{21}(x) - a(x)\omega_{31}(x)}{c(x)}; \omega_{21}(x); \omega_{31}(x); 0\right).$$

Дослідимо систему (31) при $r = 2$.

$$\begin{cases} \varphi'(x)g_{10}(x) = 0, \\ \varphi'(x)g_{20}(x) = 0, \\ \omega_{41}(x) + \varphi'(x)g_{30}(x) = 0, \\ c(x)\omega_{11}(x) + b(x)\omega_{21}(x) + a(x)\omega_{31}(x) = 0, \end{cases}$$

$$\omega_2 = \left(\frac{-b(x)\omega_{22}(x) - a(x)\omega_{32}(x)}{c(x)}; \omega_{22}(x); \omega_{32}(x); -\varphi'(x)g_{30}(x) \right)$$

На наступному кроці при $r \geq 3$ однозначно визначимо функції $\omega_{20}(x)$ і $\omega_{30}(x)$, тобто кожна з функцій ω_0 визначена з точністю до двох довільних сталих ω_{20}^0 і ω_{30}^0.

Звуження цього розв'язку при $t = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)$, тобто ряд

$$\widetilde{y}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[\sum_{k=1}^{2} \left[\alpha_{kr}(x) U_k(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{kr}(x) \frac{dU_k(-\varepsilon^{\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))} \right] \right] +$$

$$+ \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[f_r(x) \psi(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} g_r(x) \frac{d\psi(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))} \right] + \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_r(x) \qquad (32)$$

є формальним розв'язком ССЗДР (1).

6. Оцінка залишкових членів асимптотики розв'язку

Для того, щоб стверджувати про асимптотичний характер побудованого розв'язку (32) необхідно дати оцінку залишкових членів цих розв'язків. Оскільки ІОФ входять в цей розв'язок як множники, то з метою одержання відповідних оцінок розв'язків достатньо оцінити залишкові члени формальних рядів (11), (25), (28). Формальні ряди (11) запишемо у такому вигляді:

$$\alpha_k(x,\varepsilon) \equiv \alpha_{kr}(x,\varepsilon) + \varepsilon^{q+1} \xi_{\alpha(q+1)}(x,\varepsilon), \qquad \beta_k(x,\varepsilon) \equiv \beta_{kr}(x,\varepsilon) + \varepsilon^{q+1} \xi_{\beta(q+1)}(x,\varepsilon),$$

де $\alpha_{kq}(x,\varepsilon)$ та $\beta_{kq}(x,\varepsilon)$ – частинні q-суми рядів (11), а $\varepsilon^{1+q}\xi_{\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)$ та $\varepsilon^{1+q}\xi_{\beta(q+1)}(x,\varepsilon)$ – залишкові члени рядів. Підставимо ці ряди у векторні рівняння (7). Зауважимо, що коефіцієнти $\alpha_{kq}(x,\varepsilon)$ і $\beta_{kq}(x,\varepsilon)$ є розв'язками систем (16) та (17), тобто кожна з цих функцій при $r = \overline{0; q-1}$, визначається з точністю до двох довільних скалярних множників β_{ikr}^0, які утворюють довільний вектор $\beta_{kr}^0 = colon(\beta_{1kr}^0, \beta_{2kr}^0)$. Для визначення залишкових членів одержимо наступну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \xi_{\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)\varphi'(x) - A(x,\varepsilon)\xi_{\beta(q+1)}(x,\varepsilon) + \mu^3 \xi_{\beta(q+1)}(x,\varepsilon) + \beta'_{kq} = 0, \\ \xi_{\beta(q+1)}(x,\varepsilon)\varphi'(x) - A(x,\varepsilon)\xi_{\alpha(q+1)}(x,\varepsilon) + \mu^3 \xi_{\alpha(q+1)}(x,\varepsilon) + \alpha'_{kq} = 0. \end{cases} \qquad (33)$$

Система (33) за структурою схожа до векторних рівнянь (16) і (17). Для визначення координат невідомих вектор-функцій

$$\xi_{\alpha(q+1)}(x,\varepsilon) = (\xi_{1\alpha(q+1)}(x,\varepsilon); \xi_{2\alpha(q+1)}(x,\varepsilon); \xi_{3\alpha(q+1)}(x,\varepsilon); \xi_{4\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)),$$

$$\xi_{\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)=(\xi_{1\beta(q+1)}(x,\varepsilon);\xi_{2\beta(q+1)}(x,\varepsilon);\xi_{3\beta(q+1)}(x,\varepsilon);\xi_{4\beta(q+1)}(x,\varepsilon)),$$

систему (33) після перетворень, розіб'ємо на дві, незалежних одна від одної:

$$\begin{cases} \mu^3\xi_{3\beta(q+1)}(x,\varepsilon)+\xi_{3\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)\varphi'(x)+\xi_{4\beta(q+1)}(x,\varepsilon)=-\beta'_{4kq}(x),\\ \mu^3\xi_{4\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)+a(x)\xi_{3\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)+\xi_{4\beta(q+1)}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)=\\ \qquad =-\alpha'_{4kq}(x)-b(x)\xi_{1\alpha(q+1)}(x,\varepsilon). \end{cases} \tag{34}$$

і

$$\begin{cases} \mu^3\xi_{3\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)\varphi'(x)-\xi_{3\beta(q+1)}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)+\xi_{4\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)=-\alpha'_{3kq}(x),\\ \mu^3\xi_{4\beta(q+1)}(x,\varepsilon)+a(x)\xi_{3\beta(q+1)}(x,\varepsilon)+\xi_{4\alpha(q+1)}(x,\varepsilon)\varphi'(x)=\\ \qquad =-\beta'_{4kq}(x)-b(x)\xi_{1\beta(q+1)}(x,\varepsilon). \end{cases} \tag{35}$$

Розв'язки систем (16)і (17) побудовані у вигляді рядів відносно малого параметра (11). Системи (34) і (35) розв'язувати не потрібно, а тільки достатньо оцінити їх розв'язки. Легко перевірити, що характеристичні рівняння цих систем мають вигляд

$$\lambda[\lambda-\varphi'(x)(\varphi(x)\varphi'(x)+1)]=0,$$

тобто

$$\lambda_1(x)\equiv 0,\qquad \lambda_2(x)=\varphi'(x)[\varphi(x)\varphi'(x)+1].$$

Системи рівнянь (34)і (35) мають стабільний спектр і не містять точки звороту. Оскільки (34) і (35) є регулярно збуреними відносно $\varepsilon>0$ у просторі (8) та (9), то розв'язки цих рівнянь можна будувати у вигляді степеневих рядів по малому параметру $\varepsilon>0$. Отже, можемо застосувати класичну теорію для оцінки залишкових членів цих систем ([**15, 1, 2, 3**]). Спочатку зробимо це для формальних рядів (11)

$$\begin{aligned} &\|\xi_{\alpha k(q+1)}(x,\varepsilon)\|\le K_{(q+1)},\\ &\|\xi_{\beta k(q+1)}(x,\varepsilon)\|\le K_{(q+1)},\, q>0, \end{aligned} \tag{36}$$

де стала K_{q+1} не залежить від $x\in[0;l]$ і малого параметра $\varepsilon>0$. Зауважимо, що розв'язок розширеного рівняння будується з використанням функції $Bi(t)$, це означає що отримані оцінки носят асимптотичний характер. Враховуючи властивості ІОФ $\psi(t)$ на відрізку $x\in[0;l]$, аналогічно для формальних рядів (25) і (28) одержимо наступні оцінки.

$$\begin{aligned} &\|\xi_{f(q+1)}(x,\varepsilon)\|\le K_{(q+1)},\\ &\|\xi_{g(q+1)}(x,\varepsilon)\|\le K_{(q+1)},\\ &\|\xi_{\omega(q+1)}(x,\varepsilon)\|\le K_{(q+1)}q>0. \end{aligned} \tag{37}$$

Врахувавши одержані оцінки (36)і (37), асимптотику загального розв'язку системи (1) можемо записати у вигляді ряду:

$$\widetilde{y}(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{2}\left\{\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^r\alpha_{kr}(x)+O(\varepsilon^{q+1})\right]U_k(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))+\right.$$

$$+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^r\beta_{kr}(x)+O(\varepsilon^{q+1})\right]\frac{dU_k(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}\Bigg\}+$$

$$+\left[\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r f_r(x)+O(\varepsilon^{q+1})\right]\psi(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left[\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r g_r(x)+O(\varepsilon^{q+1})\right]\frac{d\psi(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}+$$

$$+\sum_{r=0}^{+\infty}\varepsilon^r\omega_r(x)+O(\varepsilon^{q+1}).$$

Одержане сформулюємо у вигляді теореми.

Нехай: 1) $a(x)\equiv x\tilde{a}(x), b(x), H(x)\in C^{\infty}[0;l]$; 2) виконуються умови $\widetilde{a}(x)>0$. Тоді на відрізку $[0;l]$ можна побудувати загальний розв'язок ССЗДР (1) у вигляді асимптотичного ряду (6), коефіцієнти якого є досить гладкі функції на відрізку $[0;l]$.

Література

[1] *Бобочко В.М., Перестюк М.О.* Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту. – Київ: Наукова думка. 2002. – 310 с.

[2] *Бобочко В.Н.* Дифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений. I. // Изв. Вузов. Математика. – 2002. – № 3. С. 3-14.

[3] *Бобочко В.Н.* Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с точкой поворота.II//Изв.вузов.Математика – 2002. – № 5. С. 3-14.

[4] *Бобочко В.Н.* Уравнение Орра-Зоммерфельда с дифференциальной точкой поворота первого порядка // Дифференциальные уравнения. – 2003.-Т.39 – № 7. С. 171-179.

[5] *Бобочко В.Н., Коломиец В.Г.* Асимптотическое интегрирование уравнения типа Орра-Зоммерфельда // Киев, 1990. - 44 с. (Препринт: 90.45).

[6] *Бобочко В.М., Зеленська І.О.* Система диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. Київ, 2007. Вип. 8. – С. 40-47.

[7] *Болілий В.О.* Внутрішня точка звороту в диференціальному рівнянні третього порядку // Мат. Методи та фіз.- мех. поля. – 2000.Т. 43 – № 3. С. 44–50.

[8] *Болілий В.О., Костигін С.С.* Рівняння Орра-Зомерфельда з нестабільною псевдодиференціальною точкою звороту // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. Київ, 2007. – Вип. 8. – С. 59-65.

[9] *Самойленко А.М.* Об асимптотическом интегрировании системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных. // Укр. Мат. журн. – 2002. – Т. 54 № 11. – С. 1505–1516.

[10] *Самойленко А.М., Ключник І.Г.* Про асимптотичне інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних // Нелінійні коливання. – 2009. – Т.12 – № 2. С. 208-234.

[11] *Шкіль М.І.* Асимптотичне інтергування систем лінійних диференціальних рівнянь при наявності точок повороту. // Доп. АН України. – 1998. – № 8. – С. 46–50.

[12] *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.

[13] *Дородницын А.А.* Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // УМН. – 1952. – Т. 27, вып. 6(52). – С. 3–96.

[14] *Мотылёв Л.Ю.* Асимптотические решения уравнения Орра-Зоммерфельда с точкой поворота высокого порядка // Журнал выч. мат. и мат. физики – 1986. - Т. 26 – № 11. С. 1627-1634.

[15] *Rudolf E.Langer* Formal solutions and related equation for a class of fourth order differential equations of a hydrodynamic type // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. V. 92, № 3. C. 371–410.

[16] *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.

[17] *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. V. 226. – P. 227–241.

[18] *М. Абрамовиц и И.Стиган* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.-832 с.

[19] *C.C.Lin and A.L.Rabenstein* On an asymptotic solutions of a class of ordinary differential equations of the forth order. // Trans. Амер. Математика . Soc –1960. V. 94,– P.24-57.

[20] *Minoru Nakano and Toshihiko Nishimoto.* On an asymptotic expansion of solutions of ORR-sommerfeld type equation. // Lecture Notes in Mathematics – 1971. – V. 243 – P. 315–319.

[21] *Toshihiko Nishimoto.* On the Orr-Zommerfeld type equations, I; W.K.B. approximation // KODAI Math. Sem. Rep. – 1972. – № 24. C. 281-307.

[22] *Toshihiko Nishimoto.* On the Orr-Zommerfeld type equations, II; connection formulas // KODAI Math. Sem. Rep. – 1978. – № 29. C. 233-249.

[23] *Wasow W.* Linear turning point theory. – Springer-Verlaq New York Ins., 1985. – 243 p.

[24] *Wasow W.* A study of the solutions of the differential equation $y^4 + \lambda^2(xy'' + y) = 0$ for large values of λ.//Annals of Mathematics –1950. V. 52, № 2. C. 350–361.

References

[1] Bobochko V.M., Perestjuk M.O. *Asymptotychne integruvannja rivnjannja Liuvillja z tochkamy zvorotu (Asymptotic integration of the Liouville equation with turnover points)*, 2002, 310 p.

[2] Bobochko V.M. *Proceedings of the University Mathematics* - 2002, pp 3-14

[3] Bobochko V.M. *Differencial'nye uravnenija (differential Equations)* - 2003, vol. 39, pp 171-179

[4] Bobochko V.N., Kolomiec V.G. *Asimptoticheskoe integrirovanie uravnenija tipa Orra-Zommerfel'da (Asymptotic integration of equations of the Orr-Sommerfeld)* - 1990, 44 p.

[5] Bobochko V.M., Zelens'ka I.O. *Naukovyj chasopys NPU imeni M.P. Dragomanova. Serija 1. Fizyko-matematychni nauky. (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)* - 2007, pp 40 - 47.

[6] Bolilyj V.O. *Mat. Metody ta fiz.- meh. polja. (Mathematical techniques and physical mechanics field)* - 2000, pp 44 - 50.

[7] Bolilyj V.O., Kostygin S.S.*Naukovyj chasopys NPU imeni M.P. Dragomanova. Serija 1. Fizyko-matematychni nauky. (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)* - 2007, 8, pp. 59-65.

[8] Samojlenko A.M. *Ukr. Mat. zhurn. (ukr. math. j.)* 2002, 54, pp. 1505-1516.

[9] Samojlenko A.M., Kljuchnyk I.G. *Nelinijni kolyvannja. (Nonlinear Oscillations.)* - 2009, 12, pp. 208-234.

[10] Shkil' M.I. *Dop. AN Ukrai'ny. (NAS of Ukraine Reports)* - 1998, 8, 46-50.

[11] Vazov V. *Asimptoticheskie razlozhenija reshenij obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. (Asymptotic expansions for ordinarydifferential equations.)* - 1968, 464 p.

[12] Dorodnicyn A.A. *UMN (UMS)* - 1952, 27, pp. 3-96.

[13] Markush I.I. *Rozvytok asymptotychnyh metodiv u teorii' dyferencial'nyh rivnjan' (The development of asymptotic methods in the theory of differential equations)* - 1975, 224p.

[14] Motyljov L.Ju. *Zhurnal vych. mat. i mat. fiziki (Computational Mathematics and Mathematical Physics)* - 1986, 26, pp. 1627-1634.

[15] Rudolf E.Langer *Trans. Amer. Math. Soc.* - 1959, 92, pp. 371-410.

[16] Lomov S.A. *Vvedenie v obshhuju teoriju singuljarnyh vozmushhenij. (Introduction to general theory of singular perturbations.)* - 1981.

[17] Olver F. *Trans. Amer. Math. Soc.* - 1977, 226, p. 227-241.

[18] M. Abramovic, I.Stigan *Spravochnik po special'nym funkcijam. (Handbook of Mathematical Special Functions.)* 1979, 832 p.

[19] C.C.Lin and A.L.Rabenstein *On an asymptotic solutions of a class of ordinary differential equations of the forth order.* - 1960, 94, p.24-57.

[20] Minoru Nakano and Toshihiko Nishimoto *Lecture Notes in Mathematics* - 1971, 243, pp. 315-319.

[21] Toshihiko Nishimoto *KODAI Math. Sem. Rep.* - 1972, 24, pp. 281-307.

[22] Toshihiko Nishimoto *KODAI Math. Sem. Rep.* - 1978, 29, pp. 233-249.

[23] Wasow W. *Linear turning point theory.* - 1985 - 243 p.

[24] Wasow W. *Annals of Mathematics* - 1950, 52, pp. 350-361.