Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2012, № 13(1).— С. 45–50.

УДК 517.518.2

Про четвертий модуль неперервності

С. І. Безкрила

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

О. Н. Нестеренко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

А. В. Чайковський

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Анотація. Отримано нерівність для четвертих рівномірних модулів неперервності, за допомогою якої доведено, що не кожна 4-мажоранта є модулем неперервності четвертого порядку.

Ключові слова: теорія наближень, неперервна функція, модулі неперервності.

On the fourth uniform moduli of continuity

S. I. Bezkryla

Dragomanov National Pedagogical University

O. N. Nesterenko

Taras Shevchenko National University of Kyiv

A. V. Chaikovskiy

Taras Shevchenko National University of Kyiv

Abstract. The inequality for fourth uniform moduli of continuity was obtained by which it is proved that not every 4-majorant is the modulus of continuity of order 4.

AMS Subject Classifications (2010): 26D07.
Key words: continuous function, approximation theory, modulus of continuity.

Для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ розглядатимемо першу, другу, третю та четверту скінченні різниці в точці $x \in \mathbb{R}$ з кроком $h > 0$:

$$\Delta_h^1 (f, x) = f(x+h) - f(x),$$

$$\Delta_h^2 (f, x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x),$$

$$\Delta_h^3(f,x) = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x),$$
$$\Delta_h^4(f,x) = f(x+4h) - 4f(x+3h) + 6f(x+2h) - 4f(x+h) + f(x).$$

Через $UC(\mathbb{R})$ позначимо простір рівномірно неперервних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Для функції $f \in UC(\mathbb{R})$ розглядатимемо її (рівномірний) k-ий модуль неперервності при $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ і $k = 4$:

$$\omega_k(f,\delta) = \sup\left\{\left|\Delta_h^k(f,x)\right| : x \in \mathbb{R},\, 0 < h \le \delta\right\}, \delta > 0.$$

Аналогічно до випадку модулів неперервності функцій, заданих на відрізку, які вивчаються в монографії І.О. Шевчука [1, с. 19–34], легко можна довести, що для функцій з простору $UC(\mathbb{R})$ розглядувані нами модулі неперервності $\omega = \omega_k(f,\cdot)$ при $k = 1, 2, 3, 4$ задовольняють такі умови:

1) $\omega(0) = 0$;

2) функція ω неперервна на $[0,+\infty)$;

3) функція ω неспадна на $[0,+\infty)$;

4) для довільних $\delta \ge 0$ і $n \in \mathbb{N}$ справджується нерівність $\omega(n\delta) \le n^k \omega(\delta)$.

Легко бачити, що умова 4) для невід‘ємних функцій випливає з умови:

5) функція $\delta \to \omega(\delta)/\delta^k$ незростаюча на $(0,+\infty)$.

Зауважимо, що в [1, с. 24] функції, що задовольняють умови 1) – 3) і 5), називаються k-мажорантами.

І.О. Шевчук звернув увагу авторів на таке питання. Чи правильно, що кожна k-мажоранта є модулем неперервності k-го порядку при $k = 4$ якоїсь функції з простору $UC(\mathbb{R})$ на деякому відрізку $[0,\delta_0]$, $\delta_0 > 0$? При $k = 1$ позитивна відповідь на це питання помічена ще С.М. Нікольським [2]. Для $k = 2$ негативна відповідь на це питання дана С.В. Конягіним [3]. При $k = 3$ негативна відповідь на це питання дана в роботі авторів [4].

У цій статті ми даємо також негативну відповідь на поставлене питання при $k = 4$. При цьому ми використовуємо метод С.В. Конягіна з роботи [3] та в цілому повторюємо міркування з роботи [4], але досить істотно їх модифікуємо.

Теорема 1. *Нехай* $f \in UC(\mathbb{R})$, $t > 0$, $N \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$2\omega_4(f,Nt) \le \omega_4(f,(N+1)t) + \omega_4(f,(N-1)t) + \left(12N^2+2\right)\omega_4(f,t). \tag{1}$$

Доведення. Для $N = 1$ доводжувана нерівність тривіальна, тому вважаємо, що $N \ge 2$. Нехай $h \in (0,t]$ – довільне фіксоване число, $H = Nh$.

$$\Delta_{H+h}^4(f,x-2h) + \Delta_{H-h}^4(f,x+2h) - 2\Delta_H^4(f,x) =$$
$$= f(x+4H+2h) - 4f(x+3H+h) + 6f(x+2H) - 4f(x+H-h) + f(x-2h) +$$
$$+f(x+4H-2h) - 4f(x+3H-h) + 6f(x+2H) - 4f(x+H+h) + f(x+2h) -$$

$$-2\left[f\left(x+4H\right)-4f\left(x+3H\right)+6f\left(x+2H\right)-4f\left(x+H\right)+f\left(x\right)\right]=$$
$$=\Delta_{2h}^{2}\left(f,x+4H-2h\right)-4\Delta_{h}^{2}\left(f,x+3H-h\right)-4\Delta_{h}^{2}\left(f,x+H-h\right)+\Delta_{2h}^{2}\left(f,x-2h\right)=$$
$$=\Delta_{h}^{2}\left(f,x+4H\right)+2\Delta_{h}^{2}\left(f,x+4H-h\right)+\Delta_{h}^{2}\left(f,x+4H-2h\right)-4\Delta_{h}^{2}\left(f,x+3H-h\right)-$$
$$-4\Delta_{h}^{2}\left(f,x+H-h\right)+\Delta_{h}^{2}\left(f,x\right)+2\Delta_{h}^{2}\left(f,x-h\right)+\Delta_{h}^{2}\left(f,x-2h\right)=$$
$$=\Delta_{h}^{2}\left(f,x+4Nh\right)+2\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(4N-1\right)h\right)+\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(4N-2\right)h\right)-$$
$$-4\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(3N-1\right)h\right)-4\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(N-1\right)h\right)+\Delta_{h}^{2}\left(f,x\right)+2\Delta_{h}^{2}\left(f,x-h\right)+$$
$$+\Delta_{h}^{2}\left(f,x-2h\right)=\Delta_{h}^{2}\left(f,x+4Nh\right)-2\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(4N-1\right)h\right)+\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(4N-2\right)h\right)+$$
$$+[4\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(4N-1\right)h\right)-4\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(3N-1\right)h\right)-4\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(N-1\right)h\right)+$$
$$+4\Delta_{h}^{2}\left(f,x-h\right)]+\Delta_{h}^{2}\left(f,x\right)-2\Delta_{h}^{2}\left(f,x-h\right)+\Delta_{h}^{2}\left(f,x-2h\right)=$$
$$=\Delta_{h}^{4}\left(f,x+\left(4N-2\right)h\right)+[4\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(4N-1\right)h\right)-4\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(3N-1\right)h\right)-$$
$$-4\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(N-1\right)h\right)+4\Delta_{h}^{2}\left(f,x-h\right)]+\Delta_{h}^{4}\left(f,x-2h\right) \qquad (2)$$

Вираз у квадратних дужках перетворимо, використовуючи вираз для скінченних різниць старших порядків через скінченні різниці нижчих порядків, формулу

$$\Delta_{3Nh}^{1}\left(g,x\right)=\Delta_{Nh}^{1}\left(g,x+2Nh\right)+\Delta_{Nh}^{1}\left(g,x+Nh\right)+\Delta_{Nh}^{1}\left(g,x\right)$$

та вираз для другої скінченної різниці з кроком Nh через таку ж різницю з кроком h:

$$\Delta_{Nh}^{2}\left(g,x\right)=\Delta_{h}^{2}\left(g,x\right)+2\Delta_{h}^{2}\left(g,x+h\right)+...+\left(n-1\right)\Delta_{h}^{2}\left(g,x+\left(N-2\right)h\right)+$$
$$+n\Delta_{h}^{2}\left(g,x+\left(N-1\right)h\right)+\left(n-1\right)\Delta_{h}^{2}\left(g,x+Nh\right)+...+$$
$$+2\Delta_{h}^{2}\left(g,x+\left(2N-3\right)h\right)+\Delta_{h}^{2}\left(g,x+\left(2N-2\right)h\right),$$

де $g\in UC\left(\mathbb{R}\right)$, $x\in\mathbb{R}$, $h>0$, $N\geq 2$; останню формулу можна отримати, записавши формулу (1.31) з [1] при $m=2$ і звівши в ній подібні.

Маємо, що

$$4\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(4N-1\right)h\right)-4\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(3N-1\right)h\right)-4\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(N-1\right)h\right)+$$
$$+4\Delta_{h}^{2}\left(f,x-h\right)=4\Delta_{Nh}^{1}\left(\Delta_{h}^{2}\left(f,\cdot\right),x+\left(3N-1\right)h\right)-$$
$$-4\Delta_{Nh}^{1}\left(\Delta_{h}^{2}\left(f,\cdot\right),x-h\right)=4\Delta_{3Nh}^{1}\left(\Delta_{Nh}^{1}\left(\Delta_{h}^{2}\left(f,\cdot\right),\cdot\right),x-h\right)=$$
$$=4\Delta_{Nh}^{2}\left(\Delta_{h}^{2}\left(f,\cdot\right),x-h\right)+4\Delta_{Nh}^{2}\left(\Delta_{h}^{2}\left(f,\cdot\right),x+\left(N-1\right)h\right)+$$
$$+4\Delta_{Nh}^{2}\left(\Delta_{h}^{2}\left(f,\cdot\right),x+\left(2N-1\right)h\right)=$$
$$=4[\Delta_{h}^{4}\left(f,x-h\right)+...+n\Delta_{h}^{4}\left(f,x+\left(N-2\right)h\right)+...+$$
$$+\Delta_{h}^{4}\left(f,x+\left(2N-3\right)h\right)]+4[\Delta_{h}^{4}\left(f,x+\left(N-1\right)h\right)+...+$$
$$+n\Delta_{h}^{4}\left(f,x+\left(2N-2\right)h\right)+...+\Delta_{h}^{4}\left(f,x+\left(3N-3\right)h\right)]+$$
$$+4[\Delta_{h}^{4}\left(f,x+\left(2N-1\right)h\right)+...+n\Delta_{h}^{4}\left(f,x+\left(3N-2\right)h\right)+...+$$
$$+\Delta_{h}^{4}\left(f,x+\left(4N-3\right)h\right)] \qquad (3)$$

Підставимо вираз (3) у формулу (2) і врахуємо, що сума коефіцієнтів при четвертих скінченних різницях не перевищує

$$12\left(1+2+...+(N-1)+N+(N-1)+...+2+1\right)+2=12N^2+2.$$

Таким чином,

$$\left|\Delta^4_{H+h}(f,x-h)+\Delta^4_{H-h}(f,x+h)-2\Delta^4_{H}(f,x)\right|\le\left(12N^2+2\right)\omega_4(f,t).$$

Звідси випливає, що

$$2\Delta^4_{H}(f,x)\le\Delta^4_{H+h}(f,x-h)+\Delta^4_{H-h}(f,x+h)+\left(12N^2+2\right)\omega_4(f,t)\le$$
$$\le\omega_4(f,(N+1)t)+\omega_4(f,(N-1)t)+\left(12N^2+2\right)\omega_4(f,t).$$

Якщо h пробігає весь проміжок $(0,t]$, то Nh пробігає весь проміжок $(0,Nt]$, тому з останньої нерівності та означення точної верхньої межі й одержуємо нерівність (1).

□

Наслідок 1. *Функція* $\varphi(t)=t^4$, $t\in[0,1/2]$, *і* $\varphi(t)=1/16$, $t>1/2$, *задовольняє умови* $1)-3)$ *і* 5) *при* $k=4$, *але не є модулем неперервності четвертого порядку ні для якої функції з простору* $UC(\mathbb{R})$.

Доведення. Випливає з теореми 1, бо при досить великих $n\in\mathbb{N}$

$$\varphi\left(\frac12+\frac1{2n}\right)-2\varphi\left(\frac12\right)+\varphi\left(\frac12-\frac1{2n}\right)+\left(12n^2+2\right)\varphi\left(\frac1{2n}\right)<0,$$

отже, якщо покласти $t=\frac{1}{2n}$ і $N=n$, то нерівність (1) стає хибною, що для четвертого модуля неперервності неможливо. Умови $1)-3)$ і 5) для функції φ очевидно виконуються.

Твердження цього наслідку значно посилює наступна теорема. □

Теорема 2. *Для кожного числа* $\alpha>3$ *існує ненульова функція* $\omega:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, *що задовольняє умови* $1)-3)$, *така, що функція* $\delta\to\omega(\delta)/\delta^\alpha$ *є незростаючою на* $(0,+\infty)$ *і при цьому ні для якої функції* $f\in UC(\mathbb{R})$ *не виконується рівність*

$$\lim_{\delta\to0}\omega_4(f,\delta)/\omega(\delta)=1.$$

Доведення. Розглянемо функцію $\varphi(t)=t^\alpha$, $t\in[0,1/2]$, і $\varphi(t)=(1/2)^\alpha$, $t\notin(1/2,1]$. Оскільки

$$\varphi\left(\frac12+\frac1{2n}\right)-2\varphi\left(\frac12\right)+\varphi\left(\frac12-\frac1{2n}\right)+\left(12n^2+2\right)\varphi\left(\frac1{2n}\right)=-\frac{\alpha}{2^\alpha n}+o\left(\frac1n\right),\ n\to\infty,$$

то існують $n_0\in\mathbb{N}$, $n_0\ge2$ і $\eta>0$ такі, що

$$\varphi\left(\frac12+\frac1{2n}\right)-2\varphi\left(\frac12+\frac1{2n_0}\right)-2\varphi\left(\frac12\right)+\varphi\left(\frac12-\frac1{2n_0}\right)+\left(12n^2+2\right)\varphi\left(\frac12\right)=-\eta.$$

Позначимо $S = \frac{1}{2n_0}$, $T = (2S)^\alpha$. Визначимо тепер функцію ω. Нехай $\omega(0) = 0$, а якщо $\delta \in [S^{j+1}, S^j)$ при деякому $j \in \mathbb{Z}$, то покладемо $\omega(\delta) = T^j \varphi\left(\frac{\delta}{S^j}\right)$. Отримаємо функцію ω, коректно визначену на $[0, +\infty)$, яка задовольняє умови $1) - 3)$ і для якої функція $\delta \to \omega(\delta)/\delta^\alpha$ є незростаючою на $(0, +\infty)$. Дійсно, ці умови виконуються для функції φ, а також

$$\omega\left(S^j+\right) = \omega\left(S^j\right) = T^{j-1}\varphi\left(S^j/S^{j-1}\right) = \frac{1}{2^\alpha n_0^{\alpha j}},$$

$$\omega\left(S^j-\right) = \lim_{\delta \to S^j-} T^j \varphi\left(\frac{\delta}{S^j}\right) = \frac{1}{2^\alpha n_0^{\alpha j}},$$

отже, ω неперервна на $(0, +\infty)$; $|\omega(\delta)| \le T^j \le (1/2)^j$, $\delta \in [0, S^j)$, тому $\omega(0+) = 0 = \omega(0)$; оскільки φ неспадна, то ω неспадна на кожному проміжку $[S^{j+1}, S^j)$, тому, з огляду на її неперервність на $[0, +\infty)$, є неспадною на $[0, +\infty)$; аналогічно легко бачити, що функція $\delta \to \omega(\delta)/\delta^\alpha$ є незростаючою на $(0, +\infty)$.

Оскільки $0 < S \le 1/4$, то при всіх $j > 0$ маємо

$$\left\{S^j(1/2 + S),\, S^j/2,\, S^j(1/2 - S),\, S^{j+1}\right\} \subset [S^{j+1}, S^j),$$

тому

$$\begin{aligned} &\omega\left(S^j(1/2+S)\right) - 2\omega\left(S^j/2\right) + \omega\left(S^j(1/2-S)\right) + \left(12n_0^2+2\right)\omega\left(S^{j+1}\right) = \\ &= T^j\left(\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n_0}\right) - 2\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \varphi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n_0}\right) + \left(12n_0^2+2\right)\varphi\left(\frac{1}{2n_0}\right)\right) = \\ &= -T^j\eta < -T^j\varphi\left(\frac{1}{2}+S\right)\eta = -\omega\left(S^j\left(\frac{1}{2}+S\right)\right)\eta. \end{aligned} \tag{4}$$

Якщо функція $\tilde{\omega} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ така, що $\lim\limits_{\delta \to 0+} \tilde{\omega}(\delta)/\omega(\delta) = 1$, то існує таке $j \in \mathbb{N}$, що для всіх $\delta \in (0, S^j)$ виконується нерівність

$$|\tilde{\omega}(\delta) - \omega(\delta)| \le \frac{\eta\omega(\delta)}{12n_0^2 + 6}.$$

Звідси, враховуючи (4) і те, що функція ω неспадна, отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} &\tilde{\omega}\left(S^j(1/2+S)\right) - 2\tilde{\omega}\left(S^j/2\right) + \tilde{\omega}\left(S^j(1/2-S)\right) + \left(12n_0^2+2\right)\tilde{\omega}\left(S^{j+1}\right) < \\ &< -\omega\left(S^j(1/2+S)\right)\eta + \left(12n_0^2+6\right)\frac{\eta\omega\left(S^j(1/2+S)\right)}{12n_0^2+6} = 0, \end{aligned}$$

що суперечить нерівності (1), якщо в ній покласти $t = S^{j+1}$ і $N = n_0$. Таким чином, функція $\tilde{\omega}$ не може бути модулем неперервності четвертого порядку ні для якої функції з простору $UC(\mathbb{R})$. Теорему доведено.

Автори висловлюють щиру подяку професору І.О. Шевчуку за постановку задачі й підтримку в роботі.

□

Література

[1] *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – К.: Наук. думка, 1992. – 224 с.

[2] *Никольский С. М.* Ряд Фурье с данным модулем непрерывности // ДАН СССР – 1946. – Т.52, №3. – С. 191 – 194.

[3] *Конягин С. В.* О вторых модулях непрерывности // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. – 2010. – Т.269. – С. 1 – 3.

[4] *Безкрила С. І., Нестеренко О. Н., Чайковський А. В.* Про треті модулі неперервності // Укр. мат. журн. – В друці.

References

[1] Shevchuk I. A., *Priblizhenie mnogochlenami i sledy nepreryvnyh na otrezke funkciy (Approximation by polynomials and traces of the functions continuous on an interval)*, Kyiv, 1992, 224 p.

[2] Nikolskiy S. M., *Dok. Acad. Sci. USSR*, 1946, 52, 3, pp. 191 – 194.

[3] Konjagin S. V., *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 2010, 269, pp. 1 – 3.

[4] Bezkryla S. I., Nesterenko O. N., Chaikovskiy A. V., *Pro treti moduli neperervnosti (On the third modulus of continuity)* Submitted to Ukr. mat. zhurn.