Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2012, № 13(1).— С. 198–210.

УДК 511.7, 517.1

Аналог теореми Біллінгслі для пакувальної розмірності

О. В. Слуцький,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Г. М. Торбін,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова, Інститут математики НАН України

Анотація. У статті доводиться аналог теореми Біллінгслі для пакувальної розмірності. Також вводиться означення розмірності пакувальної-Біллінгслі, доводиться його коректність та простежується зв'язок цього означення з означенням стандартної пакувальної розмірності.

Ключові слова: Пакувальна розмірність множини, пакувальна розмірність міри, розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини, розмірність Хаусдорфа міри.

An analog of Billingsley theorem for the packing dumension

O. Slutskiy,

National Pedagogical Dragomanov University

G. Torbin,

National Pedagogical Dragomanov University, Institute for Mathematics of NASU

Abstract. In this paper we prove an analog of Billingsley theorem for the packing dumension. To this end we introduce definition of packing-Billingsley dimension, verifying that this definition is correct, and showing relations between it and the definition of standard packing dimension.

AMS Subject Classifications (2010): 28A78, 28A80.

Key words: Packing dimension of sets, Packing dimension of measures, Hausdorff-Besicovitch dimension of sets, Hausdorff dimension of measures.

1. Вступ

Пакувальна розмірність вперше була введена Claude Tricot в 1981 році [**12**]. На той час (як і нині) був поширений інший варіант фрактальної розмірності – розмірність Хаусдорфа-Безиковича [**1, 2, 12, 13, 14**]. Вона виділяється серед менш популярних розмірностей тим, що має зчисленну стабільність. Проте розмірність Хаусдорфа-Безиковича має досить суттєві складнощі в обчисленні [**13**]. Пакувальна розмірність також має зчисленну стабільність, але вона позбавлена настільки великих складнощів у обчисленні завдяки тому, що в евклідовому просторі її значення співпадають із значеннями модифікованої верхньої клітинкової розмірності [**9**].

Нині актуальними є багато питань, пов'язаних з пакувальною розмірністю. Важливий клас цих питань – визначення спільних та відмінних властивостей пакувальної розмірності та розмірності Хаусдорфа-Безиковича. (наприклад, [**8**]).

Для розмірності Хаусдорфа-Безиковича доведена теорема Біллінгслі [**5, 3, 4**]. Ця стаття присвячена доведенню аналога теореми Біллінгслі для пакувальної розмірності, а також означенням та наслідкам, пов'язаним із цією теоремою.

2. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича, розмірність Біллінгслі та теорема Біллінгслі

Нехай (M,ρ) - метричний простір, в якому для довільної множини і для як завгодно малого додатного ε існує не більш ніж зчисленне ε-покриття, E - обмежена підмножина цього простору, а $d(E)$ - це діаметр множини E. Нехай Φ_M - це сім'я підмножин простору M таких, що для довільної множини $E \subset \Phi_M$ та $\forall \varepsilon > 0$ існує не більш ніж зчисленне ε-покриття множини E. Нехай α - додатне число.

Нагадаємо (див., наприклад, [**9**]), що α-вимірна міра Хаусдорфа обмеженої множини $E \subset M$ визначається такою рівністю:

$$H^\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\inf_{d(E_j) \le \varepsilon} \left\{ \sum_j d^\alpha E_j \right\} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} m_\varepsilon^\alpha(E),$$

де інфімум береться по всеможливим не більш, ніж зчисленним ε - покриттям множини E множинами E_j, які належать сім'ї Φ_M.

Зауважимо, що, взагалі кажучи, $H^\alpha(E)$ залежить від вибору сім'ї Φ_M. Якщо $M = \mathbb{R}^n$, то у ролі сім'ї Φ_M ми можемо розглядати множину $2^{\mathbb{R}^n}$. Значення $H^\alpha(E)$ не зміниться, якщо ми будемо розглядати у ролі сім'ї Φ_M набір всіх відкритих множин або набір всіх замкнених множин (див. [**11**]).

Означення 1. Додатне число

$$\dim_H = \sup \alpha : H^\alpha(E) = \infty = \inf \alpha : H^\alpha(E) = 0$$

називається розмірністю Хаусдорфа-Безиковича множини E.

Розмірність Хаусдорфа-Безиковича має певні властивості, які традиційно вважаються "хорошими"властивостями для розмірності. Пригадаємо їх:

(1) Якщо E - одноточкова множина, то $\dim_H(E) = 0$

(2) Якщо $E_1 \subset E_2$, то $\dim_H(E_1) \leq \dim_H(E_2)$

(3) $\dim_H(\cup_n E_n) = \sup_n \dim_H(E_n)$

Нехай ν - неперервна ймовірнісна міра, визначена на сімействі борелівських підмножин $\mathbb{R}^n$. Означимо ν^α-Хаусдорфову міру множини E за допомогою рівності

$$\nu^\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\inf_{\nu(E_j) \leq \varepsilon} \left\{ \sum_j \nu^\alpha E_j \right\} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \nu^\alpha_\varepsilon(E),$$

де інфімум береться по всеможливим не більш, ніж зчисленним $\nu - \varepsilon$ - покриттям множини E s-адичними циліндрами E_j.

Означення 2. Додатне число

$$\dim_\nu = \sup\{\alpha : \nu^\alpha(E) = \infty\} = \inf\{\alpha : \nu^\alpha(E) = 0\}$$

називається розмірністю Біллінгслі множини E (або розмірністю Хаусдорфа-Безиковича множини E по відношенню до міри ν).

Зауваження 1. *Часто при обчисленні розмірності Хаусдорфа-Безиковича та Біллінгслі можна використовувати "вужчі"варіанти сімейства Φ_M. Зокрема, якщо ν - міра Лебега, то у ролі Φ_M можна використовувати сімейство s-адичних відрізків (для фіксованого натурального s).*

Теорема 1.

$$\dim_\lambda(E) = \dim_H(E) \forall E \subset [0;1], \tag{1}$$

де λ - міра Лебега (доведення є, наприклад, в **[5, 3]**.

Теорема 2 (Біллінгслі). *Нехай μ, ν - неперервні міри. Нехай $c_n(x)$ - s-адичний циліндр n-го рангу, що містить точку x, а $\delta > 0$ - фіксоване дійсне число. Будемо вважати, що за означенням $\frac{\ln 0}{\ln 0} = \frac{\ln 1}{\ln 1} = 1$. Нехай*

$$E \subset \left\{ x : \limsup_{n \to \infty} \left(\frac{\ln \mu(c_n(x))}{\ln \nu(c_n(x))}\right) \geq \delta \right\} \tag{2}$$

Тоді $\dim_\nu(E) \geq \delta * \dim_\mu(E)$. *(доведення є в* **[3]**.*)*

3. Пакувальна розмірність, пакувальна розмірність з нецентрованими кулями та пакувальна розмірність Біллінгслі

Означення 3. Нехай маємо метричний простір (M, ρ), в якому для довільної множини існує покриття скінченною або зчисленною кількістю множин як завгодно малого додатнього діаметра. Зафіксуємо множину $E \subset M$ та додатне дійсне число α.

Величина

$$\mathcal{P}^\alpha_r(E) = \sup\{\sum_i |E_i|^\alpha : |E_i| < r\}, \tag{3}$$

де $\{E_i\}$ – це скінченний або зчисленний набір відкритих куль, центри яких належать множині E, а кулі попарно не перетинаються, називається пакувальною квазі-передмірою множини E по відношенню до радіуса r . Величина

$$\mathcal{P}_0^\alpha(E) = \lim_{r\to 0} \mathcal{P}_r^\alpha(E) \tag{4}$$

називається пакувальною квазі-мірою множини E.

Величина

$$\mathcal{P}^\alpha(E) = \inf\{\sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_j) : E \subset \bigcup E_j\} \tag{5}$$

називається пакувальною мірою множини E.

Величина

$$\dim_P(E) = \inf\{\alpha : \mathcal{P}^\alpha(E) = 0\} = \sup\{\alpha : \mathcal{P}^\alpha(E) = \infty\} \tag{6}$$

називається пакувальною розмірністю множини E.

4. Властивості пакувальної міри та пакувальної розмірності

(1) $\mathcal{P}^\alpha$ є зчисленно адитивною мірою
(2) $\dim_P(E)$ є невід'ємною, зчисленно стабільною функцією множини, інваріантною відносно біліпшицевих перетворень [**12**];
(3) $\dim_P(E) \geq \dim_H(E) \forall E \subset M$ [**12**];
(4) $\dim_P(E) = \dim_{MB}(E) \forall E \subset \mathbb{R}^n$[**9**];

Отже, пакувальна розмірність також має такі «зручні» властивості розмірності, як зчисленну стабільність та інваріантність відносно біліпшицевих перетворень. Разом з цим пакувальну розмірність зручно обчислювати в евклідовому просторі завдяки властивості 4.

5. Теорема Біллінгслі для пакувальної розмірності

Теорема Біллінгслі є потужним інструментом для дослідження розмірності Хаусдорфа-Безиковича, тому бажано довести її аналог для дослідження пакувальної розмірності. Для доведення такого аналогу необхідно ввести поняття "пакувальна розмірність Біллінгслі".

Означення 4. Нехай маємо метричний простір (M, ρ), в якому для довільної множини існує покриття скінченною або зчисленною кількістю множин як завгодно малого додатнього діаметра. Зафіксуємо множину $E \subset M$ та додатне дійсне число α.

Величина

$$\mathcal{P}_r^\alpha(E, \nu) = \sup\{\sum_i \nu(E_i)^\alpha : |E_i| < r\}, \tag{7}$$

де $\{E_i\}$ – це скінченний або зчисленний набір s-адичних циліндрів, центри яких належать множині E, а самі циліндри попарно не перетинаються, називається пакувальною квазі-передмірою множини E по відношенню до радіуса r та міри ν. Величина

$$\mathcal{P}_0^\alpha(E,\nu) = \lim_{r\to 0} \mathcal{P}_r^\alpha(E,\nu) \tag{8}$$

називається пакувальною квазі-мірою множини E по відношенню до міри ν.

Величина

$$\mathcal{P}^\alpha(E,\nu) = \inf\{\sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_j,\nu) : E \subset \bigcup E_j\} \tag{9}$$

називається пакувальною мірою множини E по відношенню до міри ν.

Величина

$$\dim_P(E,\nu) = \inf\{\alpha : \mathcal{P}^\alpha(E,\nu) = 0\} = \sup\{\alpha : \mathcal{P}^\alpha(E,\nu) = \infty\} \tag{10}$$

називається пакувальною розмірністю множини E по відношенню до міри ν.

Теорема 3. *Наведене вище означення некоректне в тому розумінні, що «пакувальна розмірність множини E по відношенню до міри ν» не є зчисленно стабільною розмірністю.*

Доведення. Нехай A_1 - це множина центрів всіх s-адичних циліндрів, а множина $A = [0;1] \setminus A_1$. Тоді множина $\{E_i\}$ з вищенаведеного означення буде пуста для множини A, і тому її розмірності не існуватиме.

З іншого боку, множина A є відрізком без зчисленної кількості точок. Отже, зі зчисленної стабільності повинна випливати рівність розмірності множини A та числа 1. Отже, «пакувальна розмірність множини E по відношенню до міри ν» не є зчисленно стабільною розмірністю. □

Некоректність розглянутого означення спонукає нас ввести інше поняття – «пакувальна розмірність з нецентрованими кулями». Воно відрізняється від звичайної пакувальної розмірності тим, що замість слів «E_i — відкриті кулі, центри яких містяться в E, а самі кулі попарно не перетинаються» містить слова «E_i —- відкриті кулі, що мають непустий перетин з E, а самі кулі попарно не перетинаються».

Означення 5. Нехай маємо метричний простір (M,ρ), в якому для довільної множини існує покриття скінченною або зчисленною кількістю множин як завгодно малого додатнього діаметра. Зафіксуємо множину $E \subset M$ та додатне дійсне число α.

Величина

$$\mathcal{P}_r^\alpha(unc)(E) = \sup\{\sum_i |E_i|^\alpha : |E_i| < r\}, \tag{11}$$

де $\{E_i\}$ – це скінченний або зчисленний набір відкритих куль, кожна з яких має непустий перетин з множиною E, а кулі попарно не перетинаються, називається пакувальною квазі-передмірою з нецентрованими кулями множини E по відношенню до радіуса r.

Величина

$$\mathcal{P}_0^\alpha(unc)(E) = \lim_{r\to 0} \mathcal{P}^\alpha(unc)_r(E) \tag{12}$$

називається пакувальною квазімірою з нецентрованими кулями множини E.

Величина

$$\mathcal{P}^\alpha(unc)(E) = \inf\{\sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(unc)(E_j) : E \subset \bigcup E_j\} \tag{13}$$

називається пакувальною мірою з нецентрованими кулями множини E.

Величина

$$\dim_P(unc)(E) = \inf\{\alpha : \mathcal{P}^\alpha(unc)(E) = 0\} = \sup\{\alpha : \mathcal{P}^\alpha(unc)(E) = \infty\} \tag{14}$$

називається пакувальною розмірністю з нецентрованими кулями множини E.

Теорема 4.

$$\forall E \subset \mathbb{R}^n \dim_{p-unc}(E) = dim_p(E) \tag{15}$$

Доведення. Оскільки кулі, що мають центри в множині E, завжди будуть мати непустий перетин з цією множиною, то супремум в означенні "пакувальної розмірності з нецентрованими кулями"є взятим по більш широкому класу множин, ніж супремум в означенні звичайної пакувальної розмірності. Тому

$$\dim_{p-unc}(E) \geq \dim_P(E). \tag{16}$$

Покажемо, що

$$\dim_{p-unc}(E) \leq \dim_P(E). \tag{17}$$

Коли $\dim_{p-unc}(E) = 0$, твердження очевидне.

Нехай $0 < t < s < \dim_{p-unc}(E)$.

Оскільки $s < \dim_{p-unc}(E)$, то $\mathcal{P}^s(unc)(E) = \infty$. Звідси $\mathcal{P}_0^s(unc)(E) = \infty$, а тому існує таке $r > 0$, що $\mathcal{P}_r^s(unc)(E) > 1$.

Розглянемо набір куль, відповідний ситуації, коли $\mathcal{P}_r^s(unc)(E) > 1$. Позначимо цей набір через B. Ці кулі попарно не перетинаються, їх діаметри не перевищують r, і кожна з куль має непустий перетин з множиною E.

Позначимо множину куль з вищезгаданого набору, діаметр яких задовольняє умову $2^{-k-1} < r < 2^{-k}$, через B_k. Позначимо кількість куль у множині B_k через n_k.

Хоча б одне з чисел n_k повинне задовольняти нерівність $n_k \geq 2^{kt}(1 - 2^{t-s})$. Покажемо це. Від супротивного: Нехай $n_k < 2^{kt}(1 - 2^{t-s})\forall k$. Тоді сумарний s-об'єм усіх куль з B менший за 1, що суперечить умові $\mathcal{P}_r^s(unc)(E) > 1$. Отже, існує таке k_0, що $n_{k_0} \geq 2^{k_0 t}(1 - 2^{t-s})$.

Розглянемо всі кулі з набору B_{k_0}. Нехай $B_{k_0} = \{A_1, A_2, ..., A_{n_{k_0}}\}$. Нехай T_i - це одна з точок перетину кулі A_i з множиною E. Розглянемо множину B', яка складається з куль, центрами яких є точки T_i, а діаметри яких дорівнюють 2^{-k_0}. Зрозуміло, що кількість цих куль також дорівнює n_{k_0}.

У загальному випадку кулі з множини B' можуть перетинатися. Для того, щоб зробити ці кулі такими, що попарно не перетинаються, виконаємо таку операцію: Візьмемо кулю A_1. Приберемо з множини B' ті кулі, які містяться в кулі з центром T_1 і радіусом $3 * 2^(- k - 1)$. Це якраз і є ті кулі, які перетинаються з кулею A_1. Кількість куль, які ми прибираємо, може бути оцінена константою для простору $\mathbb{R}^n$ (при конкретному n). Цю константу можна позначити C і записати для неї формулу: $C = 3^n$ (відношення n-вимірного об'єму кулі радіуса 3r до кулі радіуса r). Так само прибиратимемо з множини B' кулі, які перетинаються з A_2 (якщо не прибрали кулю A_2) і т.д. Під час кожного акту "прибирання"нам треба забрати не більше, ніж 3^n куль. Таким чином, після закінчення "прибирання"кількість куль, а отже, і сумарний t-об'єм множини B' зменшиться не більше, ніж у 3^n разів. Тому сумарний t-об'єм множини B' можна оцінити знизу величиною

$$n_{k_0} * \frac{2^{-k_0 t}}{3^n} \geq 2^{k_0 t}(1 - 2^{t-s}) * \frac{2^{-k_0 t}}{3^n} = \frac{1 - 2^{t-s}}{3^n} \tag{18}$$

. Отже, $\mathcal{P}^t_{2^{-k_0}}(E) \geq \frac{1-2^{t-s}}{3^n}$. Оскільки нерівність $P^s_r(unc)(E) > 1$ повинна виконуватися для як завгодно малого радіуса, то і нерівність $\mathcal{P}^t_{2^{-k_0}}(E) \geq \frac{1-2^{t-s}}{3^n}$ буде виконуватися для як завгодно великих значень k_0. Тому $\mathcal{P}^t_0(E) \geq \frac{1-2^{t-s}}{3^n}$, а отже, і $\mathcal{P}^t(E) \geq \frac{1-2^{t-s}}{3^n}$, а тому $t \leq \dim_p(E)$. Отже, маємо: $t < \dim_{p-unc}(E) \Rightarrow t \leq \dim_p(E)$. Отже, $\dim_{p-unc}(E) \leq \dim_p(E)$, що й вимагалось довести. □

На основі означення поняття «пакувальна розмірність з нецентрованими кулями» зручно дати означення пакувальної розмірності Біллінгслі.

Означення 6. Нехай маємо метричний простір (M, ρ), в якому для довільної множини існує покриття скінченною або зчисленною кількістю множин як завгодно малого додатнього діаметра. Зафіксуємо множину $E \subset M$ та додатне дійсне число α.

Величина

$$\mathcal{P}^\alpha_r(\mu)(E) = \sup\{\sum_i (\mu(E_i))^\alpha : \mu(E_i) < r\}, \tag{19}$$

де $\{E_i\}$ – це скінченний або зчисленний набір s-адичних циліндрів, кожен з яких має непустий перетин з множиною E, причому циліндри попарно не перетинаються, називається пакувальною квазі-передмірою Біллінгслі для множини E по відношенню до радіуса r та міри μ.

Величина

$$\mathcal{P}^\alpha_0(\mu)(E) = \lim_{r \to 0} \mathcal{P}^\alpha_r(\mu)(E) \tag{20}$$

називається пакувальною квазі-мірою Біллінгслі для множини E по відношенню до міри μ.

Величина

$$\mathcal{P}^{\alpha}(\mu)(E) = \inf\{\sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha}(\mu)(E_j) : E \subset \bigcup E_j\} \tag{21}$$

називається пакувальною мірою Біллінгслі множини E по відношенню до міри μ.

Величина

$$\dim_{p-\mu}(E) = \inf\{\alpha : \mathcal{P}^{\alpha}(\mu)(E) = 0\} = \sup\{\alpha : \mathcal{P}^{\alpha}(\mu)(E) = \infty\} \tag{22}$$

називається пакувальною розмірністю Біллінгслі множини E по відношенню до міри μ.

Тепер ми можемо сформулювати твердження, яке є аналогом теореми Біллінгслі для пакувальної розмірності. Спочатку доведемо допоміжну лему:

Лема 1. *Нехай μ, ν - обмежені неперервні міри на відрізку $[0;1]$, які набувають додатного значення на довільному відрізку. Нехай r - додатне дійсне число, а*

$$f(r) = \sup\{\nu(c_n) : \mu(c_n) \leq r\},$$

де c_n - деякий s-адичний циліндр. Тоді $r \to 0 \Rightarrow f(r) \to 0$.

Доведення. З задання $f(r)$ видно, що f - зростаюча функція від r. Виберемо довільну спадну послідовність (r_n) таку, що прямує до нуля. Тоді послідовність $(f(r_n))$ також буде спадною, а отже, її границя існуватиме. Покажемо, що ця границя дорівнює нулю.

Від супротивного. Нехай

$$\exists x \in \mathbb{R} : x > 0, \lim_{r_n \to 0} f(r_n) = x$$

. Тоді існує нескінченна кількість s-адичних циліндрів c_n таких, що $\nu(c_n) \geq x$. (Інакше при $r_n < \min_{c_n} \mu(c_n)$ отримаємо $f(r_n) < x$, що суперечить припущенню).

Припустимо, що серед вказаних циліндрів існує нескінченна кількість таких циліндрів, що попарно не перетинаються між собою. Тоді $\nu([0;1]) = \infty$, що суперечить обмеженості міри ν.

Отже: циліндрів c_n таких, що $\nu(c_n) \geq x$ нескінченна кількість, але з них лише скінченна кількість попарно не перетинається. Тоді існує нескінченна послідовність вкладених циліндрів

$$c_{n_1} \supset c_{n_2} \supset \dots$$

Оскільки існує нескінченна послідовність циліндрів вказаного виду, то існує і спільна точка цих циліндрів - точка c_0, причому $\nu(c_0) \geq x$, що суперечить неперервності міри ν.

Отже, ми прийшли до суперечності. Тому припущення

$$\exists x \in \mathbb{R} : x > 0, \lim_{r_n \to 0} f(r_n) = x$$

невірне, що й вимагалось довести. $\square$

Теорема 5 (Аналог теореми Біллінгслі для пакувальної розмірності). *Нехай* μ, ν *– неперервні міри,* $c_n(x)$ *–* s*-адичний циліндр* n*-того рангу, що містить точку* x*. Нехай*

$$\exists \delta > 0 : E \subset \left\{ x : \limsup_{n \to \infty} \frac{\ln \mu(c_n(x))}{\ln \nu(c_n(x))} \leq \delta \right\}$$

Тоді

$$\dim_{P-\nu}(E) \leq \dim_{P-\mu}(E) * \delta.$$

Доведення. Спочатку припустимо, що для числа δ, про яке говориться в умові теореми,

$$E \subset \left\{ x : \frac{\ln \mu(c_n(x))}{\ln \nu(c_n(x))} \leq \delta \right\}$$

і покажемо, що твердження теореми виконується за цієї умови.

Зазначимо, що

$$\frac{\ln \mu(c_n(x))}{\ln \nu(c_n(x))} \leq \delta \Rightarrow \ln \mu(c_n(x)) \geq \delta * \ln \nu(c_n(x)) \Rightarrow \mu(c_n(x)) \geq \nu^{\delta}(c_n(x)).$$

Тепер для довільного $\alpha > 0$ порівняємо між собою величини $\mathcal{P}_r^{\alpha}(\mu)(E)$ та $\mathcal{P}_r^{\alpha\delta}(\nu)(E)$. Маємо:

$$\mathcal{P}_r^{\alpha}(\mu)(E) = \sup \left\{ \sum_i (\mu(E_i))^{\alpha} : \mu(E_i) < r \right\}$$

$$\mathcal{P}_r^{\alpha\delta}(\nu)(E) = \sup \left\{ \sum_i (\nu(E_i))^{\alpha\delta} : \nu(E_i) < r \right\},$$

причому множини E_i є s-адичними циліндрами.

Покажемо, що $\mathcal{P}_0^{\alpha}(\mu)(E) \geq \mathcal{P}_0^{\alpha\delta}(\nu)(E)$.

Маємо:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_r^{\alpha}(\mu)(E) = &\sup \left\{ \sum_i (\mu(E_i))^{\alpha} : \mu(E_i) < r \right\} \geq \\ &\sup \left\{ \sum_i (\nu(E_i))^{\alpha\delta} : \mu(E_i) < r \right\} \geq \\ &\sup \left\{ \sum_i (\nu(E_i))^{\alpha\delta} : \nu(E_i) < f(r) \right\} \end{aligned} \tag{23}$$

(Величина $f(r)$ описана у лемі вище).

Тепер спрямуємо r до нуля. Враховуючи, що $r \to 0 \Rightarrow f(r) \to 0$ (результат попередньої леми), маємо:

$$\mathcal{P}_0^{\alpha}(\mu)(E) \geq \mathcal{P}_0^{\alpha\delta}(\nu)(E).$$

Покажемо, що $\mathcal{P}^{\alpha}(\mu)(E) \geq \mathcal{P}^{\alpha\delta}(\nu)(E)$.

Нагадаємо, що за означенням

$$\mathcal{P}^{\alpha}(\mu)(E) = \inf \left\{ \sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha}(\mu)(E_j) : E \subset \bigcup E_j \right\},$$

де інфімум береться по всеможливим покриттям множини E s-адичними циліндрами E_j. Оскільки

$$E \subset \left\{ x : \frac{\ln \mu(c_n(x))}{\ln \nu(c_n(x))} \leq \delta \right\},$$

то для всеможливих циліндрів E_j буде виконуватися нерівність

$$\mathcal{P}_0^{\alpha}(\mu)(E) \geq \mathcal{P}_0^{\alpha\delta}(\nu)(E)$$

і тому

$$\mathcal{P}^{\alpha}(\mu)(E) \geq \mathcal{P}^{\alpha\delta}(\nu)(E).$$

Нехай $\dim_{P-\mu}(E) = \alpha$. Зафіксуємо довільне число $a > \alpha$. За означенням пакувальної розмірності, $\mathcal{P}^{a}(\mu)(E) = 0$. Але тоді і $\mathcal{P}^{a\delta}(\nu)(E)$, тобто $a\delta \geq \dim_{P-\nu}(E)$. З довільності числа a випливає, що $\alpha\delta \geq \dim_{P-\nu}(E)$, що й вимагалось довести.

Знімемо припущення, зроблене на початку теореми. Оскільки

$$E \subset \left\{ x : \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln \mu(c_n(x))}{\ln \nu(c_n(x))} \leq \delta \right\},$$

то, за означенням верхньої границі,

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : n > n_0 \Rightarrow \frac{\ln \mu(c_n(x))}{\ln \nu(c_n(x))} \leq \delta + \varepsilon.$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Для кожного з $x \in E$ знайдемо відповідне n_0 та $c_{n_0}(x)$. Множина отриманих $c_{n_0}(x)$ буде не більш ніж зчисленною (тому що множина всіх s-адичних відрізків не більш ніж зчисленна). Виберемо довільний з цих відрізків, позначимо його через A. Розглянемо множину $E_A = E \cap A$. З задання E_A випливає, що

$$\forall x \in E_A, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{\ln \mu(c_n(x))}{\ln \nu(c_n(x))} \leq \delta + \varepsilon.$$

Отже, $\dim_{P-\nu}(E_A) \leq \dim_{P-\mu}(E_A) * (\delta + \varepsilon)$. Оскільки така умова виконується для довільного s-адичного відрізка з розглядуваної множини $c_{n_0}(x)$, то і $\dim_{P-\nu}(E) \leq \dim_{P-\mu}(E) * (\delta + \varepsilon)$. Оскільки остання нерівність виконується для довільного $\varepsilon > 0$, то $\dim_{P-\nu}(E) \leq \dim_{P-\mu}(E) * \delta$, що й вимагалось довести. □

Наслідок 1. *Нехай μ, ν – неперервні міри, $c_n(x)$ – s-адичний циліндр n-того рангу, що містить точку x. Нехай*

$$\exists \delta > 0 : E \subset \left\{ x : \liminf_{n\to\infty} \frac{\ln \mu(c_n(x))}{\ln \nu(c_n(x))} \geq \delta \right\}$$

Тоді

$$\dim_{P-\mu}(E) \geq \dim_{P-\nu}(E) * \delta.$$

Доведення. Нехай $\nu_1 = \mu, \mu_1 = \nu, \delta_1 = \frac{1}{\delta}$. Тоді міри μ_1, ν_1 та число δ_1 задовольняють умови аналога теореми Біллінгслі. Це значить, що

$$\dim_{P-\mu_1}(E) \leq \dim_{P-\nu_1}(E) * \delta_1$$

або, що те саме,

$$\dim_{P-\mu}(E) \geq \dim_{P-\nu}(E) * \delta.$$

□

6. Підсумки

Ми довели для пакувальної розмірності аналог теореми Біллінгслі. Тепер ми можемо застосовувати цей потужний інструмент та формулювати ті теореми, які доводяться аналогічним інструментом для розмірності Хаусдорфа-Безиковича.

Великий інтерес представляє задача знайти аналог для однієї з другорядних теорем Біллінгслі, а саме:

Теорема 6. *Нехай μ - неперервна міра. Нехай $\delta \geq 0$. Тоді*

$$\dim_\mu \{x : \liminf \frac{\ln \nu(c_n(x))}{\ln \mu(c_n(x))} \leq \delta\} \leq \delta. \tag{24}$$

Такий аналог допоможе поставити крапку в питанні про розмірність спектра та розмірність міри, заданої випадковою величиною з незалежними s-адичними цифрами (див., наприклад, [**6, 7**]). Один зі способів вирішити це питання був запропонований Jinjun Li у своїй статті [**10**]. Щоправда, у цій статті Li не вводив пакувальну розмірність з нецентрованими кулями, а натомість ввів досить часткове визначення "пакувальної міри з хвилькою". Саме завдяки цьому визначенню йому вдалося сформулювати аналог теореми Біллінгслі для пакувальної розмірності. Наш же підхід (за допомогою пакувальної розмірності з нецентрованими кулями) набагато загальніший, оскільки не є "прив’язаним"до конкретної системи числення.

Література

[1] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving Hausdorff-Besicovitch dimension. Preprint SFB-256, Bonn,2001.

[2] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 24(2004), 1-16.

[3] *Billingsley P.* Hausdorff dimension in probability theory II, Ill. J. Math., 5(1961), 291-198.

[4] *Billingsley P.* Ergodic theory and information, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1965.

[5] *Billingsley P.* Hausdorff dimension in probability theory I. llinois J. Math., vol. 4 (1960), pp. 187-209.

[6] *Chatterji S.D* Certain induced measures on the unit interval. J. London Math. Soc. 38(1963), 325-331.

[7] *Chatterji S.D.* Certain induced measures and the fractional dimensions of their supports Z.Wahrscheinlichkeitstheorie, 3(1964), 184-192.

[8] *Das M.* Billingsley's packing dimension, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 273-278

[9] *Falconer K.J.* Fractal geometry: mathematical foundations and applications. Chichester, Wiley, 2003.

[10] *Jinjun Li* Packing Dimension of Measures Associated with $\tilde{Q}$-Representation. Mediterr. J. Math., 2011.

[11] *Rogers C.A.* Hausdorff Measures. Cambridge University Press, London, 1970.

[12] *Tricot, Jr., Claude* Two definitions of fractional dimension. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc 91 (1982): 57–74.

[13] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. Київ: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. 296с.

[14] *Турбин А.Ф., Працевитый М.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. К.: Наукова думка, 1992.

References

[1] Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. *Preprint SFB-256*, Bonn, 2001.

[2] Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 24(2004), 1-16.

[3] Billingsley P. *Ill. J. Math.*, 5(1961), pp 291-198.

[4] Billingsley P. *Ergodic theory and information*, John Willey and Sons, New York, 1965.

[5] Billingsley P. *Ill. J. Math.*, 4 (1960), pp 187-209.

[6] Chatterji S.D *J. London Math. Soc.* 38(1963), pp 325-331.

[7] Chatterji S.D. *Z.Wahrscheinlichkeitstheorie*, 3(1964), pp 184-192.

[8] Das M. *Proc. Amer. Math. Soc.* 136 (2008), pp 273-278

[9] Falconer K.J. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, John Willey and Sons, Chichester, 1990.

[10] Jinjun Li *Mediterr. J. Math.*, 2011.

[11] Rogers C.A. *Hausdorff Measures.* Cambridge University Press, London, 1970.

[12] Tricot, Jr., Claude *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc 91* (1982): 57–74.

[13] Prasiovytyi M. *Fraktal'nyj pidhid u doslidzhennjah synguljarnyh rozpodiliv. (Fractal approach to investigations of singular distributions.)*, 1998, 296 p.

[14] Turbin A.F., Prasiovytyi M.V. *Fraktal'nye mnozhestva, funkcii, raspredelenija. (Fractal sets, functions, distributions.)*, 1992.