Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2012, № 13(1).— С. 78–86.

Про залежність фрактальних властивостей множини суттєво анормальних чисел від системи числення

І. І. Гарко,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Г. М. Торбін,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова, Інститут математики НАН України

Анотація. В роботі досліджується множина L_Q суттєво анормальних дійсних чисел відрізка $[0, 1]$, тобто множина дійсних чисел, в Q-розкладі яких жодна цифра не має частоти. Доводиться, що множина L_Q є суперфракталом, тобто множиною нульової міри Лебега, розмірність Хаусдорфа–Безиковича якої дорівнює 1.

До 1994 року множина анормальних чисел вважалась «достатньо малою» як в смислі міри Лебега, так і в смислі розмірності Хаусдорфа–Безиковича. Після доведення суперфрактальності множин анормальних та суттєво анормальних чисел для s-адичного та деяких інших розкладів і конструювання таких систем числення, для яких множина суттєво анормальних чисел мала повну міру Лебега, домінуючою стала гіпотеза про те, що суперфрактальність (як і належність до другої категорії Бера) є інваріантною властивістю множини суттєво анормальних чисел і не залежить від вибору системи числення.

В нашій роботі ця гіпотеза спростована. Показано, зокрема, що існують такі Q^*-розклади дійсних чисел, для яких відповідна множина L_{Q^*} суттєво анормальних чисел має нульову розмірність Хаусдорфа-Безиковича: $dim_H(L_{Q^*}) = 0$

Ключові слова: нормальні числа, суттєво анормальні числа, фрактал, асимптотична частота символів, розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини.

Dependence of fractal properties of the set of essentially non-normal numbers on system of numeration

I. Garko,

National Pedagogical Dragomanov University

G. Torbin,

National Pedagogical Dragomanov University, Institute for Mathematics of NASU

E-mail: garko_irinka@mail.ru, torbin@iam.uni-bonn.de

Abstract. The set L_Q of essentially non-normal numbers of the unit interval, i.e., the set of real numbers having no asymptotic frequencies of all digits in their Q-representation, is studied. It is proven that L_Q is a superfractal set, i.e., the Hausdorff–Besicovitch dimension of the set L_Q is equal to 1 and the Lebesgue measure of L_Q is equal to 0.

Till 1994 the set of non-normal numbers was considered as a "rather small" one in the sense of Lebesgue measure as well as in the sense of the Hausdorff–Besicovitch dimension. After the proof of the superfractality of sets of non-normal and essentially non-normal numbers for s-adic and some other expansions and construction of such systems of representation for which the set of essentially non-normal numbers is of full Lebesgue measure, the conjecture about superfractality (as well as that it is of the second Baire category) is an invariant property of the set of essentially non-normal numbers became dominating and it doesn't depend on a choice of a system of representation.

In the paper we constructed a counterexample to the above mentioned conjecture. It is shown, in particular, that there are Q^*-expansions of real numbers, for which the corresponding set of essentially non-normal numbers has zero Hausdorff–Besicovitch dimension: $\dim_H(L_{Q^*}) = 0$.

AMS Subject Classifications (2010): 11B13, 11K55.

Key words: normal number, essentially non-normal-number, asymptotic frequency of symbols, Hausdorff dimension of sets.

1. Вступ

На сьогодні існує значна кількість систем зображення дійсних чисел, які суттєво між собою відрізняються [5]. Для кожної системи існують класи фракталів та інших математичних об'єктів, які активно досліджуються сучасними математиками. Однією із актуальних проблем є залежність між властивостями «нормальності» дійсних чисел та частотами їх цифр у системі числення, в якій вони розглядаються.

Дослідженнями цієї проблематики для класичного s-адичного зображення числа займалися С. Альбеверіо, М. Працьовитий, Г. Торбін. У 2005 р. в роботі [2] було отримано посилений результат роботи [3] 1995 р. і доведено, що множина L_s суттєво анормальних чисел суперфрактальна і є множиною другої категорії Бера, тобто множина L_s є наймасивнішою як в топологічному, так і в фрактальному розумінні, але при цьому є «малою» відносно міри Лебега.

Крім того, у роботі [2] було розглянуто узагальнення s-адичного зображення — Q^*-зображення дійсних чисел, було встановлено існування таких Q^*-зображень дійсних чисел, що частоти всіх цифр не існують. Властивості Q_∞-розкладів дійсних чисел вивчались у роботах М. Працьовитого, Г. Торбіна, а також Р. Нікіфорова [4].

У нашій роботі йтиметься про множину L_Q суттєво анормальних чисел, а саме про її фрактальні властивості. Щодо топологічних властивостей, то нескладно показати, що множина L_Q є множиною другої категорії Бера, тобто є достатньо масивною в топологічному розумінні. Для цього можна розглянути функцію $y = f(x) : L_s \to L_Q$, тобто кожному $x = \Delta^s_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}$ поставити у відповідність $y(x) = \Delta^Q_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}$. Легко бачити, що $y(x)$ — строго зростаюча та неперервна. Крім того, функція $y^{-1}(x)$ також неперервна, тому $y = f(x)$ задає гомеоморфізм. Враховуючи те, що гомеоморфізм зберігає всі топологічні властивості, маємо: L_Q — множина другої категорії Бера.

2. Про суперфрактальність множини Q-суттєво анормальних чисел.

Нагадаємо поняття Q-розкладу дійсних чисел.

Нехай $Q = \begin{pmatrix} q_0 & q_0 & \ldots & q_0 & \ldots \\ q_1 & q_1 & \ldots & q_1 & \ldots \\ q_2 & q_2 & \ldots & q_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{s-1} & q_{s-1} & \ldots & q_{s-1} & \ldots \end{pmatrix}$ — матриця з наступними властивостями:

1) $0 < q_i < 1$, 2) $\sum\limits_{i=0}^{s-1} = 1$, $i \in A = \{0, 1, \ldots, (s-1)\}$.

Використовуючи матрицю Q, означимо Q-розбиття відрізка $[0, 1]$.

1 крок. Розіб'ємо відрізок $[0, 1]$ на s відрізків $\Delta^Q_0, \Delta^Q_1, \ldots, \Delta^Q_{s-1}$, де $|\Delta^Q_i| = q_i$. Назвемо Δ^Q_i циліндрами першого рангу.

2 крок. Кожен циліндр першого рангу ми розіб'ємо на s відрізків, які назвемо циліндрами другого рангу, причому $|\Delta^Q_{i_1 0}| : |\Delta^Q_{i_2 1}| : \ldots : |\Delta^Q_{i_s(s-1)}| = q_0 : q_1 : \ldots : q_{s-1}$. n-й крок. Кожен циліндр $(n-1)$-го рангу $\Delta^Q_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$ розіб'ємо на s відрізків n-го рангу, довжини яких знаходяться в пропорції: $q_0 : q_1 : \ldots : q_{s-1}$.

Нескладно показати, що $|\Delta^Q_{i_1 i_2 \ldots i_n}| = q_{i_1} \cdot q_{i_2} \cdot \ldots \cdot q_{i_n} \to 0 (n \to \infty)$ і послідовність вкладених відрізків $\Delta^Q_{i_1} \supset \Delta^Q_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset \Delta^Q_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \ldots$ має спільну точку x.

І навпаки, якщо точка x не є кінцем будь-якого відрізка вищезазначеного розбиття, тоді для точки x існує єдина послідовність вкладених відрізків $\Delta^Q_{i_1(x)} \supset \Delta^Q_{i_1(x) i_2(x)} \supset \ldots \supset \Delta^Q_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_n(x)} \supset \ldots$, що мають єдину спільну точку x.

Символічно писатимемо

$$x = \Delta^Q_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_n(x) \ldots}. \tag{1}$$

Рівність (1) називається Q-розкладом числа x. Якщо точка x є кінцем будь-якого відрізка вищезазначеного розбиття, то x має два Q-розклади.

Нехай $N_i(x, n)$ — кількість цифр «i» серед перших n цифр Q-розкладу числа x,$i \in A$.

Означення 1. Множина $L_Q = \{x : \lim \frac{N_i(x,n)}{n}$ не існує $\forall i \in A = \{0, 1, \dots, (s-1)\}\}$ називається множиною суттєво анормальних чисел.

Означення 2. Розмірністю Хаусдорфа ймовірнісної міри μ називається число: $\dim_H \mu = \inf\limits_{E \in N(\mu)} \{\dim_H E, E \in B\}$,
де B — борелівська σ-алгебра підмножин,
$N(\mu)$ — клас всеможливих борелівських носіїв ймовірнісної міри μ, тобто $N(\mu) = \{E : E \in B, \mu(E) = 1\}$.

Теорема 1. *Множина L_Q суттєво анормальних чисел є суперфракталом, тобто множиною нульової міри Лебега, розмірність Хаусдорфа–Безиковича якої дорівнює 1.*

Доведення. Розглянемо множину

$$I_p = \{x : x = \Delta^Q \underbrace{\alpha_1 \dots \alpha_p 01 \dots (s-1)}_{\textit{перша серія}} \underbrace{\alpha_{r_1+1} \dots \alpha_{r_1+2p} 0011 \dots (s-1)(s-1) \dots}_{\textit{друга серія}}$$

$$\dots \underbrace{\alpha_{r_{m-1}+1} \dots \dots \alpha_{r_{m-1}+2^{m-1}p} \overbrace{00 \dots 0}^{2^{m-1}} \overbrace{11 \dots 1}^{2^{m-1}} \dots \overbrace{(s-1)(s-1) \dots (s-1)}^{2^{m-1}}}_{m\textit{-та серія}} \dots\},$$

де α_{r_m+j} - довільна цифра з множини A: $r_m = (p+s)(2^m - 1)$, $j = j(m)$ пробігає множину $\{1, 2, \dots, 2^m p\}$,$m \in N$.

Нескладно показати, що $I_p \subset L_Q$. Для цього треба показати, що для довільного $x \in I_p$ та довільного $i \in A$ границі $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{N_i(x,n)}{n}$ не існує.

Нехай x — довільне фіксоване дійсне число з множини I_p і i — довільне фіксоване ціле з A. Розглянемо дві послідовності $k'_m(i) = k'_m$ і $k''_m(i) = k''_m$, $m \in N$, де $k'_m + 1$ — номер позиції, з якої починається m-та серія фіксованої цифри «i» і k''_m — номер позиції, на якій m-та серія фіксованої цифри «i» закінчується.

Після підрахунку отримаємо:
$k'_m = r_{m-1} + 2^{m-1}p + i \cdot 2^{m-1} = (p+s)(2^{m-1} - 1) + 2^{m-1}(p+i)$,
$k'\prime_m = r_{m-1} + 2^{m-1}p + i \cdot 2^{m-1} + 2^{m-1} = (p+s)(2^{m-1} - 1) + 2^{m-1}(p+i+1)$,
$N_i(x, k'_m) = (2^{m-1} - 1) + \tau_i(x, k'_m)$,
$N_i(x, k''_m) = (2^{m-1} - 1) + \tau_i(x, k'_m) + 2^{m-1}$,
де $\tau_i(x, k'_m)$ — кількість цифр «i» серед цифр послідовності $\alpha_{r_k+j_k}(x)$,$k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$,$j_k \in \{1, 2, \dots, 2^k p\}$.

Очевидно, що $0 \le \tau_i(x, k'_m) \le (2^m - 1)p$.

Розглянемо вираз

$$\frac{N_i(x,k'_m)}{k'_m}=\frac{(2^{m-1}-1)+\tau_i(x,k'_m)}{(p+s)(2^{m-1}-1)+2^{m-1}(p+i)}=\frac{1-\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{\tau_i(x,k'_m)}{2^{m-1}}}{(1-\frac{1}{2^{m-1}})(p+s)+p+i}. \qquad (2)$$

Якщо границі $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\tau_i(x,k'_m)}{2^{m-1}}$ (3) не існує, то границі виразу (2) також не існує. Якщо границя (3) існує і рівна $\tau_i(x)$, то $\tau_i(x)\leq 2p$.

Тоді $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{N_i(x,k'_m)}{k'_m}=\frac{1+\tau_i(x)}{(p+s)+p+i}$.

В такому випадку існує наступна границя:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{N_i(x,k''_m)}{k''_m}=\frac{2+\tau_i(x)}{(p+s)+p+i+1}\neq\frac{1+\tau_i(x)}{(p+s)+p+i}.$$

Таким чином, цифра «i» не має частоти в Q-розкладі числа $x\in I_p$. А отже, множина I_p є підмножиною множини L_Q.

Для того, щоб знайти розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини I_p, побудуємо таку сингулярну ймовірнісну міру, що множина I_p буде її спектром.

Нехай $Fix(j)$ — множина номерів місць, на яких стоїть фіксована цифра «j» в Q-розкладі числа $x\in I_p$.

Тобто $Fix(j)=\bigcup\limits_{m=0}^{\infty}\{r_m+2^m(p+j)+1,r_m+2^m(p+j)+2,\dots,r_m+2^m(p+j)+2^m\}$.

Тоді $Fix=\bigcup\limits_{j}Fix(j)$, $Flex=N\backslash Fix$.

Тоді множину I_p можна задати наступним чином:

$$I_p=\{x: x=\Delta^Q_{i_1(x)\dots i_k(x)\dots}; i_k(x)=j, \textit{якщо } k\in Fix(j); i_k(x)\in\{0,1,\dots,s-1\}, \textit{якщо } k\in Flex\}.$$

Нехай $\xi=\Delta^Q_{\xi_1\xi_2\dots\xi_k\dots}$ — випадкова величина з незалежними Q-символами (див.[1]). Виберемо розподіли випадкових величин ξ_k наступним чином:

1) Якщо $k\in Fix(j)$, то

ξ_k	j
	$p_{jk}=1$

2) Якщо $k\in Flex$, то

ξ_k	0	1	$\dots$	$s-1$
	q_0	q_1	$\dots$	q_{s-1}

Нехай μ_ξ ймовірнісна міра, відповідна випадковій величині ξ з незалежними Q-символами. За побудовою, множина I_p є спектром міри μ_ξ. Тому $\dim_H(I_p)\geq\dim_H\mu_\xi$.

За теоремою 1 роботи [**1**]: $dim_H \mu_\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{H_n}{B_n}$, де $H_n = \sum\limits_{j=1}^{n} h_j$, $h_j = -\sum\limits_{i=0}^{s-1} p_{ij} \ln p_{ij}$; $B_n = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, $b_j = -\sum\limits_{i=0}^{s-1} q_{ij} \ln p_{ij}$.

В нашому випадку

$$h_k = \begin{cases} -\sum\limits_{i=0}^{s-1} q_i \ln q_i, & \text{при } k \in Flex, \\ 0, & \text{при } k \in Fix(j). \end{cases}$$

$$b_k = \begin{cases} -\sum\limits_{i=0}^{s-1} q_i \ln q_i, & \text{при } k \in Flex, \\ -\ln q_j, & \text{при } k \in Fix(j). \end{cases}$$

Розглянемо послідовність $\frac{h_1}{b_1}, \frac{h_1+h_2}{b_1+h_2}, \ldots, \frac{h_1+h_2+\ldots+h_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} \ldots$.

Нехай $\frac{h_1+h_2+\ldots+h_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} = c_n$, тоді маємо послідовність $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$.

Тоді $c_1 = c_2 = \ldots = c_p = 1$, $c_{p+1} = \frac{p\cdot h_1+0}{p\cdot h_1 + \ln\frac{1}{q_0}} < 1 = c_p$, $c_{p+2} = \frac{p\cdot h_1+0+0}{p\cdot h_1+\ln\frac{1}{q_0\cdot q_1}} < c_{p+1}, \ldots,$ $c_{r_1} = c_{p+s} = \frac{p\cdot h_1}{p\cdot h_1+\ln\frac{1}{q_0\cdot q_1\cdot\ldots\cdot q_{s-1}}} < c_{p+s-1}$, $c_{p+s+1} = \frac{(p+1)\cdot h_1}{(p+1)\cdot h_1+\ln\frac{1}{q_0\cdot q_1\cdot\ldots\cdot q_{s-1}}} > c_{p+s}$ і т.д.

Позначимо $\ln\frac{1}{q_0\cdot q_1\cdot\ldots\cdot q_{s-1}} = b$.

Отже, перші p членів послідовності $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ рівні одиниці. Далі, починаючи з члена c_{p+1} і до $c_{p+s} = c_{r_1}$ значення спадають, а з c_{p+s+1} до $c_{p+s+2p} = c_{3p+s}$ зростають, але вже не досягають одиниці, і з c_{3p+s+1} до $c_{p+s+2p+2s} = c_{3(p+s)} = c_{r_2}$ знову спадають, і ситуація повторюється. За допомогою таких міркувань, можна зробити висновок, що найменших значень послідовність $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ буде набувати в кінці серій.

Тому $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{h_1+h_2+\ldots+h_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{h_1+h_2+\ldots+h_{r_n}}{b_1+b_2+\ldots+b_{r_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2^n-1)p\cdot h_1}{(2^n-1)p\cdot h_1+(2^n-1)b} = \frac{p\cdot h_1}{p\cdot h_1+b}$.

Отже, $\dim_H \mu_\xi = \frac{p\cdot h_1}{p\cdot h_1+b} \le \dim_H(I_p)$.

Легко бачити, що $L_Q \supset \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} I_p$, а отже,

$$\dim_H(L_Q) \ge \dim_H(\bigcup_{p=1}^{\infty} I_p) = \sup_p \dim_H(I_p) = \sup_p \frac{p\cdot h_1}{p\cdot h_1 + b} = 1.$$

З іншого боку, $L_Q \subset [0,1]$, тому $\dim_H(L_Q) \le 1$.

Отже, $\dim_H(L_Q) = 1$ і множина L_Q суттєво анормальних чисел є суперфракталом.

$\square$

3. Залежність фрактальних властивостей множини суттєво анормальних чисел від системи числення.

Теорема 2. *Нехай* $Q^* = \|q_{ik}\|$, $i \in \{0,1,2\}$, $q_{2k} = \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$, $q_{0k} = q_{1k} = \frac{1-q_{2k}}{2}$.
Тоді $\dim_H(L_{Q^*}) = 0$.

Доведення. Нехай $I_p = \{x : \textit{в } Q^* - \textit{розкладі числа } x \textit{ є безліч цифр «2»}\}$. Покажемо, що $\dim_H I = 0$.

Зафіксуємо деяке $\alpha > 0$. Тоді для $\alpha\ \exists\ k_0 \in N : \forall k > k_0, \frac{3}{k^\alpha} < 1$.
Завжди можна вибрати k_1 так, щоб $\frac{3}{(k+1)^{k+1}} < 1$, $\forall k > k_1$.
Також існує $k_2 : \frac{1}{2^k} < \varepsilon, \forall k > k_2$. Тоді $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$.

Розглянемо множини:

$$I_{G,1} = \{x : \Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{G-1}(x)\alpha_G(x)2\alpha_{G+2}(x)\ldots}, \alpha_j(x) \in \{0,1,2\}\},$$

$$I_{G,2} = \{x : \Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_G(x)\alpha_{G+1}(x)2\alpha_{G+3}(x)\ldots}, \alpha_j(x) \in \{0,1,2\}\},$$

$$\ldots$$

$$I_{G,m} = \{x : \Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{G+m-2}(x)\alpha_{G+m-1}(x)2\alpha_{G+m+1}(x)\ldots}, \alpha_j(x) \in \{0,1,2\}\}.$$

Нехай $x \in I \Rightarrow x \in I_{G,m}$ для деякого $m \in N$, $\forall G \in N$. А отже, з того, що $x \in I$ випливає, що $x \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} I_{G,m}$.

Множину $I_{G,1}$ можна покрити за допомогою 3^G циліндрів виду $\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{G-1}(x)\alpha_G(x)2}$, довжиною

$$|\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{G-1}(x)\alpha_G(x)2}| = q_{\alpha_1(x)\cdot 1} \cdot q_{\alpha_2(x)\cdot 2} \cdot \ldots \cdot q_{2\cdot(G+1)} < q_{2\cdot(G+1)} = \frac{1}{(G+1)^{G+1}}.$$

Тоді α-об'єм даного покриття не перевищує

$$3^G \cdot \left(\frac{1}{(G+1)^{G+1}}\right)^\alpha \leq \frac{3^G}{G^{G\alpha}} = \left(\frac{3}{G^\alpha}\right)^G, (G > k_0)$$

Множину $I_{G,2}$ можна покрити за допомогою 3^{G+1} циліндрів виду $\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_G(x)\alpha_{G+1}(x)2}$, довжиною

$$|\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_G(x)\alpha_{G+1}(x)2}| = q_{\alpha_1(x)\cdot 1} \cdot q_{\alpha_2(x)\cdot 2} \cdot \ldots \cdot q_{2\cdot(G+2)} < q_{2\cdot(G+2)} = \frac{1}{(G+2)^{G+2}}.$$

Тоді α-об'єм даного покриття не перевищує

$$3^{G+1} \cdot \left(\frac{1}{(G+2)^{G+2}}\right)^\alpha \leq \frac{3^{G+1}}{G^{(G+1)\alpha}} = \left(\frac{3}{G^\alpha}\right)^{G+1}, (G > k_0)\ldots$$

Множину $I_{G,m}$ можна покрити за допомогою 3^{G+m-1} циліндрів виду $\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{G+m-1}(x)2}$, довжиною

$$|\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{G+m-2}(x)\alpha_{G+m-1}(x)2}| = q_{\alpha_1(x)\cdot 1} \cdot q_{\alpha_2(x)\cdot 2} \cdot \ldots \cdot q_{2\cdot(G+m-1)} < q_{2\cdot(G+m-1)} = \frac{1}{(G+m)^{G+m}}.$$

Тоді α-об'єм даного покриття не перевищує

$$3^{G+m-1} \cdot \left(\frac{1}{(G+m)^{G+m}}\right)^\alpha \leq \frac{3^{G+m-1}}{G^{(G+m-1)\alpha}} = \left(\frac{3}{G^\alpha}\right)^{G+m-1}, (G > k_0)$$

Таким чином множину I можна покрити, покривши всі $I_{G,1}, I_{G,2}, \ldots, I_{G,m}, \ldots$. Тоді відповідний α-об'єм не перевищує величини

$$\left(\frac{3}{G^\alpha}\right)^G + \left(\frac{3}{G^\alpha}\right)^{G+1} + \ldots + \left(\frac{3}{G^\alpha}\right)^{G+m-1} + \ldots = \frac{\left(\frac{3}{G^\alpha}\right)^G}{1-\frac{3}{G^\alpha}} = \frac{G^\alpha}{G^\alpha - 3} \cdot \left(\frac{3}{G^\alpha}\right)^G, \forall G > k_0.$$

Якщо $G \to \infty$, то $\left(\frac{3}{G^\alpha}\right)^\alpha \to 0$, тому $H^\alpha_\varepsilon(I) = 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \alpha > 0$.
Тоді $H^\alpha(I) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} H^\alpha_\varepsilon(I) = 0$, і $\dim_H I = \inf\{\alpha : H^\alpha(I) = 0\} = 0$.

Ми показали,що $\dim_H I = 0$. Треба показати, що з того, що $\dim_H I = 0$ випливає $\dim_H(L_{Q^*}) = 0$.

Нехай $x \in L_{Q^*}$. Тоді $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{N_2(x,k)}{k}$ не існує, а тому послідовність $\left\{\frac{N_2(x,k)}{k}\right\}$ має хоча б дві різні часткові границі, а це означає, що хоча б одна з них не рівна нулю, тобто $\exists \{k_s\} : \lim\limits_{s\to\infty} \frac{N_2(x,k_s)}{k_s} = c_0 > 0$, що свідчить про те, що в Q^*-розкладі x є безліч цифр «2», а отже, $x \in I$.

Отже, $I \supset L_{Q^*}$, а тому $\dim_H(L_{Q^*}) = 0$. $\square$

Таким чином, гіпотеза про те, що множина суттєво анормальних чисел буде суперфрактальною незалежно від вибору системи числення, в якій вона розглядається, спростована.

Література

[1] S. Albeverio, G. Torbin, Fractal properties of singular continuous probability distributions with independent Q*-digits, Bull. Sci. math. 129(2005) 356-357.

[2] S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, G. Torbin, Topological and fractal properties of real numbers which are not normal, Bull. Sci. math. 129(2005) 615-630.

[3] М.В. Працьовитий, Г.М, Торбін. Суперфрактальність множини чисел, які не мають частоти n-адичних знаків, та фрактальні розподіли ймовірностей. // Укр. мат. журн. - 1995, №7, с. 971-975.

[4] R. Nikiforov, Superfractality of sets of Q_∞-quasi-normal and Q_∞-nonnormal numbers// International Conference on Algebra dedicated to 100-th anniversary of S.M.Chernikov, August 20-26, 2012, Kyiv, Ukraine. Kyiv: 2012. - P. 104.

[5] F. Schweiger, Ergodic Theory of Fibred Systems and Metric Number Theory, Clarendon Press, Oxford, 1995.

References

[1] S. Albeverio, G. Torbin, *Bull. Sci. Math.* 129 (2005) 356-357.

[2] S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, G. Torbin, *Bull. Sci. Math.* 129 (2005) 615-630.

[3] M. Pratsiovytyi, G. Torbin *Ukr. Math. Jour.* - 1995, №7, 971-975.

[4] R. Nikiforov *International Conference on Algebra dedicated to 100-th anniversary of S.M.Chernikov, August 20-26, 2012, Kyiv, Ukraine* Kyiv: 2012. - P. 104.

[5] F. Schweiger, *Ergodic Theory of Fibred Systems and Metric Number Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1995.