Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2012, № 13(1).— С. 151–162.

УДК 519.21

Про розмірність Хаусдорфа-Безиковича узагальнених самоподібних множин, породжених нескінченними IFS

Р. О. Нікіфоров,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Г. М. Торбін,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Анотація. У роботі вивчається питання обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича N-самоподібної множини, яка є узагальненням самоподібної множини на випадок нескінченної кількості стискуючих перетворень подібності. Досліджено клас N-самоподібних компактів, які є спектрами випадкових величин з незалежними Q_∞-символами та повністю вивчено їх фрактальні властивості.

Ключові слова: Q_∞-зображення, самоподібні множини, N-самоподібні множини, сингулярно неперервні розподіли ймовірностей, розмірність Хаусдорфа–Безиковича, фрактали, IFS

On the Hausdorff dimension of generalized self-similar sets generated by infinite IFS

R. Nikiforov,

National Pedagogical Dragomanov University

G. Torbin,

National Pedagogical Dragomanov University

Abstract. The paper is devoted to the study of fine fractal properties of generalized self-similar sets, which are defined as attractors generated by infinite linear iterated function systems. We investigate the Hausdorff dimension of generalized self-similar sets, which are supports of measures with independent Q_∞-digits.

Mathematics Subject Classification (2010): 11K55, 26A30, 28A80, 60G30.

Key words: Q_∞-expansion, self-similar sets, N-self-similar sets, singularly continuous probability distributions, Hausdorff–Besicovitch dimension, fractals, IFS

E-mail: rnikiforov@gmail.com, torbin@iam.uni-bonn.de

1. Вступ

Поняття самоподібної множини добре відоме в математиці (див. наприклад [**7, 16**]) значною мірою завдяки розвиненій Джоном Хатчінсоном теорії систем ітеруючих функцій (IFS) та її багаточисельним застосуванням ([**6**]). Нагадаємо ([**11, 6**], що непорожня множина E простору R^n називається самоподібною, якщо існує скінченний набір стискуючих перетворень подібності $f_1, \dots, f_n$ з коефіцієнтами подібності $k_1, \dots, k_n$ такий, що

$$E = f_1(E) \cup f_2(E) \cup \ldots \cup f_n(E). \tag{1}$$

Взагалі кажучи, рівність (1) не дозволяє однозначно визначити множину E. У той же час можна довести [**7, 6**], що існує єдина компактна множина, що задовольняє рівність (1). Проблема обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича самоподібних компактів вирішена для випадку, коли множини $f_i(E)$ перетинаються «несуттєво». Існують різні підходи до означення «малості» перетинів:

(1) $f_i(E) \cap f_j(E) = \emptyset (\forall i \neq j)$;
(2) $\dim_H(E) > \dim_H(f_i(E) \cap f_j(E))(\forall i \neq j)$;
(3) умова відкритої множини: існує відкрита обмежена множина U така, що $U \supset \bigcup\limits_{i=1}^{n}$ і $f_i(U) \cap f_j(U) = \emptyset, \forall i \neq j$.

При виконанні довільної з цих умов розмірність Хаусдорфа-Безиковича самоподібного компакта є розв'язком рівняння (див. [**6, 11**]) $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i^x = 1$, причому міра Хаусдорфа цього компакта, порядок якої співпадає з $\dim_H E$, є скінченною і ненульовою.

В монографії [**16**] введено в розгляд поняття N-самоподібної множини, яке є узагальненням поняття самоподібної множини на випадок нескінченної кількості стискуючих перетворень подібності і зроблено спробу обгрунтувати, що при виконанні умови $\dim_H(f_i(E) \cap f_j(E)) < \dim_H(E)(\forall i \neq j)$ розмірність Хаусдорфа-Безиковича самоподібного компакта є розв'язком рівняння

$$\sum_{i=1}^{\infty} k_i^x = 1. \tag{2}$$

Звичайно, якщо існує додатне число α_0, для якого міра Хаусдорфа $H^{\alpha_0}(E)$ є скінченною і ненульовою, то α_0 є розмірністю Хаусдорфа-Безиковича і одночасно коренем рівняння (2). Ми показуємо, що, взагалі кажучи, розмірність Хаусдорфа-Безиковича N-самоподібного компакта не обов'язково є розв'язком рівняння (2). У роботі досліджено клас N-самоподібних компактів, які є спектрами випадкових величин з незалежними Q_∞-символами та повністю вивчено їх фрактальні властивості.

2. Q_∞-зображення дійсних чисел

Нехай $Q_\infty = (q_0, q_1, \ldots, q_i, \ldots)$ — стохастичний вектор з додатними координатами. Нагадаємо означення Q_∞-розбиття одиничного інтервалу $[0,1)$ (див. [**11**]).

Крок 1. Розбиваємо інтервал $[0,1)$ (зліва направо) на інтервали Δ_{i_1}, $i_1 \in \{0,1,2,\ldots\}$ (без спільних внутрішніх точок) довжини $|\Delta_{i_1}| = q_{i_1}$,

$$[0,1) = \bigcup_{i_1=0}^{\infty} \Delta_{i_1}.$$

Інтервали Δ_{i_1} називаються циліндрами першого рангу.

Крок $k \geq 2$. Кожен з інтервалів $(k-1)$-рангу $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ розкладаємо (зліва направо) в об'єднання інтервалів (без спільних внутрішніх точок) *k−го рангу* $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}$,

$$\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} = \bigcup_{i_k=0}^{\infty} \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k},$$

довжини яких

$$|\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}| = q_{i_1} \cdot q_{i_2} \cdots q_{i_k} = \prod_{s=1}^{k} q_{i_s} \tag{3}$$

відносяться наступним чином

$$\left|\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 0}\right| : \left|\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 1}\right| : \cdots : \left|\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k}\right| : \cdots = q_0 : q_1 : \cdots : q_{i_k} : \cdots \qquad .$$

Для довільної послідовності індексів $\{i_k\}$, $i_k \in \{0,1,2\ldots\}$, існує послідовність вкладених інтервалів

$$\Delta_{i_1} \supset \Delta_{i_1 i_2} \supset \cdots \supset \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k} \supset \cdots$$

таких, що $|\Delta_{i_1 \ldots i_k}| \to 0$, $k \to \infty$, завдяки (3). Отже, існує єдина точка $x \in [0,1]$, що належить всім цим інтервалам Δ_{i_1}, $\Delta_{i_1 i_2}$, ..., $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, ...

І навпаки, для довільної точки $x \in [0,1)$ існує послідовність вкладених інтервалів $\Delta_{i_1} \supset \Delta_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k} \supset \ldots$, що містять x, тобто,

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x)} =: \Delta_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x) \ldots} \tag{4}$$

Вираз (4) називається *Q_∞-зображенням* точки $x \in [0,1)$.

Кожна точка $x \in [0,1)$ має єдине Q_∞-зображення.

Q_∞-зображення дійсних чисел дозволяє формально просто задавати і досліджувати широкий клас одновимірних фракталів та інших об'єктів з фрактальними властивостями.

3

В роботі досліджуються фрактальні властивості множини

$$C[Q_\infty, \{V_k\}] = \{x : x = \Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}, \alpha_k \in V_k \subset \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Розглянемо можливі випадки.

а) Нехай $V_k = V$, V — скінченна множина.

У цьому випадку $C[Q_\infty, V]$ — самоподібна множина, яка задовольняє умову відкритої множини (open set condition). Тому ([**6**]) дана множина має розмірність Хаусдорфа-Безиковича, яка співпадає з коренем рівняння

$$\sum_{i \in V} q_i^x = 1,$$

причому міра Хаусдорфа, порядок якої співпадає зі значенням розмірності Хаусдорфа-Безиковича цієї множини, є нетривіальною (не рівною нулю чи нескінченності) (див. [**4**]).

б) Нехай $V_k = V$ і V — зчисленна множина.

У цьому випадку проблема обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича множини $C[Q_\infty, V]$ є значно складнішою. В роботах [**16**] зроблена спроба довести, що для довільної матриці Q_∞ і довільної підмножини $V \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини $C[Q_\infty, V]$ теж обчислюється як корінь рівняння

$$\sum_{i \in V} q_i^x = 1. \tag{5}$$

Покажемо, що це твердження, взагалі кажучи, хибне. Розглянемо матрицю Q_∞ таку, що

$$q_i = \frac{A}{(i+2)\ln^2(i+2)},$$

де $\frac{1}{A} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+2)\ln^2(i+2)}$. Нехай $V = \mathbb{N}$. Оскільки $q_0 = \frac{A}{2\ln^2 2} > 0$, то число $x = 1$ не є коренем рівняння (5), бо $\sum\limits_{i=1}^{\infty} q_i = 1 - q_0 < 1$.

З іншого боку, для довільного $0 < \alpha < 1$ числовий ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{A}{(i+2)\ln^2(i+2)} \right)^\alpha$$

буде розбігатись. Тому довільне число $x < 1$ не буде розв'язком рівняння (5). Отже, рівняння (5) не має коренів на $[0,1]$ і тому розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини $C[Q_\infty, V]$ не може бути коренем рівняння (5).

Які умови потрібно накласти на вектор Q_∞, щоб для **довільної** множини $V \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини $C[Q_\infty, V]$ співпадала з коренем рівняння (5)? Очевидно, що необхідною умовою є існування на $[0,1]$ коренів рівняння (5) для довільного $V \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Наступна теорема дає необхідні і достатні умови існування на $[0,1]$ коренів рівняння (5) для довільного $V \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Теорема 1. *Рівняння* $\sum\limits_{i\in V} q_i^x = 1$ *має корінь для всіх* $V \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{i=0}^{\infty} q_i^{\alpha} < +\infty, \forall \alpha \in (0,1]. \tag{6}$$

Доведення. *Необхідність.* Припустимо, що рівняння $\sum\limits_{i\in V} q_i^x = 1$ має корінь для всіх $V \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$, але при цьому існує таке $\alpha_0 \in (0,1)$, що $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_i^{\alpha} = +\infty$. Тоді для будь-якого $\alpha \in [0,\alpha_0]$ будемо мати $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_i^{\alpha} = +\infty$. Нехай $\alpha^* = \sup\{\alpha : \sum\limits_{i=0}^{\infty} q_i^{\alpha} = +\infty\}$.

Якщо $\alpha^* = 1$, то твердження очевидне: досить взяти $V = \mathbb{N}$. Справді, у цьому випадку

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} q_i^x = \begin{cases} 1 - q_0 < 1, \text{при } x = 1, \\ +\infty, \text{при } x \in (0,1). \end{cases}$$

Нехай $\alpha^* < 1$. Розглянемо можливі випадки поведінки ряду $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_i^{\alpha^*}$.

1) Якщо $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_i^{\alpha^*} < +\infty$, то існує $m = m(\alpha^*)$:

$$\sum_{i=m}^{\infty} q_i^{\alpha^*} < 1.$$

Виберемо $V = \{m, m+1, m+2, \ldots\}$. Тоді для всіх $x \in [0,\alpha^*) : \sum\limits_{i=m}^{\infty} q_i^x = +\infty$, а для всіх $x \in [\alpha^*, 1] : \sum\limits_{i=m}^{\infty} q_i^x < 1$, тобто, в цьому випадку рівняння (5) не має коренів на $[0,1]$.

2) Якщо $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_i^{\alpha^*} = +\infty$, то покажемо, що з даного ряду можна вибрати такий підряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_{i_n}$, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_{i_n}^{\alpha^*} < +\infty$, але $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_{i_n}^{\alpha} = +\infty$, $\forall \alpha < \alpha^*$.

Нехай $S = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln^2 k}$. Цей ряд збіжний, але ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k\ln^2 k}\right)^{\alpha}$ при будь-якому додатному $\alpha < 1$ буде розбігатись. Розглянемо часткові суми $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln^2 k}$. Тоді для $S_2 = \frac{1}{2\ln^2 2}$ існує така множина $V_2 \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$, що

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in V_2} q_i^{\alpha^*} \in [S_2, 2S_2], \\ q_i^{\alpha^*} < \frac{1}{2\ln^2 2}, \forall i \in V_2. \end{cases}$$

Для S_3 існує така скінченна множина $V_3 \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$, $V_3 \cap V_2 = \emptyset$, що

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in V_3} q_i^{\alpha^*} \in [S_3 - S_2, 2(S_3 - S_2)] = \left[\frac{1}{3\ln^2 3}, \frac{2}{3\ln^2 3}\right], \\ q_i^{\alpha^*} < \frac{1}{3\ln^2 3}, \forall i \in V_3. \end{cases}$$

Для S_{n+1} існує така скінченна множина $V_{n+1} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$, $V_{n+1} \cap V_i = \emptyset, \forall i \in \{2, 3, \ldots, n\}$, що

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in V_{n+1}} q_i^{\alpha^*} \in [S_{n+1} - S_n, 2(S_{n+1} - S_n)], \\ q_i^{\alpha^*} < \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}, \forall i \in V_{n+1}. \end{cases}$$

Нехай $V^* = \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} V_n$, $V_i \cap V_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$. Розглянемо тепер суму

$$\sum_{i \in V^*} q_i^{\alpha^*} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i \in V_n} q_i^{\alpha^*} \leq 2S_2 + 2(S_3 - S_2) + \ldots + 2(S_{n+1} - S_n) + \ldots = 2S.$$

Отже, ряд $\sum\limits_{i \in V^*} q_i^{\alpha^*}$ — збіжний.

Нехай $0 < \alpha < \alpha^*$, тоді розглянемо ряд

$$\sum_{i \in V^*} q_i^{\alpha} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i \in V_n} q_i^{\alpha} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i \in V_n} \left(q_i^{\alpha^*}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha^*}} \geq$$
$$\geq \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{i \in V_n} q_i^{\alpha^*} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha^*}} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n \ln^2 n} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha^*}}.$$

Отже, ряд $\sum\limits_{i \in V^*} q_i^{\alpha}$ — розбіжний при будь-якому додатному $\alpha < \alpha^*$.

Для збіжного ряду $\sum\limits_{i \in V^*} q_i^{\alpha^*}$ існує таке число $m = m(\alpha^*, V^*)$, що сума $\sum\limits_{n=m}^{\infty} q_{i_n}^{\alpha^*}$ буде менше ніж 1.

Виберемо тепер

$$V = \{i_m, i_{m+1}, \ldots\}, \quad V \subset V^*. \tag{7}$$

Тоді для всіх $x \in [0, \alpha^*)$ отримаємо, що $\sum\limits_{i \in V} q_i^x = +\infty$, і для всіх $x \in [\alpha^*, 1]$ отримаємо, що $\sum\limits_{i \in V} q_i^x < 1$.

Отже, і в цьому випадку рівняння (5) не має коренів на $[0, 1]$. Отримана суперечність доводить необхідність.

Достатність. Покажемо, що умова (6) є достатньою для існування кореня рівняння (5) при довільному виборі множини $V \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Якщо $V = \mathbb{N} \cup \{0\}$, то розв'язком рівняння (5) буде 1.

Припустимо, що $V \neq \mathbb{N} \cup \{0\}$ і V — зчисленна множина. Якщо $\sum\limits_{i=1}^{\infty} q_i^{\alpha} < \infty$, $\forall \alpha \in (0, 1]$, то $\sum\limits_{i \in V} q_i^{\alpha} < +\infty$, $\forall \alpha \in (0, 1]$. Але $\sum\limits_{i \in V} q_i^0 = +\infty$.

Нехай $f(\alpha, V) := \sum\limits_{i\in V} q_i^{\alpha}$. Функція $f(\alpha, V)$ є неперервною і строго спадною функцією на відрізку $[a,1]$ (при довільному виборі $a \in (0,1)$) як сума рівномірно збіжного ряду неперервних строго спадних функцій на $[a,1]$.

Оскільки $f(\alpha, V) \to +\infty$ при $\alpha \to 0$, то існує $\alpha_0 \in (0,1]$ таке, що $f(\alpha_0, V) > 1$.

Оскільки $f(1, V) = \sum\limits_{i\in V} q_i < 1$ (бо за вибором $V \neq \mathbb{N}\cup\{0\}$), то на відрізку $[0,1]$ існує єдиний корінь рівняння (5). $\square$

Теорема 2. *Якщо виконується умова* (6)*, то для довільної множини* $V \subset \mathbb{N}\cup\{0\}$ *розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини* $C[Q_\infty, V]$ *співпадає з числом* α_0*, яке є коренем рівняння* $\sum\limits_{i\in V}^{\infty} q_i^x = 1$.

Доведення. Спочатку оцінимо $\dim_H(C[Q_\infty, V])$ зверху. За теоремою 1, для довільної множини $V \subset \mathbb{N}\cup\{0\}$ існує єдиний корінь рівняння (5). Нехай $x = \alpha_0$ — цей корінь, тобто $\sum\limits_{i\in V} q_i^{\alpha_0} = 1$. Множина $C[Q_\infty, V]$ може бути покрита циліндрами першого рангу: $\left(\bigcup_{i\in V} \Delta_{i_1}\right) \supset C[Q_\infty, V]$. Відповідний α_0-об'єм дорівнює $\sum\limits_{i\in V} q_i^{\alpha_0} = 1$.

Множина $C[Q_\infty, V]$ може також бути покрита циліндрами другого рангу:

$$\sum_{i_1\in V, i_2\in V} |\Delta_{i_1 i_2}|^{\alpha_0} = \sum_{i_1\in V, i_2\in V} \left(q_{i_1}\cdot q_{i_2}\right)^{\alpha_0} = \sum_{i_1\in V}\sum_{i_2\in V} q_{i_1}^{\alpha_0}\cdot q_{i_2}^{\alpha_0} =$$
$$= \sum_{i_1\in V} q_{i_1}^{\alpha_0}\Big(\sum_{i_2\in V} q_{i_2}^{\alpha_0}\Big) = \sum_{i_1\in V} q_{i_1}^{\alpha_0}\cdot 1 = 1.$$

$C[Q_\infty, V]$ також може бути покрита циліндрами k-го рангу. α_0-об'єм відповідного покриття дорівнює

$$\sum_{i_j\in V} |\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}|^{\alpha_0} = 1, \forall k\in\mathbb{N}.$$

Тому $H_\varepsilon^{\alpha_0}(C[Q_\infty, V]) \le 1, \quad \forall\varepsilon > 0$, і, отже, $H^{\alpha_0}(C[Q_\infty, V]) \le 1$, звідки слідує верхня оцінка $\dim_H(C[Q_\infty, V]) \le \alpha_0$.

Оцінимо тепер $\dim_H(C[Q_\infty, V])$ знизу. Нехай $x = \alpha_0$ — корінь рівняння $\sum\limits_{i\in V} q_i^x = 1$ і нехай множина V має вигляд $\{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots\}$. Розглянемо множини $V_k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, $k\in\mathbb{N}, k\ge 2$. Оскільки множина $C[Q_\infty, V_k]$ задовольняє умову відкритої множини, то $\dim_H(C[Q_\infty, V_k]) = \alpha_k$, де α_k — корінь рівняння $\sum\limits_{i\in V_k} q_i^x = 1$.

Оскільки $\alpha_2 < \alpha_3 < \dots \alpha_k < \dots$ і $\alpha_k < \alpha_0, \forall k\in\mathbb{N}, k\ge 2$, то існує границя $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha^*$. Зрозуміло, що $\alpha^* \le \alpha_0$. Покажемо, що $\alpha^* = \alpha_0$.

Припустимо протилежне: нехай $\alpha^* < \alpha_0$. Тоді існує таке $\breve{\alpha}$, що $\alpha^* < \breve{\alpha} < \alpha_0$. Тоді $\sum\limits_{i\in V_k} q_i^{\breve{\alpha}} < 1$ при будь-якому $k\in\mathbb{N}$. Тому $\sum\limits_{i\in V} q_i^{\breve{\alpha}} \le 1$.

Оскільки $q_i^{\breve{\alpha}} > q_i^{\alpha_0}$, $\forall i\in V$ і $\sum\limits_{i\in V} q_i^{\alpha_0} = 1$, то $\sum\limits_{i\in V} q_i^{\breve{\alpha}} > \sum\limits_{i\in V} q_i^{\alpha_0} = 1$, що суперечить доведеній вище нерівності $\sum\limits_{i\in V} q_i^{\breve{\alpha}} \le 1$. Тому $\alpha^* = \alpha_0$.

Оскільки $C[Q_\infty, V_k] \subset C[Q_\infty, V], \forall k \in \mathbb{N}$, то за властивістю розмірності Хаусдорфа-Безиковича отримаємо, що

$$\dim_H(C[Q_\infty, V_k]) \leq \dim_H(C[Q_\infty, V]).$$

Тобто, $\alpha_k \leq \dim_H(C[Q_\infty, V])$ для будь-якого $k \geq 2$, тому

$$\alpha_0 \leq \dim_H(C[Q_\infty, V]).$$

□

Зауваження 1. *Аналогічні міркування приводять до наступного результату: Нехай для фіксованої матриці Q_∞ множина $V \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ така, що $\sum\limits_{i \in V} q_i^x = 1$ має корінь α_0 на $[0, 1]$. Тоді*

$$\dim_H(C[Q_\infty, V]) = \alpha_0.$$

Тепер розглянемо випадок, коли $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_i^\alpha = +\infty$ для деякого α. Тоді, як показано в теоремі 1, існують множини $V \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$, для яких рівняння $\sum\limits_{i \in V} q_i^x = 1$ не має коренів.

У цьому випадку розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини $C[Q_\infty, V]$ можна обчислити за допомогою таких результатів.

Теорема 3. *Нехай Q_∞ і $V = \{i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots\}$ вибрані так, що рівняння $\sum\limits_{i \in V} q_i^x = 1$ не має коренів на $[0, 1]$. Тоді*

$$\dim_H(C[Q_\infty, V]) = \lim_{k \to \infty} \dim_H(C[Q_\infty, V_k]),$$

де $V_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$.

Доведення. Множини $C[Q_\infty, V_k]$ — самоподібні й задовольняють умову відкритої множини. Тому розмірність α_k кожної з них може бути отримана як розв'язок відповідного рівняння $\sum\limits_{i \in V_k} q_i^x = 1$. Для довільного натурального k виконуються нерівності

$$\alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_{k-1} < \alpha_k < 1.$$

Тому існує границя

$$\lim_{k \to \infty} \alpha_k = \alpha^*.$$

Зрозуміло, що $\alpha^* \leq \dim_H(C[Q_\infty, V])$, бо $C[Q_\infty, V_k] \subset C[Q_\infty, V], \forall k \geq 2$. Припустимо, що $\alpha^* < \dim_H(C[Q_\infty, V])$. Тоді існує таке число $\check{\alpha}$, що $\alpha^* < \check{\alpha} < \dim_H(C[Q_\infty, V])$.

Оскільки $\sum\limits_{i \in V_k} q_i^{\alpha_k} = 1$ і $\alpha_k < \check{\alpha}$, то для будь-якого $2 \leq k \in \mathbb{N}$ будемо мати

$$\sum_{i \in V_2} q_i^{\check{\alpha}} < \sum_{i \in V_3} q_i^{\check{\alpha}} < \ldots < \sum_{i \in V_k} q_i^{\check{\alpha}} < 1. \tag{8}$$

Оскільки послідовність часткових сум обмежена одиницею, то ряд $\sum\limits_{i\in V} q_i^{\breve{\alpha}}$ буде збіжним і сума буде не більша за 1.

З іншого боку, $H^{\breve{\alpha}}(C[Q_\infty, V]) = \infty$ за означенням розмірності Хаусдорфа-Безиковича (бо $\breve{\alpha} < \dim_H(C[Q_\infty, V])$). Тоді $\breve{\alpha}$-мірна міра Хаусдорфа множини $C[Q_\infty, V]$ відносно сімейства Φ покриттів, породжених Q_∞-розбиттям одиничного відрізка теж буде $H^{\breve{\alpha}}(C[Q_\infty, V], \Phi) = \infty$. Оскільки множину $C[Q_\infty, V]$ можна покрити, використовуючи лише циліндричні відрізки Q_∞-розбиття з номерами з множини V, то для довільного $M > 0$ існує $k(M)$ таке, що для довільного $k > k(M)$ виконується

$$\sum_{\substack{i_q\in V\\ q\in\{1,\dots,k\}}} |\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}|^{\breve{\alpha}} > M.$$

Але за (8) отримаємо

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i_q\in V\\ q\in\{1,\dots,k\}}} |\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}|^{\breve{\alpha}} &= \sum_{\substack{i_q\in V\\ q\in\{1,\dots,k-1\}}} |\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}|^{\breve{\alpha}} \cdot \sum_{i_k\in V} q_{i_k}^{\breve{\alpha}} < \sum_{\substack{i_q\in V\\ q\in\{1,\dots,k-1\}}} |\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}|^{\breve{\alpha}} = \\ &= \sum_{\substack{i_q\in V\\ q\in\{1,\dots,k-2\}}} |\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-2}}|^{\breve{\alpha}} \cdot \sum_{i_{k-1}\in V} q_{i_{k-1}}^{\breve{\alpha}} < \sum_{\substack{i_q\in V\\ q\in\{1,\dots,k-2\}}} |\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-2}}|^{\breve{\alpha}} < \\ &< \dots < \sum_{i_1\in V} |\Delta_{i_1}|^{\breve{\alpha}} = \sum_{i_1\in V} q_i^{\breve{\alpha}} < 1.\end{aligned}$$

Виникає суперечність. Отже,

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \dim_H(C[Q_\infty, V]),$$

де $\alpha_k = \dim_H(C[Q_\infty, V_k])$ і $C[Q_\infty, V_k] \subset C[Q_\infty, V]$. □

Теорема 4. *Якщо для множини* $V \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ *і для будь-якого* $\alpha \in [0,1)$ *виконується* $\sum\limits_{i\in V} q_i^{\alpha} = +\infty$, *то*

$$\dim_H(C[Q_\infty, V]) = 1.$$

Доведення. Розглянемо множину $V = \{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots\}$ і послідовність її вкладених скінченних підмножин $\{V_k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}\}, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Розмірність α_k кожної з множин $C[Q_\infty, V_k]$ може бути отримана як розв'язок відповідного рівняння $\sum\limits_{i\in V_k} q_i^x = 1$. Окрім того, виконуються нерівності $\alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_{k-1} < \alpha_k < 1$ для довільного натурального k. Тому існує границя

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha^*.$$

Покажемо, що $\alpha^* = 1$. Припустимо протилежне: нехай $\alpha^* < 1$. Тоді існує таке число $\breve{\alpha}$, що $\alpha^* < \breve{\alpha} < 1$.

Оскільки $\sum\limits_{i\in\{V_k\}} q_i^{\alpha_k} = 1$ і $\alpha_k < \check{\alpha}$, то для будь-якого $2 \leq k \in \mathbb{N}$ будемо мати

$$\sum_{i\in V_2} q_i^{\check{\alpha}} < \sum_{i\in V_3} q_i^{\check{\alpha}} < \ldots < \sum_{i\in V_k} q_i^{\check{\alpha}} < 1.$$

Оскільки послідовність часткових сум обмежена одиницею, то ряд $\sum\limits_{i\in V} q_i^{\check{\alpha}}$ буде збіжним і сума буде не більша за 1. Але за умовою $\sum\limits_{i\in V} q_i^{\alpha} = +\infty$ для будь-якого $\alpha < 1$. Маємо суперечність. Отже, $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 1$, де $\alpha_k = \dim_H(C[Q_\infty, V_k])$ і $C[Q_\infty, \{V_k\}] \subset C[Q_\infty, V]$. За властивістю розмірності Хаусдорфа-Безиковича отримали, що $\dim_H(C[Q_\infty, V]) = 1$. $\square$

Зауваження 2. *Ці результати дають вичерпну відповідь на питання обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича множини $C[Q_\infty, V]$ і дозволяють будувати суперфрактальні розподіли з незалежними однаково розподіленими символами.*

Література

[1] *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols //submitted to J. Funct. Anal., Preprint SFB-611, Bonn (http://front.math.ucdavis.edu/0308.5007).

[2] *Albeverio S., Torbin G.* Image measures of infinite product measures and generalized Bernoulli convolutions // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2004. — № 5. — С. 248-264.

[3] *Albeverio S., Torbin G.* Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^*-digits // Bull. Sci. Math., **129** (2005), no.4, P.356-367.

[4] *Bandt, C. and Graf, S.* Self-similar sets. VII. A characterization of self-similar fractals with positive Hausdorff measure // Proc. Amer. Math. Soc **114** (1992), no.4, P. 995–1001.

[5] *Billingsley P.* Ergodic theory and information, John Willey and Sons, New York, 1965.

[6] *Falconer K.J.* Fractal geometry, John Wiley & Sons, 1990.

[7] J. E. Hutchinson, *Fractals and self similarity*, Indiana Univ. Math. J. 30(1981), 713 – 747.

[8] *Іваненко Г., Нікіфоров Р., Торбін Г.* Ергодичний підхід у дослідженні сингулярних імовірнісних мір // Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Фізико-математичні науки. — 2006. — **7**. — С. 126 - 142.

[9] *Moran P. A.*, Additive functions of interval and Hausdorff measure // Proc. Cambridge Phil. Soc. —1946. — **42**. — P. 15–23.

[10] *Нікіфоров Р. О., Торбін Г. М.*, Ергодичні властивості Q_∞-зображень та фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними Q_∞-символами // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2008. — **9**. — С. 80 – 103.

[11] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. —Київ: Вид–во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998.

[12] *Працьовитий М. В.* Фрактальні властивості спектра розподілу випадкової величини, Q_∞-знаки якої утворюють однорідний ланцюг Маркова // Фрактальний аналіз та суміжні

питання.— Київ: IM НАН України – НПУ імені М.П.Драгоманова.— 1998. — **2**. — С. 36 – 48.

[13] *Працьовитий М. В., Лещинський О. Л.* Властивості випадкових величин, заданих розподілами елементів свого $\tilde{Q}_\infty$-зображення // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 1997.— **57**.— С. 134 – 140.

[14] F. Schweiger, *Ergodic Theory of Fibred Systems and Metric Number Theory.* — Oxford: Clarendon Press, 1995.

[15] *Торбін Г.М.* Фрактальні властивості розподілів випадкових величин з незалежними Q^*-знаками // Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Фізико-математичні науки. — № 3, 2002. — С. 363-375.

[16] А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый, *Фрактальные множества, функции, распределения*, Наук.думка, Киев, 1992.

References

[1] *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* submitted to J. Funct. Anal., Preprint SFB-611, Bonn (http://front.math.ucdavis.edu/0308.5007).

[2] Albeverio S., Torbin G., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2004, **5**. — pp. 248-264.

[3] Albeverio S., Torbin G., *Bull. Sci. Math.*, **129** (2005), no.4, P.356-367.

[4] Bandt, C. and Graf, S., *Proc. Amer. Math. Soc*, **114** (1992), no.4, P. 995–1001.

[5] *Billingsley P.* Ergodic theory and information, John Willey and Sons, New York, 1965.

[6] *Falconer K.J.* Fractal geometry, John Wiley & Sons, 1990.

[7] J. E. Hutchinson, *Indiana Univ. Math. J.*, 30(1981), 713 – 747.

[8] Ivanenko G., Nikiforov R., Torbin G., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2006, **7**, pp. 126 - 142.

[9] *Moran P. A.*, Additive functions of interval and Hausdorff measure // Proc. Cambridge Phil. Soc. —1946. — **42**. — P. 15–23.

[10] Nikiforov R., TorbinG., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2008, **9**, pp. 80 – 103.

[11] Pratsiovytyi M.,*Fraktalnyi pidhid u doslidzhennjah synguljarnyh rozpodiliv (Fractal approach to investigations of singular distributions)*, Kyiv, 1998, 296 p.

[12] Pratsiovytyi M., *Fraktalntyi analis ta sumizhni pytanya (Fractal analysis and related questions)*, Kyiv, 1998. **2**, pp. 36 – 48.

[13] Pratsiovytyi M., Leshinskyi, *Prob. Theory and Math. Statist.*, 1997. **57**. pp. 134 – 140.

[14] F. Schweiger, *Ergodic Theory of Fibred Systems and Metric Number Theory.* — Oxford: Clarendon Press, 1995.

[15] Torbin G., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2002, **3**, pp. 363-375.

[16] Turbin A., Pratsiovytyi M., *Fraktalnye mnozhestva, funkcii, rasspredeleniya (Fractal sets, functions, and distributions)*, Naukova Dumka, Kiev, 1992, 208 p.