Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13 (2).— С. 35–46.

Доверительность и фрактальные свойства вероятностных мер с независимыми Q^*-символами

М. Х. Ибрагим,

Национальный педагогический университет имени М. П. Драгоманова

Г. М. Торбин,

Национальный педагогический университет имени М. П. Драгоманова, Институт математики НАН Украины

Аннотация. Статья посвящена исследованию условий доверительности семейства цилиндров Q^*-разложения при вычислении размерности Хаусдорфа–Безиковича. Получены новые достаточные условия доверительности, которые обобщают результаты S. Albeverio, М. Працевитого, Г. Торбина. Полученые результаты применены для исследования тонких фрактальных свойств распределений случайных величин с независимыми Q^*-символами.

Ключевые слова: доверительность, размерность Хаусдорфа меры, фракталы, сингулярные вероятностные распределения.

Faithfulness and fractal properties of probability measures with independent Q^*-symbols

M. Ibragim,

National Pedagogical Dragomanov University

G. Torbin,

National Pedagogical Dragomanov University, Institute for Mathematics of NASU

Abstract. The paper is devoted to study conditions for faithfulness of families of cylinders generated by Q^*-expansions for the calculation of the Hausdorff dimension. We present new sufficient conditions for the faithfulness, which are generalizations of results by S. Albeverio, M. Pratsiovytyi, G. Torbin. We applied the results to study fine fractal properties of distributions of random variables with independent Q^*-symbols.

AMS Subject Classifications (2010): 11K55, 28A80, 60G30.

Key words: faithfulness, Hausdorff dimension of measure, fractals, singular probability distributions.

E-mail: muslemhussen1978@yahoo.com, torbin7@gmail.com

1. Условия доверительности семейства цилиндров, порожденных Q^*-разложением

Напомним понятие Q^*-разложения действительных чисел из единичного отрезка. Пусть Q^* — стохастическая матрица $Q^* = ||q_{ik}||$ такая, что

1)$q_{ik} > 0, \ \forall i \in \{0, 1, \dots, s-1\}, \forall k \in N$;

2)$\sum\limits_{i=0}^{s-1} q_{ik} = 1, \ \forall k \in N$;

3)$\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_{i} q_{ik} = 0$.

Используя алгоритм, который достаточно детально изложен в работах **[1, 10]**, при помощи матрицы Q^* получается Q^*-разложение числа x :

$$x = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_k(x)} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x) j},$$

где $\beta_{\alpha_k(x)} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_k(x) = 0; \\ \sum\limits_{i=0}^{\alpha_{k(x)-1}} q_{ik}, & \text{если } \alpha_k(x) > 0 \end{cases}$

Формальная запись:

$$x = \Delta^{Q^*}_{\alpha_{1(x)}\alpha_{2(x)}\dots\alpha_{k(x)}\dots}$$

Исследования достаточных условий доверительности для системы $\Phi(Q^*)$ цилиндрических множеств Q^*-разложения проводились в работах S. Albeverio, М. Ибрагима, М. Працевитого, Г. Торбина. Следующая теорема дает широкие достаточные условия доверительности системы $\Phi(Q^*)$.

Теорема 1. *Пусть* $q^*_k := \max\{q_{0k}, q_{1k}, \dots, q_{s-1k}\}$.
Если

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\ln q_{0,k}}{\ln(q_1^* q_2^* \dots q_k^*)} = 0, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\ln q_{s-1,k}}{\ln(q_1^* q_2^* \dots q_k^*)} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

то

$$\dim_H(E) = \dim_H(E, \Phi(Q^*)), \quad \forall E \subset [0,1].$$

Доказательство. Пусть $E_j = [a_j, b_j]$ — произвольный отрезок, $[a_j, b_j] \subset [0,1]$. Пусть $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n_j}}$ — цилиндр, который полностью принадлежит $[a_j, b_j]$ и такой, что не существует цилиндров предыдущего ранга, которые принадлежат $[a_j, b_j]$:

$\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n_j}} \subset [a_j, b_j]$, но $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n_j-1}} \not\subseteq [a_j, b_j]$.

Очевидно, что существует не больше, чем $(2s-2)$ цилиндра ранга n_j, которые полностью принадлежат $[a_j, b_j]$. Обозначим их, двигаясь слева направо, следующим образом:

$\square^1_{n_j}, \square^2_{n_j}, \dots \square^{k_j}_{n_j}$. При этом

$$k_j \leq (2s-2),\ |\square^i_{n_j}| < |E_j|,\ \sum_{i=1}^{k_j} |\square^i_{n_j}|^\alpha \leq (2s-2)|E_j|^\alpha. \tag{2}$$

Пусть $c_j := \inf \square^1_{n_j}$. Рассмотрим варианты покрытия отрезка $[a_j, b_j]$ при помощи цилиндров. Точка c_j является правой конечной точкой для цилиндров многих рангов. Рассмотрим все цилиндры, для которых точка c_j будет правой конечной точкой и выберем среди них такой цилиндр (обозначим ранг этого цилиндра через $(m_j - 1)$), который не принадлежит $[a_j, c_j]$, но при этом цилиндр ранга m_j из рассматриваемого семейства уже принадлежит отрезку $[a_j, c_j]$: $\Delta_{m_j} \subset [a_j, c_j]$.

Обозначим $\Delta_{m_j - 1} := \square^0_{n_j}$. Очевидно, что $\frac{|\Delta_{m_j}|}{|\Delta_{m_j-1}|} = q_{s-1,m_j}$.

Тогда

$$|\Delta_{m_j-1}| = \frac{1}{q_{s-1,m_j}} |\Delta_{m_j}| \leq \frac{1}{q_{s-1,m_j}} (q^*_1 q^*_2 \dots q^*_{m_j}).$$

Поэтому

$$|\Delta_{m_j-1}|^\alpha \leq \frac{1}{(q_{s-1,m_j})^\alpha} (|\Delta_{m_j}|^\delta |\Delta_{m_j}|^{1-\delta})^\alpha.$$

Так как $|\Delta_{m_j}|^\delta \leq (q^*_1 q^*_2 \dots q^*_{m_j})^\delta$, то

$$|\Delta_{m_j-1}|^\alpha \leq \frac{1}{(q_{s-1,m_j})^\alpha} ((q^*_1 q^*_2 \dots q^*_{m_j})^\delta |\Delta_{m_j}|^{1-\delta})^\alpha = \frac{1}{(q_{s-1,m_j})^\alpha} (q^*_1 q^*_2 \dots q^*_{m_j})^{\alpha\delta} |E_j|^{\alpha - \alpha\delta}.$$

Поскольку

$$\lim_{k \to 0} \frac{\ln q_{s-1,k}}{\ln(q^*_1 q^*_2 \dots q^*_k)} = 0,$$

то

$\forall \delta > 0, \exists k_0(\delta)$: для всех $k > k_0(\delta)$ выполняется условие

$$0 < \frac{\ln q_{s-1,k}}{\ln(q^*_1 q^*_2 \dots q^*_k)} < \delta.$$

Следовательно,

$$\ln q_{s-1,k} > \delta \ln(q^*_1 q^*_2 \dots q^*_k),$$

и поэтому

$$q_{s-1,k} > (q^*_1 q^*_2 \dots q^*_k)^\delta.$$

Тогда

$$\frac{1}{q_{s-1,k}} (q^*_1 q^*_2 \dots q^*_k)^\delta < 1, \qquad \forall k > k_0(\delta)$$

и

$$|\Delta_{m_j-1}|^\alpha \leq |E_j|^{\alpha - \alpha\delta}. \tag{3}$$

Аналогично, пусть $d_j = \sup \square_{n_j}^{k_j}$. Точка d_j является левой конечной точкой для цилиндров многих рангов. Рассмотрим все цилиндры, для которых точка d_j будет левой конечной точкой. Выберем среди них такой цилиндр (обозначим его ранг через (l_j-1)), который не принадлежит $[d_j, b_j]$, но при этом цилиндр ранга l_j из рассматриваемого семейства уже принадлежит $[d_j, b_j]$: $\Delta_{l_j} \subset [d_j, b_j]$. Обозначим $\Delta_{l_j-1} := \square_{n_j}^{k_j+1}$. Очевидно, что $\frac{|\Delta_{l_j}|}{|\Delta_{l_j-1}|} = q_{0,l_j}$.

Тогда

$$|\Delta_{l_j-1}| = \frac{1}{q_{0,l_j}} |\Delta_{l_j}| \leq \frac{1}{q_{0,l_j}} (q_1^* q_2^* \dots q_{l_j}^*)$$

и

$$|\Delta_{l_j-1}|^\alpha \leq \frac{1}{(q_{0,l_j})^\alpha} |\Delta_{l_j}|^\alpha.$$

Поэтому

$$|\Delta_{l_j-1}|^\alpha \leq \frac{1}{(q_{0,l_j})^\alpha} (|\Delta_{l_j}|^\delta |\Delta_{l_j}|^{1-\delta})^\alpha, \quad |\Delta_{l_j}|^\delta \leq (q_1^* q_2^* \dots q_{l_j}^*)^\delta.$$

Следовательно,

$$|\Delta_{l_j-1}|^\alpha \leq \frac{1}{(q_{0,l_j})^\alpha} ((q_1^* q_2^* \dots q_{l_j}^*)^\delta |\Delta_{l_j}|^{1-\delta})^\alpha$$

и

$$|\Delta_{l_j-1}|^\alpha \leq \frac{1}{(q_{0,l_j})^\alpha} (q_1^* q_2^* \dots q_{l_j}^*)^{\alpha\delta} |E_j|^{\alpha-\alpha\delta}.$$

Поскольку,

$$\lim_{k \to 0} \frac{\ln q_{0,k}}{\ln(q_1^* q_2^* \dots q_k^*)} = 0,$$

то $\forall \delta > 0, \exists k_1(\delta)$: для всех $k > k_1(\delta)$ выполняется условие

$$0 < \frac{\ln q_{0,k}}{\ln(q_1^* q_2^* \dots q_k^*)} < \delta.$$

Поэтому $\ln q_{0,k} > \delta \ln(q_1^* q_2^* \dots q_k^*)$ и $q_{0,k} > (q_1^* q_2^* \dots q_k^*)^\delta$.

Тогда

$$\frac{1}{q_{0,k}} (q_1^* q_2^* \dots q_k^*)^\delta < 1, \qquad \forall k > k_1(\delta)$$

и, следовательно,

$$|\Delta_{l_j-1}|^\alpha \leq |E_j|^{\alpha-\alpha\delta}. \tag{4}$$

Из (2), (3) и (4) вытекает, что

$$\sum_{i=0}^{k_j+1} |\square_{n_j}^i|^\alpha \leq (2s-2)|E_j|^\alpha + 2|E_j|^{\alpha-\alpha\delta}.$$

Так как $|E_j|^\alpha < |E_j|^{\alpha-\alpha\delta}$, то $\sum\limits_{i=0}^{k_j+1} |\square_{n_j}^i|^\alpha \leq (2s)|E_j|^{\alpha-\alpha\delta}$

и

$$\sum_j \sum_{i=0}^{k_j+1} |\square_{n_j}^i|^\alpha \leq (2s) \sum_j |E_j|^{\alpha-\alpha\delta}.$$

Если $\varepsilon \to 0$, то для всех цилиндров выполняется условие $|\square_{n_j}^i| \to 0$. Пусть $\varepsilon^* = \sup\limits_{i,j} |\square_{n_j}^i|$. Тогда $\varepsilon^* \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно,

$$\inf_{|\square_{n_j}^i| \leq \varepsilon^*} \sum_j \sum_{i=0}^{k_j+1} |\square^i|^\alpha \leq (2s) \inf_{|E_j| \leq \varepsilon} \sum_j |E_j|^{\alpha-\alpha\delta},$$

и

$$H_{\varepsilon^*}^\alpha(E, \Phi(Q^*)) \leq (2s) H_\varepsilon{}^{\alpha-\alpha\delta}(E).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} H_{\varepsilon^*}^\alpha(E, \Phi(Q^*)) \leq (2s) \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon{}^{\alpha-\alpha\delta}(E),$$

и

$$H^\alpha(E) \leq H^\alpha(E, \Phi(Q^*)) \leq (2s) H^{\alpha-\alpha\delta}(E), \qquad \forall \alpha > 0, \forall \delta > 0.$$

Предположим, что

$$\dim_H(E) < \dim_H(E, \Phi(Q^*)).$$

Выберем число α^* так чтобы $\dim_H(E) < \alpha^* < \dim_H(E, \Phi(Q^*))$. Тогда $H^{\alpha^*}(E) = 0$ и

$$H^{\alpha^*}(E, \Phi(Q^*)) = +\infty. \tag{5}$$

С другой стороны,

$$\forall \delta > 0: \qquad H^{\alpha^*}(E, \Phi(Q^*)) \leq (2s) H^{\alpha^* - \alpha^* \delta}(E).$$

Выберем δ_1 таких маленьким, чтобы

$$\alpha^* - \delta_1 \alpha^* > \dim_H(E).$$

Тогда

$$H^{\alpha^* - \alpha^* \delta_1}(E) = 0.$$

Получим, что $H^{\alpha^*}(E, \Phi(Q^*)) \leq (2s) H^{\alpha^* - \alpha^* \delta_1}(E) = 0$, что противоречит равенству (5). Поэтому предположение о том, что $\dim_H(E) < \dim_H(E, \Phi(Q^*))$ неправильно, откуда и следует доверительность семейства цилиндров $\Phi(Q^*)$. $\square$

Замечание 1. Из доказанной теоремы можно легко получить утверждение теоремы 1 работы [**1**]. Действительно, если $\inf\limits_k q_{0k} > 0$ и $\inf\limits_k q_{s-1k} > 0$, то последовательности $\{\ln q_{0k}\}, \{\ln q_{s-1k}\}$ являются ограниченными. В то же время, для любого Q^*-разложения выполняется условие $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_i q_{ik} = 0$. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln q_{0,k}}{\ln(q_1^* \cdot q_2^* \cdot \ldots \cdot q_k^*)} = 0, \ \lim_{k\to\infty} \frac{\ln q_{s-1,k}}{\ln(q_1^* \cdot q_2^* \cdot \ldots \cdot q_k^*)} = 0,$$

откуда и следует доверительность системы $\Phi(Q^*)$.

Следствие 1. Если $Q^* = Q$, то $\Phi(Q^*)$ — доверительная.

Как показывает следующий пример, доказанная теорема дает ответ относительно доверительности $\Phi(Q^*)$ и в том случае, когда результаты работ [**1**] не работают.

Пример. Пусть

$$Q^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \ldots & \frac{1}{10k} \ldots & \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{10} & \ldots & \frac{1}{2} - \frac{1}{10k} & \ldots \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{10} & \ldots & \frac{1}{2} - \frac{1}{10k} & \ldots \\ \frac{1}{10} & \ldots & \frac{1}{10k} \ldots & \end{pmatrix}$$

В этом случае $\inf q_{0,k} = 0$, $\inf q_{s-1,k} = 0$.

Так как

$$q_k^* = \max\{q_{0k}, q_{1k}, \ldots, q_{s-1k}\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{10k},$$

то

$$\frac{\ln q_{0,k}}{\ln(q_1^* \cdot q_2^* \cdot \ldots \cdot q_k^*)} = \frac{\ln \frac{1}{10k}}{\ln(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}) + \ln(\frac{1}{2} - \frac{1}{20}) + \ldots + \ln(\frac{1}{2} - \frac{1}{10k})} \sim \frac{\ln 10k}{k \ln 2} \to \ 0, \ k \to \infty.$$

Аналогично,

$$\frac{\ln q_{s-1,k}}{\ln(q_1^* \cdot q_2^* \cdot \ldots \cdot q_k^*)} = \frac{\ln \frac{1}{10k}}{\ln(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}) + \ln(\frac{1}{2} - \frac{1}{20}) + \ldots \ln(\frac{1}{2} - \frac{1}{10k})} \sim \frac{\ln 10k}{k \ln 2} \to \ 0, \ k \to +\infty.$$

Поскольку условия предыдущей теоремы выполняются, то $\Phi(Q^*)$ — доверительная для вычисления размерности Хаусдорфа–Безиковича на единичном отрезке.

2. Тонкие фрактальные свойства вероятностных мер с независимыми Q^*-символами

Пусть $\{\xi_k\}$ — последовательность независимых случайных величин, которые принимают значения $0, 1, \ldots, s-1$ с вероятностями $p_{0k}, p_{1k}, \ldots, p_{s-1k}$ соответственно. Случайная величина

$$\xi = \Delta^{Q^*}_{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k \ldots} \qquad (6)$$

называется случайной величиной с независимыми Q^*-символами, а соответствующая ей вероятностная мера ν_ξ называется вероятностной мерой с независимыми Q^*-символами.

Лебеговская структура распределения ν_ξ хорошо исследована (см., например, [**1, 2**]). Известно, в частности, что распределение случайной величины ξ имеет чистый тип, причем

чисто дискретный тогда и только тогда, когда

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_i p_{ik} > 0, \tag{7}$$

т.е., когда $\max\limits_i p_{ik} \to 1$ достаточно быстро;

ν_ξ абсолютно непрерывна (относительно меры Лебега) тогда и только тогда, когда

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{p_{0k}q_{0k}} + \sqrt{p_{1k}q_{1k}} + \ldots + \sqrt{p_{(s-1)k}q_{(s-1)k}}\right) > 0, \tag{8}$$

т.е., когда $\frac{p_{ik}}{q_{ik}} \to 1$ достаточно быстро;

ν_ξ сингулярно непрерывна тогда и только тогда, когда бесконечные произведения (7) и (8) равны нулю.

Основной задачей этого раздела является нахождения размерности Хаусдорфа $\dim_H \nu_\xi$ вероятностных мер с независимыми Q^*-символами, т.е., нахождение размерности Хаусдорфа–Безиковича минимальных размерностных носителей указанных вероятностных мер. Более строго:

размерностью Хаусдорфа распределения случайной величины τ называется число

$$\dim_H(\tau) = \inf\left\{\dim_H(E),\ E \in \mathcal{B}_\tau\right\},$$

где $\mathcal{B}_\tau$ — класс всевозможных носителей (не обязательно замкнутых) случайной величины τ, т.е.

$$\mathcal{B}_\tau = \left\{E:\ E \in \mathcal{B},\ P_\tau(E) = 1\right\}.$$

Для доказательства основного результата данного раздела нам необходимо понятие размерности Хаусдорфа–Биллингсли множества относительно вероятностной меры и системы разбиений. Пусть υ — непрерывная вероятностная мера на $[0,1]$, и пусть Φ — некоторое локально тонкое семейство цилиндров. Тогда $(\upsilon - \alpha)$ — мера Хаусдорфа множества $E \subset [0,1]$ относительно семейства Φ определяется следующим образом:

$$H^\alpha(E,\,\upsilon,\Phi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\inf_{\upsilon(E_j)\le\varepsilon}\left\{\sum_j \upsilon^\alpha(E_j)\right\}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0} H^\alpha_\varepsilon(E,\,\upsilon,\Phi),$$

где $E_j \in \Phi,\ \bigcup_j E_j \supset E$.

Число
$$\dim_{\upsilon}(E,\,\Phi)=\inf\{\alpha:\ H^{\alpha}(E,\,\upsilon,\Phi)\ =0\}$$
называется *размерностью Хаусдорфа–Биллингсли* множества E относительно меры υ и семейства Φ.

Для формулировки основного результата этого раздела введем обозначения.
$$h_j:=-\sum_{i=0}^{s-1}p_{ij}\ln p_{ij},\qquad 0\ln 0:=0;\quad H_n:=\sum_{j=1}^{n}h_j.$$
$$b_j:=-\sum_{i=0}^{s-1}p_{ij}\ln q_{ij};\quad B_n:=\sum_{j=1}^{n}b_j.$$
$$d_j:=-b_j^2+\sum_{i=0}^{s-1}p_{ij}\ln^2 q_{ij}.$$

Теорема 2. *Если матрица Q^* удовлетворят условию (1) и выполняются следующие два предположения:*
$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{d_j}{j^2}<+\infty; \tag{9}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{B_n}{n}>0; \tag{10}$$
то размерность Хаусдорфа вероятностной меры с независимыми Q^*-символами равна
$$\dim_H\nu_\xi=\lim_{n\to\infty}\frac{H_n}{B_n}. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $\Delta_n(x)=\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}$ — цилиндр ранга n Q^*-разложения, который содержит точку x. Пусть $\nu=\nu_\xi$ и μ — мера Лебега на $[0,1]$.

Тогда
$$\nu(\Delta_n(x))=p_{\alpha_1(x)1}\cdot p_{\alpha_2(x)2}\cdot\ldots\cdot p_{\alpha_n(x)n},$$
$$\mu(\Delta_n(x))=q_{\alpha_1(x)1}\cdot q_{\alpha_2(x)2}\cdot\ldots\cdot q_{\alpha_n(x)n}.$$

Рассмотрим выражение
$$\frac{\ln\nu(\Delta_n(x))}{\ln\mu(\Delta_n(x))}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\ln p_{\alpha_j(x)j}}{\sum\limits_{j=1}^{n}\ln q_{\alpha_j(x)j}}.$$

Если $x=\Delta^{Q^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}$ выбирается случайным образом так, что
$$P(\alpha_j(x)=\ i)=p_{ij}$$

(т.е., распределение случайной величины x совпадает с вероятностной мерой ν), то $\{\eta_j\} = \{\eta_j(x)\} = \{\ln p_{\alpha_j(x)j}\}$ и $\{\psi_j\} = \{\psi_j(x)\} = \{\ln q_{\alpha_j(x)j}\}$ — последовательности независимых случайных величин со следующими распределениями:

η_j	$\ln p_{0j}$	$\ln p_{1j}$	$\ldots$	$\ln p_{(s-1)j}$
	p_{0j}	p_{1j}	$\ldots$	$p_{(s-1)j}$

ψ_j	$\ln q_{0j}$	$\ln q_{1j}$	$\ldots$	$\ln q_{(s-1)j}$
	p_{0j}	p_{1j}	$\ldots$	$p_{(s-1)j}$

Очевидно, что $M\eta_j = -h_j$, и $|h_j| \leq \ln s$. Величина $M\eta_j^2 = \sum_{i=0}^{s-1} p_{ij}\ln^2 p_{ij}$ также является ограниченной, причем в качестве ограничивающей константы c_0 можно взять число $c_0 = \frac{4}{e^2}$ [**1**].

Из усиленного закона больших чисел ([**9**]) следует, что для ν-почти всех точек $x \in [0,1]$ выполняется следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n) - M(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n)}{n} = 0. \tag{12}$$

Ясно, что $M(\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n) = -H_n$.

Покажем, что усиленный закон больших чисел применим также и к последовательности $\{\psi_j\}$. С этой целью рассмотрим

$$M\psi_j = \sum_{i=0}^{s-1} p_{ij}\ln q_{ij}, \quad M\psi_j^2 = \sum_{i=0}^{s-1} p_{ij}\ln^2 q_{ij}.$$

Поскольку $d_j = D(\psi_j)$ и по условию теоремы ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{d_j}{j^2}$ сходится, то из теоремы Колмогорова (УЗБЧ) следует, что для ν-почти всех $x \in [0,1]$ имеет место равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\psi_1+\psi_2+\ldots+\psi_n) - M(\psi_1+\psi_2+\ldots+\psi_n)}{n} = 0. \tag{13}$$

Заметим также, что $M(\psi_1+\psi_2+\ldots+\psi_n) = -B_n$.

Рассмотрим множество

$$A = \left\{x: \ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\ldots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_n(x)} - \frac{H_n}{B_n}\right) = 0\right\} =$$

$$= \left\{x: \ \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\ldots+\eta_n(x)+H_n}{n}\right) - \frac{H_n}{B_n}\left(\frac{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_n(x)+B_n}{n}\right)}{\left(\frac{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_n(x)+B_n}{n}\right) - \frac{B_n}{n}} = 0\right\}.$$

Из неравенства Гиббса (одно из доказательств этого неравенства можно найти в [**6**]), вытекает, что $h_j \leq b_j$. Поэтому $0 \leq \frac{H_n}{B_n} = \frac{\sum_{j=1}^n h_j}{\sum_{j=1}^n b_j} \leq 1$.

Поскольку (по условию теоремы) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{B_n}{n} > 0$, то существует константа $c_1 > 0$ такая, что неравенство $\left|\frac{B_n}{n}\right| \geq c_1$ выполняется для всех $n \in N$.

Следовательно, для ν-почти всех $x \in [0,1]$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\ldots+\eta_n(x)+H_n}{n}\right) - \frac{H_n}{B_n}\left(\frac{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_n(x)+B_n}{n}\right)}{\left(\frac{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_n(x)+B_n}{n}\right) - \frac{B_n}{n}} = 0.$$

Поэтому $\nu(A) = 1$ и $\dim_\nu(A,\Phi) = 1$.

Рассмотрим множества

$$A_1 = \left\{x: \ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\ldots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_n(x)} - \frac{H_n}{B_n}\right) = 0\right\};$$

$$A_2 = \left\{x: \ \underline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\ldots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_n(x)}\right) \le \ \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{H_n}{B_n}\right\} =$$

$$= \left\{x: \ \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\nu(\Delta_n(x))}{\ln\mu(\Delta_n(x))} \le \ \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{H_n}{B_n}\right\};$$

$$A_3 = \left\{x: \ \underline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\ldots+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+\ldots+\psi_n(x)}\right) \ge \ \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{H_n}{B_n}\right\} =$$

$$= \left\{x: \ \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\nu(\Delta_n(x))}{\ln\mu(\Delta_n(x))} \ge \ \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{H_n}{B_n}\right\}.$$

Очевидно, что $A \subset A_1$. Используя те же аргументы, что и в работе [**1**], можно показать, что $A_1 \subset A_3$ и $A \subset A_2$. Пусть $D = \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{H_n}{B_n}$.

Поскольку $A \subset A_2$, то $\dim_\mu(A,\Phi) \le \dim_\mu(A_2,\Phi)$. Из теоремы 2.1 работы [**3**] следует, что $\dim_\mu(A_2,\Phi) \le D$. Поэтому, $\dim_\mu(A,\Phi) \le D$.

Из условия $A \subset A_3$ и теоремы 2.2 работы [**3**] следует, что $\dim_\mu(A,\Phi) \ge D \cdot \dim_\nu(A,\Phi) = D \cdot 1 = D$. Поэтому $\dim_\mu(A,\Phi) = D$.

Так как μ — мера Лебега на $[0,1]$, то $\dim_H(A,\Phi) = \dim_\mu(A,\Phi) = D$. Из первого предположения доказываемой теоремы и теоремы 1 вытекает, что семейство Φ цилиндров Q^*-разложения является доверительным для вычисления размерности Хаусдорфа–Безиковича на единичном отрезке и, следовательно, $\dim_H(A,\Phi) = \dim_H(A)$. Поэтому $\dim_H(A) = D$.

Докажем теперь, что построенное множество A является минимальным размерностным носителем меры ν. С этой целью рассмотрим произвольный носитель C меры ν. Поскольку пересечение двух множеств полной меры является множеством полной меры, то множество $C_1 = C \cap A$ также является носителем меры ν. Ясно, что $C_1 \subset C$. Таким образом, $\dim_H(C_1) \le \dim_H(C)$ и $C_1 \subset A$. Докажем теперь, что $\dim_H(C_1) = \dim_H(A)$.

Из условия $C_1 \subset A$ следует, что $\dim_H(C_1) \le \dim_H(A) = D$. С другой стороны,

$$C_1 \subset A \subset A_3 = \left\{x: \ \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\nu(\Delta_n(x))}{\ln\mu(\Delta_n(x))} \ge D\right\}.$$

Поэтому из теоремы 2.2 работы **[3]** следует, что

$$\dim_H(C_1) = \dim_\mu(C_1, \Phi) \geq D \cdot \dim_\nu(C_1, \Phi) = D \cdot 1 = D,$$

откуда и следует требуемое равенство $\dim_H(C_1) = D = \dim_H(A)$. $\square$

Благодарность: Эта работа была частично поддержана проектом SFB-701 (Bielefeld University).

Список литературы

[1] *Albeverio S., Torbin G.* Fractal properties of singular continuous probability distributions with independent Q^*-digits // Bull. Sci. Math.— 2005.— **129**, no. 4.— 356–367.

[2] *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.*, On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols // Methods of Functional Analysis and Topology, **17** (2011), №.2, 97 – 111.

[3] *Billingsley P.*, Hausdorff dimension in probability theory II // *Ill. J. Math.*, **5**, 291-198, (1961).

[4] *Chatterji S. D.*, Certain induced measures and the fractional dimensions of their "supports"// Z.Wahrscheinlichkeitstheorie 3, 184-192,(1964).

[5] Falconer K. J., *Fractal geometry*, John Wiley & Sons, 1995.

[6] Нікіфоров Р. О., Торбін Г. М., *Ергодичні властивості Q_∞-зображень та фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними Q_∞-символами* // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки, **9** (2008), 80 – 103.

[7] *Працьовитий М. В.*, Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працьовитий. — Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[8] Rogers C. A., *Hausdorff measures*,Cambridge Univ. Press, London, 1970.

[9] Shiryaev A. N., *Probability*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[10] *Торбин Г. М., Працевитый Н. В.,* Случайные величины с независимыми Q*-знаками // Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи. — 1992. — Киев: Ин-т математики АН Украины. — С. 95 – 104.

[11] *Турбин А. Ф.* Фрактальные множества, функции, распределения / А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый. — Киев : Наукова думка, 1992. — 208 с.

References

[1] Albeverio S., Torbin G. *Bull. Sci. Math.*, 2005, **129**, no. 4, pp. 356–367.

[2] Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G. *Methods of Functional Analysis and Topology*, 2011, **17**, №. 2, pp. 97 – 111.

[3] Billingsley P., *Ill. J. Math.*, 1961, **5**, pp. 291–198.

[4] Chatterji S. D., *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, 1964, 3, pp. 184–192.

[5] Falconer K. J., *Fractal geometry*, John Wiley & Sons, 1995.

[6] Nikiforov R., Torbin G., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2008, **9**, pp. 80 – 103.

[7] Pratsiovytyi M. V. *Fraktalnyi pidhid u doslidzhennjah synguljarnyh rozpodiliv (Fractal approach to investigations of singular distributions)*, Kyiv, 1998, 296 p.

[8] Rogers C. A. *Hausdorff measures*, Cambridge Univ. Press, London, 1970, 179 p.

[9] Shiryaev A. *Probability*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[10] Pratsiovytyi M., Torbin G. *Sluchajnye evoljucyi: teoret. i prykl. zadachy (Stochastic evolutions: theoretical and applied problems)*, Kyiv, 1992, pp. 95 – 104.

[11] Turbin A. F., Pratsiovytyi M. V., *Fraktalnye mnozhestva, funkcii, rasspredeleniya (Fractal sets, functions and distributions)*, Naukova Dumka, Kiev, 1992, 208 p.