Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2009, № 10.— С. 73–87.

УДК 511.72

Розклади чисел в ряди Сільвестера та їх застосування

І. М. Працьовита, М. В. Задніпряний
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. Об'єктом дослідження даної роботи є континуальна сім'я збіжних знакододатних рядів спеціального виду (рядів Сільвестера), членами яких є числа, обернені до натуральних. Знайдено критерій раціональності(ірраціональності) суми ряду, описані тополого-метричні і фрактальні властивості множини неповних сум(підсум) заданого ряду Сільвестера. Доведено, що випадкова неповна сума заданого ряду з незалежними доданками має або чисто дискретний, або чисто сингулярно-неперервний розподіл.

Abstract. The object of study of this work is a continuous family of convergent series of positive special form (Sylvester series), are members of a number of inverse to the natural. We find a criterion of rationality (irrationality) the amount of the series, describes the topological-metric and fractal properties of sets of partial sums (subtotals) of a given number of Sylvester. It is proved that the random part of the specified amount to the number of independent or slogans is purely discrete or purely singular continuous distribution.

Вступ

У 1880 році Сільвестер [**15**] описав один зі способів розкладу дійсних чисел у знакододатні ряди спецільного виду, членами яких є числа, обернені до натуральних, а саме, у ряди виду:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}+\ldots, \quad \text{де} \quad 2\le a_n\in N, \quad a_{n+1}\ge a_n(a_n-1)+1.$$

Цим самим була запропонована одна із перших систем зображення дійсних чисел з нескінченним алфавітом у формі ряду і нульовою надлишковістю, деякий аналог зображення чисел елементарними ланцюговими дробами[**9**]. Пізніше були обґрунтовані інші, такі як розклади чисел в ряди Люрота [**13**], Остроградського-Серпінського-Пірса [**14, 8, 6**], Енгеля [**11**], Остроградського 2-го виду[**8, 6**] тощо. Всі вони є моделями дійсного числа, побудованого з натуральних чисел.

Як виявилось, модель дійсного числа у формі ряду Сільвестера має непросту несамоподібну геометрію. Вона має чимало спільного із зображенням чисел знакозмінніми рядами Остроградського 2-го виду, а саме: ряд спільних метричних відношень, але має й ряд принципових відмінностей, зокрема, топологічного характеру. На відміну від рядів Остроградського 2-го виду кожне число має єдиний(нескінченний) розклад в ряд Сільвестера, що спрощує моделювання та дослідження різних стохастичних моделей.

Ми вбачаємо в даній системі зображення чисел значний потенціал для побудови метричної, фрактальної та ймовірнісної теорії дійсних чисел, для моделювання і дослідження математичних об'єктів зі складною локальною структурою (сингулярні міри, ніде не монотонні та недиференційовні функції, динамічні системи тощо), ряду застосувань у фрактальному аналізі та фрактальній геометрії. З цією метою плануємо вибудувати цілісну теорію зображення чисел рядами Сільвестера, використовуючи ряд плідних ідей, які реалізовувались в дослідженнях згаданих вище систем зображення дійсних чисел.

В даній роботі ми досліджуємо ряди Сільвестера як самостійний математичний об'єкт. Нас цікавлять, в першу чергу, тополого-метричні і фрактальні властивості множини їх підсум. Як виявляється, будучи потенціально фрактальною, множина неповних сум(підсум) довільного ряду Сільвестера є аномально фрактально, тобто має нульову фрактальну розмірність, а отже, є досить "бідною" нуль-множиною Лебега. Ми виділяємо один з найпростіших класів рядів Сільвестера – s-кові ряди Сільвестера і доводимо, що їх множина є метрично бідною, а саме: множиною нульової фрактальної розмірності Хаусдорфа-Безиковича.

1. Означення ряду Сільвестера, приклади.

Означення 1. Числовий ряд виду

$$\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}+\ldots+\frac{1}{q_k}+\ldots\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{q_k}\,, \tag{1}$$

де q_k — натуральні числа, причому

$$q_1\geq 2,\quad q_{k+1}\geq q_k(q_k-1)+1\quad \forall k\in N\,, \tag{2}$$

називається *рядом Сільвестера.* При цьому число q_k називається k-тим знаменником ряду.

Прикладами ряду Сільвестера є наступні ряди:

(1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\ldots=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k}$, де (p_k)—нескінченна послідовність простих чисел така, що

$$p_1=2,\ p_2=3,\ p_3=7,\ \ldots,$$

p_k—найменше просте число таке, що $p_k \geq p_{k-1}(p_{k-1}-1)+1$;

(2) $\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^4}+\ldots+\frac{1}{q^{2(n-1)}}+\ldots$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s^{s^n}}$, де $2 \leq s$ – фіксоване число ;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!!}$.

Лема 1. *Для знаменників ряду Сільвестера мають місце наступні співвідношення:*

$$q_{k+2} > (q_{k+1}-1)^2, \tag{3}$$

$$q_{k+2} > (q_2-1)^{2^k}, \tag{4}$$

$$q_{k+2} > 2^{2^k}. \tag{5}$$

Доведення. Оскільки для довільного натурального $n \geq 2$ виконується:

$$q_{n+1} \geq q_n(q_n-1)+1 > q_n(q_n-1) > (q_n-1)^2,$$

то мають місце наступні співвідношення:

$$q_{k+2} > (q_{k+1}-1)^{2^1} > (q_k-1)^{2^2} > (q_{k-1}-1)^{2^3} > \ldots > (q_2-1)^{2^k} \geq 2^{2^k}.$$

□

Наслідок 1. *Знаменники q_k членів ряду Сільвестера утворюють необмежену строго зростаючу послідовність натуральних чисел, більше того,*

$$q_{k+2} = O(2^k).$$

Лема 2. *Кожен ряд Сільвестера є збіжним.*

Доведення. Ряд Сільвестера (1) є збіжним згідно з ознакою Даламбера збіжності знакододатних рядів, оскільки

$$\frac{1}{q_{n+1}} : \frac{1}{q_n} = \frac{q_n}{q_{n+1}} \leq \frac{q_n}{q_n(q_n-1)+1} = \frac{q_n}{q_n^2-q_n+1} = \frac{1}{q_n-1+\frac{1}{q_n}} \to 0 \quad (n\to\infty) .$$

□

Лема 3. *Якщо $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n(a_n - 1) + 1$, то має місце рівність*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \ldots + \frac{1}{a_n} + \ldots = 1.$$

Доведення. Якщо $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}$, то

$S_1 = \dfrac{1}{2} = \dfrac{a_1(a_1 - 1) - 1}{a_1(a_1 - 1)}$;

$S_2 = S_1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6} = \dfrac{a_2(a_2 - 1) - 1}{a_2(a_2 - 1)}$.

Методом математичної індукції доведемо, що

$$S_n = \frac{a_n(a_n - 1) - 1}{a_n(a_n - 1)}. \tag{6}$$

Припустимо, що рівність (6) має місце при $n = k$, тобто

$$S_k = \frac{a_k(a_k - 1) - 1}{a_k(a_k - 1)},$$

і доведемо, що вона виконується для $n = k + 1$.

Справді,

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{a_{k+1}} = S_k + \frac{1}{a_k(a_k - 1) + 1} = \frac{a_k(a_k - 1) - 1}{a_k(a_k - 1)} + \frac{1}{a_k(a_k - 1) + 1} = \\ &= \frac{a_{k+1} - 2}{a_{k+1} - 1} + \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{a_{k+1}(a_{k+1} - 2) + (a_{k+1} - 1)}{(a_{k+1} - 1)a_{k+1}} = \\ &= \frac{a_{k+1}(a_{k+1} - 1) - a_{k+1} + a_{k+1} - 1}{a_{k+1}(a_{k+1} - 1)} = \frac{a_{k+1}(a_{k+1} - 1) - 1}{a_{k+1}(a_{k+1} - 1)}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n(a_n - 1) - 1}{a_n(a_n - 1)} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{a_n(a_n - 1)} = 1, \text{ оскільки } a_n > 2^{2^{n-2}}. \qquad \square$$

Наслідок 2. *Сума довільного ряду Сільвестра не перевищує 1.*

Дане твердження випливає з того, що ряд Сільвестера, розглянений у попередній лемі має найбільшу суму.

Лема 4. *Якщо послідовність натуральних чисел (a_n) задовольняє умови*

$$a_1 \geq 2, \quad a_{k+1} = a_k(a_k - 1) + 1, \tag{7}$$

то має місце розклад

$$\frac{1}{a_1 - 1} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} + \ldots. \tag{8}$$

Доведення. Рівність (8) рівносильна наступній рівності

$$\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\ldots-\frac{1}{a_n}-\ldots=0. \tag{9}$$

Нехай

$$S_n=\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}-\ldots-\frac{1}{a_n}.$$

Тоді

$$S_n=\frac{1}{a_{n+1}-1}, \tag{10}$$

що легко довести методом математичної індукції.

Справді,

$$S_1=\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_1}=\frac{1}{a_1(a_1-1)}=\frac{1}{a_2-1}.$$

З припущення правильності рівності (10) для $n=k$, тобто

$$S_k=\frac{1}{a_{k+1}-1},$$

отримуємо

$$S_{k+1}=S_k-\frac{1}{a_{k+1}}=\frac{1}{a_{k+1}-1}-\frac{1}{a_{k+1}}=\frac{1}{a_{k+1}(a_{k+1}-1)}=\frac{1}{a_{k+2}-1}.$$

Отже, рівність (10) правильна для довільного натурального n. Оскільки $a_n\to\infty$, коли $n\to\infty$, то

$$S_n=\frac{1}{a_{n+1}-1}\to 0 \quad (n\to\infty).$$

Отже мають місце рівності (9) і (8), що й вимагалось довести. □

Лема 5. *Для залишку r_m ряду Сільвестера (1) виконуються наступні нерівності:*

$$\frac{1}{q_{m+1}}<r_m\equiv\frac{1}{q_{m+1}}+\frac{1}{q_{m+2}}+\ldots\le\frac{1}{q_{m+1}-1}. \tag{11}$$

Доведення. Ліва з нерівностей (11) є очевидною.

Легко бачити, що серед рядів виду (11) максимальну суму матиме ряд, члени якого задовольняють умову

$$q_{k+1}=q_k(q_k-1)+1, \quad k>m+1,$$

а вона, згідно з лемою 4, дорівнює $\dfrac{1}{q_{m+1}-1}$, отже виконується права нерівність. □

2. Множина неповних сум заданого ряду Сільвестра.

Означення 2. Якщо задано ряд Сільвестера (1), то число

$$x = x(M) = \sum_{k \in M \subset N} \frac{1}{q_k}$$

називається його *неповною сумою(або підсумою)*, визначеною множиною M.

Очевидно, що неповну суму $x = x(M)$ можна подати рівністю

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{q_k}, \quad \text{де} \quad a_k = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad k \in M \\ 0, & \text{якщо} \quad k \in N \setminus M. \end{cases} \tag{12}$$

Число x і його вираз (12) формально зображатимемо $x = \Delta_{a_1 \ldots a_k \ldots}$.

Очевидно, що кожен ряд Сільвестера має континуальну множину неповних сум.

Означення 3. Множина C всіх неповних сум заданого ряду Сільвестера, тобто

$$C(q_k) = \left\{ x : x = \sum_{k \in M \subset N} \frac{1}{q_k}, \quad M \in \sigma(N) \right\},$$

де $\sigma(N)$ — множина всіх підмножин множини N (буліан множини N), називається *множиною його неповних сум.*

Лема 6. *Якщо $q_1 \neq 2$ або $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{q_k} \neq 1$, то для довільного $x \in C(q_k)$ існує єдина послідовність a_k, $a_k \in \{0, 1\}$, така, що*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{q_k}. \tag{13}$$

Доведення. Існування послідовності (a_k) випливає з означень (12) і (3). Доведемо єдиність методом від супротивного.

Припустимо існування двох різних послідовностей (a_k) і (a'_k) таких, що мають місце рівність (13) і

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a'_k}{q_k}. \tag{14}$$

Тоді з (13) і (14) отримуємо

$$0 = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{a_k - a'_k}{q_k},$$

де натуральне m таке, що $a_k = a'_k$ при $k < m$ і $a_k \neq a'_m$. Не порушуючи загальності вважатимемо $a_m = 1$ і $a'_m = 1$. Тоді

$$0 = \frac{1}{q_m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a_k - a'_k}{q_k} \geq \frac{1}{q_m} - \sum_{j=1} \infty \frac{1}{q_{m+j}} \equiv \varepsilon$$

$$\varepsilon \geq \frac{1}{q_m} - \frac{1}{q_{m+1}-1} \geq \frac{1}{q_m} - \frac{1}{q_m(q_m-1)} = \frac{q_m-1-1}{q_m(q_m-1)} = \frac{q_m-2}{q_m(q_m-1)} = \delta.$$

Якщо $m > 1$, то $q_m > 2$ і $\delta > 0$.

Якщо $m = 1$, але $q_1 \neq 2$, тобто $q_1 > 2$, то $\delta > 0$.

Якщо $m = 1$ і $q_1 = 2$, але $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{1}{q_i} \neq \frac{1}{2}$, тобто $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{1}{q_i} < \frac{1}{2}$, то $\frac{1}{q_1} - \sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{1}{q_i} > 0$.

У всіх випадках отримали протиріччя: $0 > 0$. Це і доводить лему. □

Означення 4. Нехай $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ – впорядкований набір нулів та одиниць. *Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\dots c_m$* (символічно позначається: $\Delta'_{c_1\dots c_m}$)називається множина всіх неповних сум, які мають зображення

$$\Delta_{c_1\dots c_m a_{m+1}\dots a_{m+j}\dots}, \quad a_{m+j} \in \{0,1\}, \quad j \in N.$$

Очевидно, що

1. $\Delta'_{c_1\dots c_m} = \Delta'_{c_1\dots c_m 0} \bigcup \Delta'_{c_1\dots c_m 1}$,
2. $\inf \Delta'_{c_1\dots c_m} = \min \Delta'_{c_1\dots c_m} = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{c_i}$,
3. $\sup \Delta'_{c_1\dots c_m} = \max \Delta'_{c_1\dots c_m} = \Delta'_{c_1\dots c_m} + r_m$.

Означення 5. *Циліндричним відрізком рангу m з основою $c_1c_2\dots c_m$* (символічно: $\Delta_{c_1\dots c_m}$) називається відрізок, кінці якого співпадають з нижньою і верхньою гранями циліндра $\Delta'_{c_1\dots c_m}$.

Безпосередньо з означення циліндричних множин випливає наступне твердження.

Лема 7. *Циліндричні відрізки мають властивості:*

1. $\Delta'_{c_1c_2\dots c_m} \subset \Delta_{c_1c_2\dots c_m}$;
2. $|\Delta_{c_1c_2\dots c_m}| = \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{q_n} = r_m \to 0, \ (m \to \infty)$
3. $\Delta_{c_1c_2\dots c_m 0} \bigcup \Delta_{c_1c_2\dots c_m 1} \subset \Delta_{c_1c_2\dots c_m}$;
4. $\Delta_{c_1c_2\dots c_m 0} \bigcap \Delta_{c_1c_2\dots c_m 1} = \varnothing$;
5. $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1c_2\dots c_m} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta'_{c_1c_2\dots c_m} = x \equiv \Delta_{c_1c_2\dots c_m\dots}$;
6. $C(q_k) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{\substack{c_i \in A,\\ i=\overline{1,m}}} \Delta_{c_1c_2\dots c_m}$, $A = \{0,1\}$.

Теорема 1. *Множина $C(q_k)$ всіх неповних сум заданого ряду* (1) *є:*

1. *ніде не щільною;*
2. *континуальною;*
3. *досконалою;*
4. *множиною нульової міри Лебега;*

5. множиною нульової розмірності Хаусдорфа-Безиковича?.

Доведення. 1. Перше твердження випливає з попередньої леми, а саме: властивостей циліндричних множин 2, 4 та 6.

2. Оскільки послідовність (a_k) (див. рівність (12)) пробігає всю множину $A \times A \times \dots$, де $A \in \{0, 1\}$, то очевидно, що C є континуальною множиною.

3. Якщо x — гранична точка множини неповних сум C, то для довільного k знайдеться циліндричний відрізок $\Delta_{c_1 \dots c_k}$, який містить x, оскільки в протилежному випадку точка x належала б одному із суміжних циліндричних інтервалів і існувало б $\varepsilon > 0$ таке, що

$$(x - \varepsilon; x + \varepsilon) \bigcap C = \emptyset.$$

А це суперечить тому, що x — гранична точка множини C. Переріз $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1 \dots c_k}$ містить єдину точку, яка належить C і співпадає з x. Отже, C — замкнена множина.

Припустимо, що C містить ізольовані точки, $x = \Delta_{a_1 \dots a_k \dots}$ — одна з них. Тоді, за означенням ізольованої точки, існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$(x - \varepsilon; x + \varepsilon) \bigcap [C \setminus \{x\}] = \emptyset. \tag{15}$$

Виберемо k таким великим, щоб $|\Delta_{a_1 \dots a_k}| < \varepsilon$. Тоді

$$\Delta_{a_1 \dots a_k} \subset (x - \varepsilon; x + \varepsilon)$$

$$x \neq x' = \Delta_{a_1 \dots a_k (1 - a_{k+1}) a_{k+2} a_{k+3} \dots} \in (x - \varepsilon; x + \varepsilon),$$

що суперечить (15). Отже, C — замкнена множина, яка не має ізольованих точок, тобто є досконалою згідно з означенням.

4. Нехай F_k — об'єднання циліндричних відрізків рангу k. Оскільки $C(q_n) \subset F_k$, для довільного натурального k, то міра Лебега

$$\lambda(C(q_n)) \leq \lambda(F_k) = 2^k \cdot |\Delta_{\underbrace{0 \dots 0}_{k}}| = 2^k r_m \leq 2^k \cdot \frac{1}{q_{k+1} - 1} \leq \frac{2^k}{2^{2^{k-1}} - 1}.$$

Звідки

$$\lambda(C) \leq \lim_{k \to \infty} \frac{2^k}{2^{2^{k-1}} - 1} = 2 \lim_{k \to \infty} \frac{2^{k-1}}{2^{2^{k-1}} - 1} = 2 \lim_{t \to \infty} \frac{t}{2^t - 1} = 2 \lim_{t \to \infty} \frac{1}{2^t \ln 2} = 0.$$

5. Оскільки множина неповних $C(q_n)$ є компактом, то скористаємось критерієм аномальної фрактальності компакта [**8**] (його доведення можна знайти в [**8**]): *Для того, щоб компакт C мав нульову α-міру Хаусдорфа, необхідно і досить, щоб для кожного $\varepsilon > 0$ існував скінченний розклад клмпакта $C = A_1 \bigcup \dots \bigcup A_k$ такий, що*

$$[d(A_1)]^\alpha + \dots + [d(A_k)]^\alpha < \varepsilon.$$

Для цього розглянемо покриття множини $C(q_n)$ циліндричними відрізками $(k+2)$-го рангу. Його α-об'єм:

$$l^{\alpha}_{k+2}(C(q_n)) = 2^{k+2}\left(\frac{1}{2^{2^k}-1}\right)^{\alpha} \leq 2\cdot 2^k\left(\frac{1}{\frac{1}{2}2^{2^k}}\right)^{\alpha} = 2\cdot\left(\frac{\sqrt[k]{2^{\alpha}}\cdot 2}{2^{2^k\cdot\alpha\cdot\frac{1}{k}}}\right)^{k} = 2\cdot\left(\frac{2\cdot\sqrt[k]{2^{\alpha}}}{(2^{\alpha})^{\frac{2^k}{k}}}\right)^{k}.$$

При довільному $\alpha > 0$ виконується нерівність $2^{\alpha} > 1$. Послідовність $\sqrt[k]{2^{\alpha}}$ монотонно спадає до 1, а послідовність $k^{-1}\cdot 2^k$ монотонно необмежено зростає. Тому для всіх k, більших деякого k_0,

$$\frac{2\cdot\sqrt[k]{2^{\alpha}}}{2^{\frac{2^{k-1}}{k}}} < 1.$$

А отже, для довільного $\varepsilon > 0$, знайдеться $k_0 = k_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $k > k_0$

$$l^{\alpha}_{k+1}(C(q_n)) < \varepsilon.$$

Тому, згідно з вище сформульованим критерієм, розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини $C(q_n)$ дорівнює нулю, що й вимагалося довести. □

3. s-кові ряди Сільвестера

Якщо (m_k) – зростаюча послідовність натуральних чисел, $2 \leq s$ – фіксоване натуральне число, то ряд

$$\frac{1}{s^{m_1}} + \frac{1}{s^{m_2}} + \dots + \frac{1}{s^{m_k}} + \dots \tag{16}$$

називається s-ковим рядом.

Очевидно, що два s-кові ряди мають однакові суми тоді і тільки тоді, коли їм відповідні послідовності (m_k) співпадають.

Знайдемо умови, при яких s-ковий ряд є рядом Сільвестера.

Лема 8. *Для того щоб s-ковий ряд був рядом Сільвестера, необхідно і достатньо, щоб для довільного $k \in N$*

$$m_{k+1} \geq 2m_k. \tag{17}$$

Доведення. Необхідність. Доведемо, що для s-кового ряду Сільвестера, має місце нерівність (17). Для цього скористаємось методом від супротивного. Припустимо, що $m_{k+1} < 2m_k$ для деякого $k \in N$. Тоді

$$m_{k+1} - m_k < m_k, \quad s^{m_{k+1}-m_k} < s^{m_k}, \quad \frac{s^{m_{k+1}}}{s^{m_k}} < s^{m_k},$$

звідки

$$\frac{s^{m_{k+1}}}{s^{m_k}} \leq s^{m_k} - 1,$$

$$s^{m_{k+1}} \le s^{m_k}(s^{m_k}-1) < s^{m_k}(s^{m_k}-1)+1.$$

Отримали протиріччя з умовою (2), що доводить необхідність.

Достатність. Покажемо, що з умови (17) випливає, що відповідний s-ковий ряд є рядом Сільвестера. Справді, з умови (17) слідує

$$m_{k+1}-m_k \ge m_k \quad \text{і} \quad s^{m_{k+1}-m_k} \ge s^{m_k} > s^{m_k}-1.$$

Тоді

$$s^{m_{k+1}} > s^{m_k}(s^{m_k}-1)$$

і

$$s^{m_{k+1}} \ge s^{m_k}(s^{m_k}-1)+1.$$

Отже, виконується умова (2) і відповідний s-ковий ряд є рядом Сільвестера. □

Класичним s-ковим розкладом числа $x \in [0,1]$ називається його розклад в ряд

$$x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \ldots + \frac{\alpha_k}{s^k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s^k}, \tag{18}$$

де $\alpha_k \in A = \{0,1,\ldots,s-1\}$. Вираз (18) символічно записується у вигляді

$$\Delta^s_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots} \tag{19}$$

і називається s-ковим зображенням числа x (зображенням числа в системі числення з основою s). При цьому число α_k називається k-тою s-адичною цифрою x.

Множина всіх чисел $x \in [0,1]$, які мають перші m s-кові цифри рівними $c_1\ldots c_m$, відповідно позначається $\Delta^s_{c_1\ldots c_m}$ і називається *s-ковим циліндром рангу m з основою* $c_1\ldots c_m$. Циліндри мають такі властивості:

1. Циліндр $\Delta^s_{c_1\ldots c_m}$ є відрізком з кінцями
$$\Delta_{c_1\ldots c_m(0)} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{s_i} \quad \text{і} \quad \Delta_{c_1\ldots c_m((s-1))} = \frac{1}{s_m} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{s_i};$$
2. $\Delta^s_{c_1\ldots c_m} = \bigcup\limits_{i=0}^{s-1} \Delta^s_{c_1\ldots c_m i}$; $\quad \sup \Delta c_1\ldots c_m i = \inf \Delta_{c_1\ldots c_m(i+1)}$;
3. $|\Delta^s_{c_1\ldots c_m}| = s^{-m}$;
4. $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^s_{c_1\ldots c_m} \equiv \Delta_{c_1\ldots c_m\ldots} = x \quad \forall (c_n) \in A^{\infty}$.

Лема 9. *Сума x s-кового ряду (16) має наступне s-кове зображення*

$$x = \Delta^s_{\underbrace{0\ldots0}_{m_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{m_2-m_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{m_3-m_2-1}1\underbrace{0\ldots0}_{m_4-m_3-1}\ldots}. \tag{20}$$

Доведення. Дане твердження випливає безпосередньо з означень s-кового розкладу та s-кового ряду. □

Теорема 2. *Нехай s – фіксоване натуральне число, більше 1. Множина E_s сум всіх s-кових рядів Сільвестера є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега і нульової розмірності Хаусдорфа-Безиковича.*

Доведення. Очевидно, що множина сум всіх s-кових рядів належить множині чисел відрізка $[0,1]$, s-кові зображення яких можливі з допомогою цифр 0 та 1, яка, як відомо [**8**], є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега при $s > 2$. А отже, такою є і множина E_s. Тому доведення досить провести лише для $s = 2$.

З лем 8 і 9 випливає, що сума 2-кового ряду Сільвестера в своєму 2-ковому зображенні не може містити три послідовні цифри 111 (більше того, дві цифри 11 можуть бути лише на перших двох місцях). Тому множина E_2 належить множині чисел $D[2, \overline{111}]$, двійкові розклади яких не містять комбінації цифри 111, яка, як відомо [**8**], є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега. Тоді такою є і E_2.

З леми 9 про s-кове зображення суми s-кового ряду Сільвестера випливає, що

$$E_2 = E_2^0 \cup E_2^1 \cup \ldots \cup E_2^p \cup \ldots,$$

де до множини E_2^p віднесено всі суми рядів, 2-кові зображення яких починаються цифрою 0, причому перші p цифр є нулями.

Покажемо, що кожна з множин E_2^p є аномально-фрактальною, тобто має розмірність Хаусдорфа-Безиковича рівну 0.

Розглянемо E_2^p, $p \geq 1$. Легко бачити, що для довільного $x \in E_2^p$ має місце нерівність

$$N_1(x, 2^n p) \equiv \#\{i : \alpha_i(x) = 1,\ i = \overline{1, 2^n p}\} \leq n.$$

Звідки

$$\frac{N_1(x, 2^n p)}{2^n p} \leq \frac{n}{2^n p} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

тобто частота $\nu_1(x)$ цифри 1 числа $x \in E_2^p$

$$\nu_1(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_1(x, 2^n p)}{2^n p} = 0.$$

Таким чином, множина E_2^p належить множині $M[\nu_0, \nu_1]$ Безиковича. Таким чином,

$$\alpha_0(E_2^p) \leq \alpha_0(M[0,1]) = \frac{\ln 0^0 1^1}{-\ln 2} = 0.$$

Отже,

$$\alpha_0(E_2^p) = 0.$$

Аналогічно, обґрунтовуються факти, що для довільного $x \in E_2^{1i}$, де $i \in \{0, 1\}$,

$$N_1(x, 2^n) \leq n + 1 \quad \text{і} \quad \nu_1(x) = 0.$$

А отже, $\alpha_0(E^{i0}) = 0$.

Тоді $\alpha_0(E_2) = \sup\limits_p \{\alpha_0(E_2^{10}), \alpha_0(E_2^{11}), \alpha_0(E_2^p)\} = 0$, що треба було довести. □

Наслідок 3. *Множина E всіх чисел $(0,1]$, які мають s-кові розклади Сільвестера (для деякого натурального $s > 1$) є аномально-фрактальною множиною, тобто має нульову розмірнсть Хаусдорфа-Безиковича.*

Справді, $E = \bigcup\limits_{s=2}^{\infty} E_s$.

Тому згідно властивості зліченної стабільності розмірності Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(E) = \sup\limits_p \alpha_0(E_s) = 0$.

4. Подання чисел рядами Сільвестера

Теорема 3. *Для довільного дійсного числа $x \in (0,1]$ існує едина послідовність (q_k) натуральних чисел, така, що $q_1 \geq 2$, $q_{n+1} \geq q_n(q_n - 1) + 1$ і*

$$x = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{1}{q_n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}. \tag{21}$$

Доведення. Існування. Розклад числа $x = 1$ у ряд (21) лема 3

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \ldots + \frac{1}{q_n} + \frac{1}{q_{n+1}} + \ldots, \text{ де } q_{n+1} = q_n(q_n - 1) + 1.$$

Оскільки

$$(0,1) = \bigcup_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right),$$

то існує $a_1 \in N$, $a_1 \geq 2$, таке, що

$$x \in \left[\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_1 - 1}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{a_1} \leq x < \frac{1}{a_1 - 1}.$$

Якщо $x = \dfrac{1}{a_1}$, то згідно з лемою 4

$$x = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ldots, \quad \text{де} \quad q_1 = a_1 + 1, \quad q_{n+1} = q_n(q_n - 1) + 1.$$

Нехай $\dfrac{1}{a_1} < x < \dfrac{1}{a_1 - 1}$, тобто $0 < x - \dfrac{1}{a_1} \equiv x_1 < \dfrac{1}{a_1(a_1 - 1)}$. Оскільки

$$\left(0, \frac{1}{a_1(a_1 - 1)}\right) = \bigcup_{n=a_1(a_1-1)+1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right),$$

то існує натуральне $a_2 \geq a_1(a_1 - 1) + 1$ таке, що

$$x_1 \in \left[\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_2 - 1}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{a_2} \leq x_1 < \frac{1}{a_2 - 1}.$$

Якщо $x_1 = \dfrac{1}{a_2}$, то враховуючи лему 4

$$x = \frac{1}{a_1} + x_1 = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \ldots \quad \text{де} \quad a_1 = q_1, \quad a_2 = q_2 + 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1}(a_{n+1} - 1) + 1.$$

Якщо ж

$$\frac{1}{a_2} < x_1 < \frac{1}{a_2 - 1}, \text{ то } 0 < x_1 - \frac{1}{a_2} \equiv x_2 < \frac{1}{a_2(a_2 - 1)}.$$

Тоді

$$0 < x_2 < \frac{1}{a_2(a_2 - 1)}$$

і стосовно x_2 можна повторити міркування, які велись для x_1. А саме:

$$\left(0, \frac{1}{a_2(a_2 - 1)}\right) = \bigcup_{n=a_2(a_2-1)+1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right),$$

тобто існує натуральне $a_3 \geq a_2(a_2 - 1) + 1$ таке, що

$$x_2 \in \left[\frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_3 - 1}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{a_3} \leq x_2 < \frac{1}{a_3 - 1}.$$

Якщо $x_2 = \dfrac{1}{a_3}$, то

$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + x_2 = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \frac{1}{q_4} + \ldots$$

$$\text{де} \quad q_i = a_i, \quad i = \overline{1, 2}, \quad q_3 = a_3 + 1, \quad q_{n+3} = q_{n+2}(q_{n+2} - 2) + 1.$$

Якщо ж мають місце нерівності

$$\frac{1}{a_3} < x_2 < \frac{1}{a_3 - 1},$$

то процес продовжується.

За скінченну кількість кроків ми отримаємо

$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_m} + x_m,$$

де $a_1 \geq 2,\ a_{n+1} \geq a_n(a_n - 1) + 1$.

$$0 \leq x_m < \frac{1}{a_m(a_m-1)} \to 0 \ (m \to \infty). \tag{22}$$

Якщо $x_m = 0$, то процес закінчився і згідно з лемою 4 отримаємо наступний розклад:

$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{m-1}} + \frac{1}{a_m} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{1}{q_{m-1}} + \frac{1}{q_m} + \frac{1}{q_{m+1}} + \ldots,$$

$$\text{де} \quad q_i = a_i, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad q_m = a_m + 1, \quad q_{n+m} = q_{n+m-1}(q_{n+m-1} - 1) + 1.$$

Якщо $x_m > 0$ для довільного $m \in N$, то процес продовжуватиметься до нескінченності і отримаємо рівність

$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{m-1}} + \frac{1}{a_m} + \ldots. \tag{23}$$

Тоді $q_i = a_i$ при всіх $i \in N$. Зазначимо, що збіжність ряду (23) до числа x випливає зі співвідношення (22).

Єдиність. Припустимо, що існує таке число $x \in (0, 1]$, яке можна подати двома різними послідовностями (q_k) і (q'_k), тобто

$$x = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{1}{q_m} + \ldots, \quad \text{де} \quad q_1 \geq 2,\ q_{n+1} \geq q_n(q_n - 1) + 1, \tag{24}$$

і

$$x = \frac{1}{q'_1} + \frac{1}{q'_2} + \ldots + \frac{1}{q'_m} + \ldots, \quad \text{де} \quad q'_1 \geq 2,\ q'_{n+1} \geq q'_n(q'_n - 1) + 1. \tag{25}$$

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{1}{q_m} + \underbrace{\frac{1}{q_{m+1}} + \ldots}_{r_m} = \frac{1}{q'_1} + \frac{1}{q'_2} + \ldots + \frac{1}{q'_m} + \underbrace{\frac{1}{q'_{m+1}} + \ldots}_{r'_m}.$$

Тоді, без обмеження загальності припустимо, що $\forall i \leq m\ q_i = q'_i$, а $q_{m+1} > q'_{m+1}$, тоді $\dfrac{1}{q_{m+1}} < \dfrac{1}{q'_{m+1}}$ і $r_m = r'_m$.

Згідно з лемою 5

$$r_m \leq \frac{1}{q_{m+1} - 1} \leq \frac{1}{q'_{m+1}} < r'_m.$$

Отримали протиріччя, отже, наше припущення хибне. □

Література

[1] *Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з умовами на їх розклади в ряди Остроградського // Укр. мат. журн. — 2007. —59, №9. —С. 1155-1168.

[2] *Гетьман Б. І.* Зображення чисел s-адичними рядами Енгеля // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2008. — №9. — С. 212-224.

[3] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. —Київ: Вид-во НПУ ім. М.П.Драгоманова, — 1998. —296с.

[4] *Працьовитий М. В., Лещинський О. Л.* Властивості випадкових величин, заданих розподілами елементів свого $\widetilde{Q}_\infty$-зображення // Теорія ймовірностей та мат. статистика. —1995 —№57.— С. 134-140.

[5] *Працьовитий М. В., Гетьман Б. І.* Ряди Енгеля та їх застосування // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2006. — №7. — С. 105-116.

[6] *Працьовита І. М.* Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2004. — №5. — С. 174-189.

[7] *Працьовита І. М.* Про знакозмінні s-адичні ряди і ряди Остроградського 1-го та 2-го виду // Укр. мат. журн. — 2009. — Т.61, №7. — С.958-968.

[8] *Ремез Е. Я.* О математических рукописях академика М. В. Остроградского // Историко-математические исследования, вып. IV. — Москва: Гостехтеориздат, — 1951. —С. 9-98.

[9] *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. — Москва: Физматгиз, 1961. — 112 с.

[10] *Cantor G.* Über die einfachen Zahlensysteme // Z. Math. Phys. — 1869. —Bd. 14. —S. 121-128.

[11] *Engel F.* Entwicklunj der cahlen nach Stammbrüchen. // verhandl. d. Versammlunj deuescher Philologen und Schulmänner in Marburg von 29. September bis 3 october 1913? Leipzcig 1914. — S.190-191.

[12] *Erdös P.,Renyi A.,Szüsz P.* On Engel's and Sylvester's series // Ann. Sci. Budapest, Sectio Math.— (1)1958. — P. 7–32.

[13] *Lüroth J.* Uber eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reine // Math. Ann. — 1883. — 21. — P.411-423.

[14] *Sierpinski W.* O kilku algorytmach dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi // C.R.Soc.Sci.Varsivie.— (4) 1911— P. 56–77.

[15] *Sylvester J. J.* On a point in the theory of vulgar fractions // Amer. Journal of Math.— (3)1880. — P. 332–335.,postscript ibid. 388–389.

[16] *Wu J.* How many points have the same Engel and Sylvester expansion? // Journal of Number Theory — (103) 2003. — P. 16–26.