Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2009, № 10.— С. 163–178.

УДК 512.542 + 512.543 + 512.544

Інваріантні структури вінцевого добутку симетричних груп

Р. В. Скуратовський
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

Анотація. Знайдено нормальні підгрупи скінченного ітерованого вінцевого добутку $S_n \wr \ldots \wr S_n$, $S_n \wr S_m$. Досліджено спеціальні класи нормальних підгруп знайдено їх потужність.

Abstract. Normal subgroups and there properties for finite iterated wreath products $S_n \wr \ldots \wr S_n$, $S_n \wr S_m$ are founded. The special classes of normal subgroups and there orders are investigated.

1. Вступ

Сучасним напрямком теорії груп є так звані задачі дослідження груп ізометрій різних комбінаторно - топологічних структур, що є традиційними для геометричної теорії груп. Часто це тісно пов'язується з вивченням груп автоморфізмів різних типів дерев. Так, група ізометрій берівського простору типу $(n_1, n_2, \ldots)$ ізоморфна групі ізометрій шарово - однорідного дерева такого ж типу.

Однією з причин інтересу до груп, що діють на деревах є те, що різноманітні цікаві приклади груп природним чином зображуються як групи, що діють зокрема на кореневих деревах, наприклад, нескінченні скінченно породжені періодичні групи. Окрім того, групи автоморфізмів (ізометрій) кореневих дерев ще активно вивчаються у зв‘язку з тим, що вони досить добре влаштовані і в них занурюються злічені фінітно апроксимовні групи, які містять цілий ряд підгруп з різноманітними властивостями. Так, в групи автоморфізмів таких дерев занурюються періодичні групи В.І.Сущанського, Р.І.Григорчука. Отже, природньо розглядати і нескінченно ітеровані вінцеві добутки скінченних груп підстановок. Зокрема, основною метою цієї роботи є опис усіх нормальних підгруп групи автоморфізмів скінченного регулярного кореневого дерева. В роботі розроблено інструменти для дослідженння нормальної будови, спираючись на специфіку вінцевого добутку симетричних груп.

2. Основні поняття і результати

Викладення матеріалу ведеться переважно згідно з термінологією статті [**3**], нагадаємо деякі поняття. Згідно з [**3**], [**6**] таблицями будемо називати найможливіші нескінченні набори вигляду

$$a = [a_k]_{k\in\mathbb{N}}, \quad \text{де} \quad a_k \in Fun(^{(k-1)}M, G_k),\ k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Нехай A – деяка множина таблиць вигляду (1), тоді k*–проекцією* множини A назвемо множину $[A]_k = \{[a]_k : a \in A\}$. Говоритимемо, що множина A є k*–координатною*, якщо $[A]_k = A$. Також позначимо символом $A|_k$ множину всіх функцій a_k таких, що $[\varepsilon, \ldots, \varepsilon, a_k, \varepsilon, \ldots] \in [A]_k$.

Нагадаємо, що там визначимо дію таблиці $a = [a_k]_{k\in\mathbb{N}}$ на елемент
$m = (m_k)_{k\in\mathbb{N}} \in M$ за правилом:

$$m^a = (m_k^{a_k(^{(k-1)}m)})_{k\in\mathbb{N}}.$$

Множина G всіх таблиць вигляду (1) відносно так визначеного множення утворює групу, нейтральним елементом якої є таблиця $e = [\ldots, \varepsilon, \varepsilon, \ldots]$, яка називається ℓ–вінцевим добутком груп (G_k, M_k), $k \in \mathbb{N}$ [**4**]. Групу ізометрій узагальненого простору Бера E [**2**] над сім'єю множин M_k, $k \in \mathbb{N}$, (далі узагальнимо до $k \in \mathbb{Z}$), позначатимемо як I згідно з [**2**]. Надалі вважатимемо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ множина M_k скінченна.

Означення 1. Будемо говорити, що підгрупа $U < G$ визначається своїми k–координатними множинами $[U]_k$, $k \in \mathbb{N}$, якщо ця підгрупа складається з найможливіших таблиць $a \in I$ таких, що для довільного $k \in \mathbb{N}$ $[a]_k \in [U]_k$. Якщо U – розщіплювальна підгрупа [**3**] групи I, яка визначена у [**3**], то
k–координатні множини $[U]_k$ є підгрупами групи U, причому
$[U]_k = {}^{(k)}U \bigcap U^{(k+1)}$, де ${}^{(k)}U = \{{}^{(k)}a : a \in U\}$, $U^{(k)} = \{a^{(k+1)} : a \in U\}$. Крім того, родина $[U]_k$, де $k \in \mathbb{N}$ породжуватиме всюди щільну підгрупу U' групи U. Розщіплювальні нормальні підгрупи групи I вивчалися також у [**4**].

Означення 2. Нехай $U < I^{(k-1)}$. Тоді $I^{(k)}$–допустиму нормальну підгрупу V групи $[I]_k$ назвемо U–насиченою, якщо для кожного $b \in [I]_k$ та $a \in U$ має місце включення $b_k(^{(k-1)}x) \cdot b_k^{-1}(^{(k-1)}(x^a)) \in V|_k$.

В означенні допустимої та насиченої підгруп замість групи $I^{(k-1)}$ можна брати і її підгрупи, наприклад, $(I^{*(k-1)})$ чи $\widetilde{I}^{*(k-1)}$. При цьому змістовність попередніх означень не втратиться.

3. Нормальні підгрупи вінцевого добутку

3.1. Нормальні підгрупи у вінцевому добутку двох груп S_n і S_m. Розглянемо вінцевий добуток двох симетричних груп степені $n \geqslant 5$, тобто маємо $S_n \wr S_n, n \geqslant 5$.

Одразу зауважимо, що подальші викладки будуть правильними і для $n \geqslant 3$, та у випадку, коли порядки наших двох симетричних груп різні. Тоді елементи нашого вінцевого добутку $S_n \wr S_n, n \geqslant 5$, задаватимемо таблицями, де $[a]_1$ – активний елемент таблиці і $a \in S_n$, $[a_1, a_2, ..., a_n]_2$ – пасивні елементи таблиці, $a_i \in S_n$, тобто:

$$[a_1]_1,\ [a_1, a_2, \ldots, a_n]_2.$$

Правило множення таблиць описані у книзі **[5]**. Дамо наступні означення:

Означення 3. Позначимо через $rnk([a_i]_j)$ кількість незалежних транспозицій (саме такі наявні у системі твірних Мура для A_n) у розкладі підстановки, яка відповідає елементу таблиці $[a_i]_j$. Нехай $rnk(e) = 0$.

Означення 4. Множину елементів з вінцевого добутку $S_n \wr S_n, n \geqslant 5$, табличне задання яких має вигляд: $[e]_1,\ [a_1, a_2, \ldots, a_n]_2$, причому

$$\sum_{i=1}^{n} rnk([a_i]_2) = 2k, k \in \mathbb{N},$$

будемо називати множиною типу $\widetilde{A}^{(0)}$.

Зауваження 1. *Множину типу $\widetilde{A}^{(0)}$ будемо також позначати через $e \wr \widetilde{A_n}$.*

Твердження 1. *За вище введених позначень виконується $e \wr \widetilde{A_n} \lhd S_n \wr S_n$.*

Доведення. Справді $e \wr \widetilde{A_n}$ є групою бо:

(i) Нехай $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}$ елементи групи $e \wr \widetilde{A_n}$, які відповідно задаються наступними таблицями: $[e]_1,\ [a_1, a_2, \ldots, a_n]_2; [e]_1,\ [b_1, b_2, \ldots, b_n]_2;$
$[e]_1, [c_1, c_2, \ldots, c_n]_2$. Тоді: $(\widetilde{a} \cdot \widetilde{b}) \cdot \widetilde{c}$ буде задаватися таблицею вигляду
$[e]_1,\ [(a_1 \cdot b_1) \cdot c_1, (a_2 \cdot b_2) \cdot c_2, \ldots, (a_n \cdot b_n) \cdot c_n]_2$, яка, враховуючи асоціативність множення підстановок, в свою чергу рівна таблиці $[e]_1,\ [a_1 \cdot (b_1 \cdot c_1), a_2 \cdot (b_2 \cdot c_2), \ldots, a_n \cdot (b_n \cdot c_n)]_2$, яка задає елемент $\widetilde{a} \cdot (\widetilde{b} \cdot \widetilde{c})$. Звідси маємо асоціативність.

(ii) в $e \wr \widetilde{A_n}$ існує нейтральний елемент $\widetilde{e}$ це таблиця $[e]_1,\ [e, e, \ldots, e]_2$.

(iii) для кожного елемента $\widetilde{a} \in e \wr \widetilde{A_n}$ заданого таблицею $[e]_1,\ [a_1, a_2, \ldots, a_n]_2$ існує обернений елемент $\widetilde{a}^{-1} \in e \wr \widetilde{A_n}$, табличний вигляд якого наступний: $[e]_1,\ [a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1}]_2$. Зауважимо, що: $\sum_{i=1}^{n} rnk([a_i]_2) = \sum_{i=1}^{n} rnk([a_i^{-1}]_2) = 2k,\ k \in \mathbb{N}$, оскільки $rnk(a_i) = rnk(a_i^{-1})$, $0 \leq i \leq n$.

Таким чином $e \wr \widetilde{A_n}$ є групою, а отже і підгрупою в $S_n \wr S_n$ за означенням.

Покажемо тепер нормальність підгрупи, яку розглядаємо. Для цього спочатку зауважимо, що якщо маємо дві спецільного виду підстановки, що розкладаються в добуток траспозицій $\pi_1, \pi_2 \in S_n$, які обрані з сукупності незалежних транспозицій з S_n, то тоді має місце наступна формула:

$$rnk(\pi_1 \cdot \pi_2) = rnk(\pi_1) + rnk(\pi_2) - 2m, m \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Доданок '-2m' виникає внаслідок можливого скорочення транспозицій, які є в розкладі наших підстановок, але головним для нас є, що це число скорочень є парним.

Для доведення нормальності підгрупи $e\wr\widetilde{A_n}$ візьмемо довільний елемент $s \in S_n\wr S_n$, табличне задання якого має вигляд: $[s_1]_1,\ [s_1, s_2, \ldots, s_n]_2$. Варто зауважити, що для оберненого елемента $s^{-1} \in S_n \wr S_n$ маємо: $\sum_{i=1}^{n} rnk([s_i]_2) = \sum_{i=1}^{n} rnk([s_i^{-1}]_2) = k$. Для кожного $\widetilde{a} \in e \wr \widetilde{A_n}$, такого, що $\sum_{i=1}^{n} rnk([s_i]_2) = 2m$, розглянемо добуток: $s \cdot \widetilde{a} \cdot s^{-1}$. Треба показати, що цей елемент теж належить $e \wr \widetilde{A_n}$. Позначимо його табличне задання через: $[b_1]_1,\ [b_1, b_2, \ldots, b_n]_2$. Тоді з означення вінцевого добутку, а також з (2) маємо наступне: $[b_1]_1 = [s_1 \cdot e \cdot s_1^{-1}]_1 = [e]_1$, та $\sum_{i=1}^{n} rnk([b_i]_2) = \sum_{i=1}^{n} rnk([s_i]_2) + \sum_{i=1}^{n} rnk([a_i]_2) - 2a + \sum_{i=1}^{n} rnk([s_i^{-1}]_2) - 2b = k + 2m - 2a + k - 2b = 2(k + m - a - b)$, тобто є парним числом, що і за означенням $e \wr \widetilde{A_n}$ означає, що $s \cdot \widetilde{a} \cdot s^{-1} \in e \wr \widetilde{A_n}$, що і потрібно було довести. □

Твердження 2. *Позначимо через* $\widehat{a}$ *елемент з* $e \wr \widetilde{A_n}$, *що задається таблицею:* $[e]_1,\ [(12), (12), e, e \ldots, e]_2$. *Тоді нормальне замикання таких елементів –* $N(\widehat{a}) = e \wr \widetilde{A_n}$.

Доведення. Для доведення потрібно показати, що кожен елемент з $e\wr\widetilde{A_n}$ можна отримати в наслідок такої послідовності дій:

1) спряженням елементів з $N(\widehat{a})$ елементами з $S_n \wr S_n$ (де $\forall a \in N(\widehat{a})$, $\forall s \in S_n \wr S_n : s \cdot a \cdot s^{-1} \in N(\widehat{a})$) та

2) множенням двох елементів з $N(\widehat{a})$ один на одний причому $\forall a, b \in N(\widehat{a}) : a \cdot b \in N(\widehat{a})$.

Позначимо через $a_{\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n}$ елемент з $e \wr \widetilde{A_n}$, що має такий табличний вигляд: $[e]_1,\ [\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n]_2,\ \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n \in S_n,\ \sum_{i=0}^{n} rnk([\pi_i]_2) = 2k, k \in \mathbb{N}$. Тоді, наприклад $\widehat{a} = a_{(12),(12),e,\ldots,e}$. Доведення проводемо поетапною побудовою.

(a) $\pi_1 = (i_1 i_2), \pi_2 = (j_1 j_2), \pi_3 = \ldots = \pi_n = e$. Тоді $a_{\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n} = s \cdot \widehat{a} \cdot s^{-1} \in$ $\in N(\widehat{a})$, де s матиме табличний вигляд: $[e]_1,\ [(1 i_1 2 i_2), (1 j_1 2 j_2), e, e \ldots, e]_2$.

(b) $\pi_1 = (i_1 i_2)(i_3 i_4)$, $\pi_2 = \ldots = \pi_n = e$. Тоді елемент $a_{\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n}$ виражається: $a_{(i_1 i_2),(12),\ldots,\pi_n} \cdot a_{(i_3 i_4),(12),\ldots,\pi_n} \in N(\widehat{a})$. Аналогічно у випадку $\pi_2 = (j_1 j_2)(j_3 j_4)$, $\pi_1 = \pi_3 = \ldots = \pi_n = e$.

(c) $\pi_1 = (i_1 i_2) \ldots (i_{2x-1} i_{2x})$, $\pi_2 = (j_1 j_2) \ldots (j_{2y-1} j_{2y}), \pi_3 = \ldots = \pi_n = e$. Не обмежуючи загальності вважаємо, що $x \geqslant y$, причому, оскільки $rnk(\pi_1 + +\pi_2) = 2k$, то $(x - y)$ - парне число, тоді: $a_{\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n} = a_{(i_1 i_2),(j_1 j_2),e\ldots,e} \cdot \ldots \cdot a_{(i_{2x-1} i_{2x}),(j_{2x-1} j_{2x}),e\ldots,e} \cdot a_{(i_{2x+1} i_{2x+2})(j_{2x+3} j_{2x+4}),e\ldots,e} \cdot \ldots \cdot a_{(i_{2y-4} i_{2y-3})(j_{2y-1} j_{2y}),e\ldots,e} \in$ $\in N(\widehat{a})$. Тобто такі елементи є добутком елементів описаних у пункті (a) і (b).

(d) Маємо $\pi_1 = (i_1 i_2) \ldots (i_{4x-1} i_{4x})$, $\pi_2 = \ldots = \pi_n = e$. Тоді $a_{\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n}$ можна записати так: $a_{(i_1 i_2)(i_3 i_4),e\ldots,e} \cdot \ldots \cdot a_{(i_{4x-4} i_{4x-3})(j_{4x-1} j_{4x}),e\ldots,e} \in N(\widehat{a})$. Тобто такі елементи є добутком елементів описаних у пункті (b).

(e) $\pi_i \neq e, \pi_j \neq e, rnk(\pi_i + \pi_j) = 2z,\ z \in \mathbb{N}, \pi_k = e, k \neq i, j$. Тоді $a_{\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n} = = s \cdot a_{\pi_1,\pi_2,e,\ldots,e} \cdot s^{-1} \in N(\widehat{a})$, де s матиме табличний вигляд: $[(1i)(2j)]_1,\ [e\ldots,e]_2$. Тобто такі елементи є спряженеми до елементів описаних у пункті (c).

(f) $\pi_i \neq e, rnk(\pi_i) = 2z, z \in \mathbb{N}, \pi_k = e, k \neq i$. Тоді $a_{\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n} = s \cdot a_{\pi_1,e,\ldots,e} \cdot s^{-1} \in N(\widehat{a})$, де s матиме табличний вигляд: $[(1i)]_1,\ [e\ldots,e]_2$. Тобто такі елементи є спряженеми до елементів описаних у пункті (d).

(g) $\pi_i \neq e, i = \overline{1,n}$, і виконується $\sum_{i=1}^{n} rnk([\pi_i]) = 2z, z \in \mathbb{N}$. Тоді $a_{\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n}$ є добутком елементів описаних у пунктах (e), (f).

У пунктах (a)-(g) описана побудова всіх елементів з $e \wr \widetilde{A_n}$, що і потрібно було довести. □

Зауваження 2. *Твердження залишається правильним і у випадку, коли:* $\widehat{b} = a_{e,\ldots,e,(i_1 i_2),e,\ldots,e,(j_1 j_2),e,\ldots,e},\ i_1, i_2, j_1, j_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Доведення. Для доведення твердження потрібно показати, що $\widehat{a} \in N(\widehat{b})$, оскільки обернене включення випливає з доведення твердження. Отже, маємо:

$a_{e,\ldots,e,(12),e,\ldots,e,(12),e,\ldots,e} = a_{e,\ldots,e,(i_1 1 i_2 2),e,\ldots,e,(j_1 1 2 j_2),e,\ldots,e}\cdot$
$\cdot\widehat{b} \cdot (a_{e,\ldots,e,(i_1 1 i_2 2),e,\ldots,e,(j_1 1 j_2 2),e,\ldots,e})^{-1} \in N(\widehat{b})$.

Нехай в отриманому елементі нетотожні підстановки знаходятся на місцях i та j. Тоді:

$$\widehat{a} = s \cdot a_{e,\ldots,e,(12),e,\ldots,e,(12),e,\ldots,e} \cdot s^{-1} \in N(\widehat{b}),$$

де підстановка s має наступний табличний вигляд: $[(1i)(2j)]_1,\ [e\ldots,e]_2$ □

Твердження 3. *Позначимо через* $\widetilde{a}$ *елемент* $e \wr \widetilde{A_n}$, *що задається таблицею:* $[e]_1,\ [(123), e, e, e\ldots, e]_2$. *Тоді* $N(\widetilde{a}) = e \wr A_n$.

Доведення. Для доведення скористаємося позначеннями попереднього твердження.

(a) $\pi_1 \in A_n, \pi_2 = \ldots = \pi_n = e$.

Оскільки A_n є нормальною підгрупою в S_n, то нормальне замикання будь-якого з її елементів буде співпадати з A_n. А отже елемент $a_{\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n} \in N(\widetilde{a})$ можна отримати перетвореннями першого та другого вигляду (див. твердження 3.2) з елемента $\widetilde{a}$.

(b) $\pi_i \neq e, \pi_i \in A_n, \pi_k = e, k \neq i$. Тоді

$$a_{\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n} = s \cdot a_{\pi_1,e,\ldots,e} \cdot s^{-1} \in N(\widetilde{a}),$$

де s матиме табличний вигляд: $[(1i)]_1,\ [e\ldots,e]_2$. Тобто такі елементи є спряженеми до елементів описаних у пункті (a).

(c) $\pi_i \in A_n, i = \overline{1,n}$. Тоді $a_{\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n}$ є добутком елементів описаних у пункті (b).

В пунктах (a)-(c) описана побудова всіх елементів з $e \wr A_n$, що і потрібно було довести. □

Наслідок 1. *Твердження залишається правильним і у випадку, коли:* $\widetilde{b} = a_{e,\ldots,e,(i_1 i_2 i_3),e,\ldots,e}$, $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Доведення. Для доведення твердження потрібно показати, що $\widetilde{a} \in N(\widetilde{b})$, оскільки обернене включення випливає з доведення твердження. Отже, маємо: $a_{e,\ldots,e,(123),e,\ldots,e} = a_{e,\ldots,e,(i_1 1 i_2 2 i_3 3),e,\ldots,e} \cdot \widehat{b} \cdot (a_{e,\ldots,e,(i_1 1 i_2 2 i_3 3),e,\ldots,e})^{-1} \in N(\widetilde{b})$. Нехай в отриманому елементі нетотожні підстановки знаходятся на місцях i та j. Тоді:

$$\widetilde{a} = s \cdot a_{e,\ldots,e,(123),e,\ldots,e} \cdot s^{-1} \in N(\widehat{b}),$$

де підстановка s має наступний табличний вигляд: $[(1i)]_1$, $[e \ldots, e]_2$. □

Зауважимо, що якщо Q власна підгрупа глибини k і $Q \triangleleft \wr_{i=1}^{m} S_{n_i}$, де k - скінченне натуральне число, $n_i \geq 5$, m може прямувати до ∞, тоді підгрупа Q містить у вершинах портрета скінченні елементи t_i, що породжують елементи, які мають довільні парні підстановками на кожному рівні, де автоморфізми не тривіальні, глибиною не меншою за k. Нехай на k-ому рівні існує вершина з не тривіальною підстановкою σ, наприклад, $\sigma = (1, 2, ..., l)$, $\sigma \in S_{n_1}$ і $k = 1$, σ може містити кілька циклів але достатньо розглянути один, тоді портрет автоморфізма, що стоїть у цій вершині, можна задати таблицею $x = (\sigma, b_1, b_2,$
$..., b_{l-1}, b_l)$, $b_i \in \wr_{i=1}^{m-1} S_{n_i}$, $i \leq l$ нехай $y = (\sigma_1, e, e, ..., e, e)$, де $\sigma_1 = (1, 2, ..., l-2)$, $z = yxy^{-1} = (\sigma, b_2, b_3, ..., b_{l-2}, b_1, b_{l-1}, b_l)$, $zx^{-1} = yxy^{-1}x^{-1} = (\sigma, a_1, ..., a_{l-2}, e, e)$, де $a_1 = b_2 b_l^{-1}$, бо $x^{-1} = (\sigma^{-1}, b_l^{-1}, b_1^{-1}, b_2^{-1}, ..., b_{l-1}^{-1})$. Помітимо, що $x^{-1}z$ вже є парною підстановкою. Тепер спрягаємо таким елементом $g = ((4, 5), e, e, e, e, e)$, який переставляє лише одиничні елементи, щоб не змістити не одиничні. Отримуємо $gyxy^{-1}x^{-1}g^{-1} = (\pi; a_1, a_2, ..., a_{l-2}, e, e)$ домножимо: $z^{-1}xgx^{-1}yxy^{-1}g^{-1} =$
$= ((\tau), e, e, e, e, e)$ отримаємо елемент стан якого у вершинах 2-го, 3-го, … рівнів є тривіальним а підстановка τ на першому – парна підстановка з комутанта S_{n_1}. Інші елементи з комутанта отримаємо шляхом групового замикання комутаторів. Аналогіно знаходимо елемент глибини 2 у якого на другому рівні парна підстановка а нижче лише тривіальні підстановки, потім теж саме для 3-го рівня і так до останнього. Саме цими елементами можна породити на $i-$ому рівні усі парні підстановки з S_{n_i} для всіх $k \leq i \leq m$ одночасно.

Для прикладу проаналізуємо всі нормальні підгрупи з $S_3 \wr S_3$. З результатів обчислень в GAP маємо, що нормальних підгруп в $S_3 \wr S_3$ є 10, але $G_0 = E$, $G_1 = S_3 \wr S_3$. Тому власних нормальних підгруп є 7, бо $G_5 \cong G_6$.

$G_2 = \langle(7, 8, 9), (4, 5, 6), (1, 2, 3)\rangle$

$G_3 = \langle(7, 8, 9), (4, 5, 6), (1, 2, 3), (2, 3)(8, 9), (2, 3)(5, 6)\rangle$

$G_4 = \langle(7, 8, 9), (4, 5, 6), (1, 2, 3), (1, 4, 7)(2, 5, 8)(3, 6, 9), (2, 3)(5, 6)\rangle$

$G_5 = \langle(((7, 8, 9), (4, 5, 6), (1, 2, 3), (1, 4)(2, 6)(3, 5)(8, 9), (1, 4, 7)(2, 5, 8)(3, 6, 9),$

$(2,3)(5,6)\rangle$
$G_6 = \langle (7,8,9),(4,5,6),(1,2,3),(1,4)(2,5)(3,6),(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9),(2,3)(5,6)\rangle$
$G_7 = \langle ((2,3)(5,6)(8,9),(7,8,9),(4,5,6),(1,2,3)\rangle$
$G_8 = \langle (8,9),(5,6),(2,3),(7,8,9),(4,5,6),(1,2,3)\rangle$
$G_9 = \langle (1,4,7)(2,5,8)(3,6,9),(8,9),(5,6),(2,3),(7,8,9),(4,5,6),(1,2,3)\rangle$

Як бачимо всі ці підгрупи можна ідентифікувати, окрім тієї, що знаходиться під номером 7. Означимо її:

Означення 5. Підгрупу в $S_n \wr S_n$, називатимемо підгрупою типу $\widetilde{B_n}$, якщо вона містить наступні елементи:
1. $e \wr A_n \subset \widetilde{B_n}$ (елементи з $e \wr A_n$ назвемо елементами першого типу з $\widetilde{B_n}$).
2. $\widetilde{B_n}$ має містити елементи з наступним табличним заданням:
$[e]_1,\ [\pi_1 \ldots, \pi_n]_2, \forall i = 1, \ldots n : rnk(\pi_i) = 2k+1, k \in \mathbf{N}$ (такі елементи називатимемо елементами другого типу підгрупи $\widetilde{B_n}$).

Легко показати коректність означення, тобто що дана підгрупа є групою, а також її нормальність. Також легко зрозуміти, що $G_5 \cong G_6$, бо твірні для $G_5 \cong \langle a,b,c,d,e,f\rangle$ виражаються через твірні групи $G_6 \cong \langle a,b,c,\widehat{d},e,f\rangle$, справді елемент d виражається через твірні групи $G_6 : d = \widehat{d} \cdot e^{-1} \cdot f$.

Таким чином, як бачимо в $S_3 \wr S_3$ є сім власних нормальних підгруп, причому з вигляду їх твірних елементів можна зробити висновок, що ці підгрупи є розщіплюваними.

Твердження 4. *Власними нормальними підгрупами в $S_3 \wr S_3$ будуть підгрупи одного з двох типів:*
1. підгрупи, що "діють на одному (нижньому) рівні"це G_2, G_3, G_7, G_8 це підгрупи з $e \wr A_3, B_3, e \wr S_3$ відповідно;
2. підгрупи, що "діють на обох рівнях"це $G_4 < A_3 \wr A_3$, $G_5 < S_3 \wr A_3$, $G_9 < A_3 \wr S_3$. Більш того, всі ці підгрупи будуть розщіплюваними.

Доведення. Доведення цього факту у більш загальному випадку буде дано у наступному розділі. □

Схожі результати система *GAP* дає і для вінцевого добутку $S_n \wr S_m$, для $n, m \geqslant 3, n, m \neq 4$. Зробимо узагальнення останньої теореми з попереднього пункта:

Теорема 1. *Власними нормальними підгрупами в $S_n \wr S_m$, $n, m \geqslant 3, n, m \neq 4$ будуть підгрупи одного з двох типів:*

1. підгрупи, що "діють на одному (нижньому) рівні а саме: $e \wr A_m$, $e \wr \widetilde{A_m}$, $\widetilde{B_m}$, $e \wr S_m$;

2. підгрупи, що "діють на обох рівнях а саме: $A_n \wr \widetilde{A_m}$, $S_n \wr \widetilde{A_m}$, $A_n \wr S_m$;

Більш того, всі ці підгрупи будуть розщіплюваними.

Доведення. Спочатку зауважимо, що всі наші нормальні підгрупи містять в собі підгрупу $e \wr A_m$. Нормальність кожної з цих підгруп достатньо перевіряти на твірних елементах (тобто спрягати їх елементами з $S_n \wr S_m$ для $n, m \geqslant 3$,
$n, m \neq 4$). Твірні елементи кожної з підгруп будемо виписувати по аналогії з нормальними підгрупами $S_3 \wr S_3$. Розщіплюваність кожної з цих підгруп буде випливати з вигляду їх твірних елементів.

1. a) $e \wr A_m$: Твірні елементи будуть мати наступний вигляд: $a_{e,\dots,e,(i_1 i_2 i_3),e,\dots,e}$, де $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, \dots, m\}$, оскільки A_m породжується циклами порядку 3.

Нормальність підгрупи. Візьмемо довільний твірний $a = a_{e,\dots,e,(i_1 i_2 i_3),e,\dots,e}$, $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, \dots, m\} \in A_m$. Тоді для будь-якого елемента $b \in S_n \wr S_m$, що таблично задається у вигляді: $[\pi_0]_1, [\pi_1, \dots, \pi_n]_2, \pi_0 \in S_n, \pi_1, \dots, \pi_n \in S_m$
маємо: $[b \cdot a \cdot b^{-1}]_1 = [\pi_0 \cdot e \cdot \pi_0^{-1}] = [e]_1$; $[b \cdot a \cdot b^{-1}]_2 = [b(x) \cdot a(x^{\pi_0}) \cdot b^{-1}(x^{\pi_0 \cdot \pi_0^{-1}})]_2 =$
$= [\pi_1 \cdot e \cdot \pi_1^{-1}, \dots, \pi(x^{\pi_0}) \cdot (i_1 i_2 i_3) \cdot \pi(x^{\pi_0})^{-1}, \dots, \pi_n \cdot e \cdot \pi_n^{-1}]_2 =$
$= [e, \dots, e, \pi(x^{\pi_0}) \cdot (i_1 i_2 i_3) \cdot \pi(x^{\pi_0})^{-1}, e, \dots, e]_2$.
Очевидно, що елемент з описаним вище табличним заданням буде належати $e \wr A_m$ (оскільки $\pi(x^{\pi_0}) \cdot (i_1 i_2 i_3) \cdot \pi(x^{\pi_0})^{-1}$ - буде парною підстановкою), що і потрібно було довести.

b) $e \wr \widetilde{A_m}$: Твірні елементи будуть мати наступний вигляд: $a_{e,\dots,e,(i_1 i_2 i_3),e,\dots,e}$,
де $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, \dots, m\}$ та $a_{(i_1 i_2),e,\dots,e,(i_1 i_2),e,\dots,e}$, $i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Нормальність підгрупи доведена у твердженні 2.

c) $\widetilde{B_m}$: Твірні елементи будуть мати наступний вигляд: $a_{e,\dots,e,(i_1 i_2 i_3),e,\dots,e}$,
де $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, \dots, m\}$ та $a_{(i_1 i_2),\dots,(i_1 i_2),\dots,(i_1 i_2)}, i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Нормальність підгрупи. Для твірних елементів першого типу включення спряжених до них елементів в нашу підгрупу було доведено в пункті а). Залишилось показати таке ж включення для твірних другого типу. Нехай маємо твірний елемент $a_{(i_1 i_2),\dots,(i_1 i_2),\dots,(i_1 i_2)}, \in \widetilde{B_m}$. Тоді для будь-якого елемента
$b \in S_n \wr S_m$, що таблично задається у вигляді $[\pi_0]_1, [\pi_1, \dots, \pi_n]_2, \pi_0 \in S_n$,
$\pi_1, \dots, \pi_n \in S_m$ маємо:

$$[b \cdot a \cdot b^{-1}]_1 = [\pi_0 \cdot e \cdot \pi_0^{-1}] = [e]_1; \tag{3}$$

$$[b \cdot a \cdot b^{-1}]_2 = [b(x) \cdot a(x^{\pi_0}) \cdot b^{-1}(x^{\pi_0 \cdot \pi_0^{-1}})]_2 =$$

$$= [\pi_1 \cdot (i_1 i_2) \cdot \pi_1^{-1}, \dots, \pi_1 \cdot (i_1 i_2) \cdot \pi_n^{-1}]_2 =$$

$$= [\pi_k(x^{\pi_0}) \cdot (i_1 i_2) \cdot \pi_k(x^{\pi_0})^{-1}]_2.$$

Очевидно, що елемент з описаним вище табличним заданням буде належати $\widetilde{B_m}$ (оскільки $\pi_k(x^{\pi_0}) \cdot (i_1 i_2) \cdot \pi_k(x^{\pi_0})^{-1}$ - буде непарною підстановкою), що і потрібно було довести.

d) $e \wr S_m$: Твірні елементи будуть мати наступний вигляд: $a_{e,\ldots,e,(i_1 i_2 i_3),e,\ldots,e}$, де $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, \ldots, m\}$ та $a_{e,\ldots,e,(i_1 i_2),e,\ldots,e}$, $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Нормальність підгрупи. Очевидно, оскільки на першому рівні при спряженні твірних елементів завжди буде виникати тотожна підстановка, а на другому – будь-яка підстановка з S_m, що і потрібно для доведення.

2. Нормальність підгруп описаних у пункті 2 доводиться аналогічно як і для підгруп пункту 1 та того факту, що на другому рівні виникають і підгрупи нормальні в S_m.

a) $A_n \wr \widetilde{A_m}$: Твірні елементи будуть мати наступний вигляд: ті ж самі, що і в $e \wr \widetilde{A_m}$ та підстановки з наступним табличним заданням:

$$[(i_1 i_2 i_3)]_1, [e, \ldots, e]_2, \ i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

b) $S_n \wr \widetilde{A_m}$: Твірні елементи будуть мати наступний вигляд: ті ж самі, що і в $A_n \wr \widetilde{A_m}$ та підстановки з наступним табличним заданням:

$$[(i_1 i_2)]_1, [e, \ldots, e]_2, \ i_1, i_2, \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

c) $A_n \wr S_m$: Твірні елементи будуть мати наступний вигляд: ті ж самі, що і в $e \wr S_m$ та підстановки з наступним табличним заданням:

$$[(i_1 i_2 i_3)]_1, [e, \ldots, e]_2, \ i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

□

3.2. Деякі нормальні підгрупи $S_n \wr \ldots \wr S_n$.

Означення 6. Множину елементів з вінцевого добутку $\wr_1^m S_n, n \geqslant 5$, табличне задання яких має вигляд:

$$[e]_1, [e, e, \ldots, e]_2, \ldots, [e, e, \ldots, e]_{(k-1)}, \ [a_1, a_2, \ldots, a_{l(k)}]_k, \ldots [a_1, a_2, \ldots, a_{l(m)}]_m,$$

$$\sum_{i=1}^{l(p)} rnk([a_i]_p) = 2z, z \in \mathbb{N}, p = \overline{k, m} \tag{4}$$

будемо називати множиною типу позначимо через $\widetilde{A_n}^{(k)}$. (Тобто якщо зображати елементи підгрупи у вигляді дерев, то вони будуть складатися з m рівнів: на перших k рівнях будуть діяти тривіальні підстановки, а сума порядків підстановок, що знаходяться на рівнях з номером $\geqslant k$ буде числом парним).

Зауваження 3. *За введених раніше позначень* $\widetilde{A_n}^{(k)} = e \wr \ldots e \wr \widetilde{A_n} \wr \ldots \wr \widetilde{A_n}$.

Зауваження 4. *При* $k = 1 : \widetilde{A_n}^{(k)} = A_n \wr \widetilde{A_n} \ldots \wr \widetilde{A_n}$.

Твердження 5. *Маємо наступне твердження:* $\forall k = \overline{1, m}$: $\widetilde{A_n}^{k}$ *є нормальною підгрупою в* $S_n \wr \ldots \wr S_n$ *тобто* $\widetilde{A_n}^{k} \lhd S_n \wr \ldots \wr S_n$.

Доведення. Для $k \neq 1$ доведення повністю аналогічне твердженню 2.1. Для $k = 1$ доведення випливає з теореми 2.2 пункту 2. □

Теорема 2 (Про деякі нормальні підгрупи $S_n \wr \ldots \wr S_n$). *Власними нормальними підгрупами в* $S_n \wr \ldots \wr S_n$, $n \geqslant 3, n, m \neq 4$ *будуть підгрупи:*

1) $e \wr \ldots \wr e \wr A_n$
2) $\forall k = \overline{1, m}$: $\widetilde{A_n}^{(k)}$
3) $e \wr \ldots \wr e \wr S_n \wr \ldots \wr S_n$
4) $e \wr \ldots \wr e \wr S_n \wr \ldots \wr S_n \wr A_n$
5) $e \wr \ldots \wr e \wr S_n \wr \ldots \wr S_n \wr \widetilde{A_n} \wr \ldots \wr \widetilde{A_n}$
6) $S_n \wr \ldots \wr S_n \wr A_n$
7) $S_n \wr \ldots \wr S_n \wr \widetilde{A_n} \wr \ldots \widetilde{A_n}$

Більш того, всі ці підгрупи будуть розщіплюваними.

Доведення. Нехай маємо вінцевий добуток m симетричних груп підстановок $S_n \wr \ldots \wr S_n$. Тоді:

1) безпосередньо випливає з теореми 2.

2) доведемо методом математичної індукції по k. База індукції $k = m$ випливає з пункту 1 теореми 2. Нехай твердження виконується для $k = l$, $l = \overline{2, m-1}$. Доведемо, що твердження залишається вірним і для $k = l - 1$. Візьмемо довільний елемент з $b \in S_n \wr \ldots \wr S_n$. Нехай він задається таблицею: $[b_i]_j, j = \overline{1, m}$, $b_i \in S_n$. Будь-який елемент $a \in \widetilde{A_n}^{(k)}$ має наступний табличний вигляд: $[e, \ldots, e]_j, j = \overline{1, k-1}, [a_i]_j, j = \overline{k, m}, \sum_i rnk([a_i]_j) = 2z, z \in \mathbb{N}, p =$
$= \overline{k, m}$. Тоді маємо:

$$[b \cdot a \cdot b^{-1}]_j = [b_i \cdot e_i \cdot bi^{-1}]_j = [e_i]_j, j = \overline{1, l-2};$$

$\sum_i rnk([b_i \cdot a_i \cdot b_i^{-1}]_{l-1}) = 2z, z \in \mathbb{N}$ (за твердженням 1), $\sum_i rnk([b_i \cdot a_i \cdot$ $\cdot b_i^{-1}]_j) = 2z, z \in \mathbb{N}, j = \overline{l, m}$ (за припущенням індукції), отриманий внаслідок спряження елемент буде міститися в $\widetilde{A_n}^{(l-1)}$, що і потрібно було довести.

Твердження з пуктів 3),4),5),6),7) доводяться аналогічно пункту 2) методом математичної індукції. База індукції випливає з твердження 2. Крок індукції вважаємо виконаним. При переході до наступного кроку, як і в пункті 2) на $l - 1$ рівні у підстановці a можуть з'являтися наступні підгрупи: e, $\widetilde{A_n}, S_n$. Належність отриманого елемента до відповідної підгрупи для випадку $\widetilde{A_n}$ доводиться аналогічну пункту 2), а для інших 2-х випадків твердження тривіальне. $\square$

3.3. Властивості фактор-групи по нормальній підгрупі. Оскільки $|S_n/A_n| = |S_n| : |A_n| = 2 = |\mathbb{Z}_2|$, то легко встановити ізоморфізм $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2$ [**5**]. Клас парних підстановок це відображення переводить в 0, а клас непарних підстановок в 1. Зважаючи на це, можна зробити припущення, що і в $S_n \wr \ldots \wr S_n$, де кількість симетричних груп у вінцевому добутку рівна m, є нормальна підгрупа, фактор по якій ізоморфний деякій відомій групі. Покажемо, що:

$$S_n \wr \ldots \wr S_n / \widetilde{A_n}^{(1)} = S_n \wr \ldots \wr S_n / A_n \wr \widetilde{A_n} \ldots \widetilde{A_n} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2.$$

Для цього перш за все порахуємо порядки наших груп.

$$|S_n \wr \ldots \wr S_n| = (n!)^{(1+n+n^2+\ldots+n^{m-1})} = (n!)^{(\frac{n^{(m-1)}-1}{n-1})}.$$

Тепер порахуємо порядок $\widetilde{A_n}^{(1)}$. Для цього порахуємо кількість можливих підстановок які можуть діяти на кожному з m рівнів. Візьмемо k-тий рівень. Тоді кількість вершин на яких можуть діяти підстановки на цьому рівні буде дорівнювати: $n^{(k-1)}$. Оскільки сума порядків підстановок на цьому рівні за означенням має бути числом парним, то нас мають задовольняти лише ті варіанти, коли на цьому рівні буде парна кількість непарних підстановок. Таку кількість варіантів легко підрахувати:

$$\sum_{l=0}^{[\frac{n^{(k-1)}}{2}]} \binom{n^{(k-1)}}{2l} = 2^{n^{(k-1)}-1}.$$

Оскільки кількість парних та непарних підстановок у симетричній групі S_n однакова і дорівнює $\frac{n!}{2}$, то остаточно будемо мати, що на k-тому рівні можливо розмістити: $2^{n^{(k-1)}-1} \cdot (\frac{n!}{2})^{n^{(k-1)}} = \frac{1}{2}(n!)^{n^{(k-1)}} := q_k$. Тоді:

$$|\widetilde{A_n}^{(1)}| = \prod_{k=1}^{m} q_k = (\frac{1}{2})^m \cdot (n!)^{(\frac{n^{(m-1)}-1}{n-1})}.$$

А отже,

$$|S_n \wr \ldots \wr S_n| / |A_n \wr \widetilde{A_n} \ldots \widetilde{A_n}| = 2^m = |\mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2|.$$

Отже, з порядками все гаразд. Тоді легко побудувати ізоморфізм цих груп: кожен клас еквівалентності $\widehat{A} \cdot A_n \wr \widetilde{A_n} \ldots \widetilde{A_n}$ з $S_n \wr \ldots \wr S_n / A_n \wr \widetilde{A_n} \ldots \widetilde{A_n}$ він переводить в вектор b, що складається з 0 та 1 з за наступним правилом: якщо на k-тому рівні $\widehat{A}$ сума порядків всіх підстановок парна, то k-та координата вектора $b = 0$, а якщо непарна, то 1.

Теорема 3. *Решітка* [**1**] *нормальних підгруп* $S_n \wr \ldots \wr S_n / A_n \wr \widetilde{A_n} \ldots \widetilde{A_n}$ *ізоморфна решітці нормальних підгруп* $\mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2$.

Доведення. Розглянемо довільний елемент $h \in \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2$. Тоді для будь-якого елемента $g \in \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2$ маємо:

$g^{-1} \cdot h \cdot g = (g_1^{-1} \cdot h_1 \cdot g_1, \ldots, g_n^{-1} \cdot h_n \cdot g_n) = (h_1 + 2 \cdot g_1, \ldots, h_n + 2 \cdot g_n) = h \in \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2,$

оскільки в групі $\mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2 :\ g^{-1} = (g_1^{-1}, \ldots, g_n^{-1}) = (g_1, \ldots, g_n) = g$. Тому кожна нормальна підгрупа $\mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2$ породжується довільним числом елементів зі всієї групи.

Аналогічно для фактор-групи $S_n \wr \ldots \wr S_n / A_n \wr \widetilde{A_n} \ldots \widetilde{A_n}$. Для будь-яких елементів $a \cdot \widetilde{A_n}^{(1)}, b \cdot \widetilde{A_n}^{(1)}$ цієї групи маємо:

$$(b \cdot \widetilde{A_n}^{(1)})^{-1} \circ a \cdot \widetilde{A_n}^{(1)} \circ b \cdot \widetilde{A_n}^{(1)} = (b_{-1} \circ a \circ b) \cdot \widetilde{A_n}^{(1)} = a \cdot \widetilde{A_n}^{(1)}.$$

Це випливає з того, що сума порядків всіх підстановок на будь-якому з рівнів елемента a не змінюється при спряженні (твердження 2.4 пункт 2).

Ізоморфізм між цими решітками по-елементно діє так само як і побудований вище ізоморфізм між $S_n \wr \ldots \wr S_n / A_n \wr \widetilde{A_n} \ldots \widetilde{A_n}$ та $\mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2$. □

Наслідок 2. *Кількість нормальних підгруп* $S_n \wr \ldots \wr S_n / A_n \wr \widetilde{A_n} \ldots \widetilde{A_n}$ *дорівнює* 2^{2^n}.

Доведення. У теоремі було встановлено, що кожна нормальна підгрупа $\mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2$ породжується довільним числом елементів зі всієї групи. Легко бачити, що кількість усіх різних елементів з $\mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2$ дорівнює 2^n. Тоді кількість усіх нормальних підгруп дорівнює:

$$\sum_{l=0}^{2^n} \binom{2^n}{l} = 2^{2^n}.$$

І оскільки решітка нормальних підгруп $S_n \wr \ldots \wr S_n / A_n \wr \widetilde{A_n} \ldots \widetilde{A_n}$ ізоморфна решітці нормальних підгруп $\mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2$, то така сама кількість нормальних підгруп буде і в $S_n \wr \ldots \wr S_n / A_n \wr \widetilde{A_n} \ldots \widetilde{A_n}$. □

Означення 7. Глибиною елемента (підргрупи) назвемо мінімальний номер рівня на якому зустрічається нетотожна підстановка.

Розглянемо будову підгруп у $\wr_{i=1}^{k} S_{n_i}$. Нехай $G < \wr_{i=1}^{k} S_{n_i}$, тоді G допускає представлення:

$$G = \bigsqcup_{i=0}^{p} [t_i, H_i], \tag{5}$$

де t_i різні $t_i \in \wr_{i=1}^{k-1} S_{n_i}$, $H_i \subset \prod_{i=1}^{n_1 n_2 \ldots n_{k-1}} S_{n_i}$, крім того $t_0 = e$, $H_0 = H$.

Нехай $G \lhd \wr_{i=1}^{k} S_{n_i}$, тоді $G = \bigsqcup_{i=0}^{p} [t_i, H_i] : H_i = H_0 b_i$, $b_i \in H_i$.

Доведення. Нехай $[t_i, H_i] \subset G$, враховуючи $G \lhd \wr_{i=1}^{k} S_{n_i}$, візьмемо $[t_i, e] \in \wr_{i=1}^{k} S_{n_i}$, тоді $[t_i, e][t_i, H_i][t_i, e]^{-1} = [t_i, H_i^{t_i}] \subset G$, тобто $H_i^{t_i} = H_i$. Нехай $|t_i| = m$, тоді $[t_i, H_i]^m = [e, H_i^m]$, а звідси, $H_i^m \subset H$. G група, тому $[e, H][t_i, H_i] = [t_i, HH_i]$, отже $H \cdot H_i^m \subset H_i$. Маємо ланцюг потужностей: $|H_i| \leq |H_i^m| \leq |HH_i| \leq |H_i|$. Звідси $HH_i = H_i$, тому $Hb_i = H_i$, де $b_i \in H_i$. □

Якщо $G \lhd \wr_{i=1}^{k} S_{n_i}$ і $A := [e; a_1, a_2, ..., a_k]$, де $a_i \in A_{n_i},\ 1 \leq i \leq k$, тоді $A \lhd \wr_{i=1}^{k} S_{n_i}$ і $A \lhd G$.

Доведення. Покажемо, що A, нормальна підгрупа в $\wr_{i=1}^{k} S_{n_i}$. Зрозуміло, що A– група. Тоді $[\pi, \rho][e, \rho_1]([\pi, \rho])^{-1} = [\pi\pi^{-1}, \rho\rho_1^{\pi}\rho] = [\pi\pi^{-1}, \rho\rho_1^{\pi}\rho^{-1}] \in A$. Отже A – нормальна.

Припустимо, що $A \bigcap G = \{e\}$. Тоді в зображенні (5) групи $G : H_0 = \{e\}$, отже $|H_0| = 1$, тому $|H_1| = 1$, бо G нетривіальна. Нехай $[t_1; H_1] \in G$, $[t_1; \rho] \in Wr_n$ тоді спрягаючи, маємо: $[t_1; \rho H_1(\rho^{-1})^{t_1}] \subset G$, тому $[\rho H_1(\rho^{-1})^{t_1}] \subset H_1$ але ρ довільний, тому можна вибрати його так, щоб $\rho H_1(\rho^{-1})^{t_1} \neq H_1$ звідси $|H_1| > 1$. Отримали суперечність, тому $G \bigcap A \neq \{e\}$. Нехай елемент $a = [e; \rho] \in G \bigcap A$, тоді без обмеження загальності нормальне замикання буде містити $[e; A_{k_n}, A_{n_k}, ..., A_{n_k}] := A$. Маємо ланцюг $A \subset (a) \subset G$. Врахувавши те, що A і G нормальні підгрупи - отримуємо те, що треба було довести. □

Для вивчення парності елементів з кожного рівня побудуємо тепер фактор по підгрупі A.

Має місце ізоморфізм $Wr_n/A \cong Wr_{n-1} \wr C_2$.

Доведення. Задамо відображення наступним чином, нехай
$Wr_n \to Wr_{n-1} \wr C_2$, $\varphi([\pi; \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{p_n}]) = [\pi; \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{p_n}]$, де $P_n = \prod_{i=1}^{k-1} n_i$ і

$$\delta_{n_i} = \begin{cases} 1, \rho_{n_i} \in S_{n_i} \backslash A_{n_i} \\ 0, \rho_{n_i} \in A_{n_i}. \end{cases} \tag{6}$$

□

Тому доцільно знайти усі нормальні підгрупи у $Wr_{n-1} \wr C_2$.

Теорема 4. *Нехай G зображається у вигляді (5) і $p = 0$. Тоді $G \lhd Wr_{n-1} \wr C_2$ тоді і тільки тоді коли $H < C_2^{p_{n-1}}$, яка є інваріантною відносно дії Wr_{n-1}.*

Доведення. Нехай $G \lhd Wr_{n-1} \wr C_2$ зрозуміло, що при $p = 0$ виконується
$G \cong \prod_{i=1}^{p_{n-1}} C_2$ а, тому H буде підгрупою в $\prod_{i=1}^{p_{n-1}} C_2$. З замкненості відносно спряження випливає: $[\pi; \rho] \in W_{n-1} \wr C_2,\ h \in H : [\pi; \rho][e; h]([\pi; \rho])^{-1} = [e; h^{\pi}]$, що можливо тоді і тільки тоді, коли $h^{\pi} \in H$, отже – H інваріантна. Навпаки, якщо $H < \prod_{i=1}^{p_{n-1}} C_2$ і

H є інваріантною відносно дії Wr_{n-1}, то з структури представлення (5) слідує, що при спряженні елементами з Wr_{n-1} активного компонента з G, при $p = 0$ це $t_0 = e$, отримуємо знову елемент t_0, бо
$[\pi;\rho][e;h]([\pi;\rho])^{-1} = [e;\rho h^{\pi}(\rho)^{-1}]$, де пасивний $\rho h^{\pi}(\rho)^{-1} \in H = H_0$ за умовою, тому G нормальна. □

Якщо у підгрупі H усі елементи рівня є парними підстановками, то замкненість відносно множення очевидна. Але при наявності непарних підстановок у H, на наявність замкненості по множенню та по спряженню, впливає активний елемент з рівня вище у Wr_{n-1}.

Опишемо такі підгрупи H для цього введемо наступну конструкцію.

Означення 8. Група $B_{(j_1,j_2,\ldots,j_n)}$, де $j_i \in C_2$, це підгрупа групи $(C_2)^{P_{n-1}}$, що побудована за наступним алгоритмом:

(1) Якщо $j_k = 0$, то
$B_{(j_1,j_2,\ldots,j_k)} = \{(\rho_1\ldots\rho_1, \rho_2\ldots\rho_2, \ldots, \rho_l\ldots\rho_l)|(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_l) \in B_{(j_1,j_2,\ldots,j_{k-1})}\}$
(2) Якщо $j_k = 1$, то
$B_{(j_1,j_2,\ldots,j_{k-1})} = \{(\rho_1\ldots\rho_1, \rho_2\ldots\rho_2, \ldots, \rho_l\ldots\rho_l)|(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_l) \in B_{(j_1,j_2,\ldots,j_{k-1})}\}$
(3) $B_{(0)} = 0$, $B_{(1)} = C_2$.

Означення 9. Для деякого $k > 0$, мінімальними наборами в $B_{(j_1,j_2,\ldots,j_k)}$ будемо називати послідовності, що при побудові утворилися з однієї координати в групі $B_{(j_1,j_2,\ldots,j_{k-1})}$.

Інваріантні підгрупи з $\prod_{i=1}^{p_{n-1}} C_2$ відносно дії Wr_{n-1} це $B_j, j \in C_2^n$.

Доведення. Для доведення розглянемо наступний алгоритм. У групі $\prod_{i=1}^{p_{n-1}} C_2$ розглянемо усі набори. Нехай підгрупа P є підгрупою з умови. Якщо всі мінімальні кортеджі кожного елементу з P містять тільки 0 або тільки 1, то $j_n = 0$. В іншому випадку, враховуючи інваріантність відносно Wr_{n-1} підгрупа P, матиме підгрупою $B_{(0,0,\ldots,1)}$, яка є мінімальною для решітки підгруп групи P. Отже $j_n = 1$. Продовжуючи міркування для меншої кількості рівнів, отримаємо твердження Леми. □

Теорема 5. *Потужність інваріантних підгруп B_j, описаних у попередній лемі, є наступною* $|B_{(j)}| = \prod_{i=1} 2^{P_{i-1}-P_{i-2}}, P_0 = 1, P_{-1} = 0.$

Доведення. Нехай $j, l \in C_2^n$ і крім того (за умови непарності всіх k_i) $B_j \supset B_i$:

(1) Якщо j, i складаються лише з 0 і 1 - очевидно, інакше,
(2) якщо останні цифри не співпали, то ні, інакше,
(3) розглядаємо коефіцієнти без останніх цифр, і знов перевіряємо.

Крім того $B_i/B_j \cong (C_2)^{|B_i|/|B_j|}$. □

Означення 10. Індексом елементу $x \in (C_2)^{P_{n-1}}$ називатимемо елемент $j \in (C_2)^n$, який утворюється наступним чином: $j_i = 0$, якщо усі мінімальні набори (набори з $B_{(j_1,j_2,\ldots,j_i)}$) містять або лише 0, або лише 1. В іншому випадку $j_i = 1$. Далі у першому (другому) випадку, $x_{i-1} = x'_i$, де x'_i елемент, що утворився з x_i шляхом склеювання (сумування) координат з мінімальних наборів. Крім того $x_n = x$.

Теорема 6. *Елемент* $\rho\rho^\pi, \rho \in (C_2)^{P_{n-1}}$ *, (*π *має глибину* k*) буде належати до* $B_{(j)}$ *тоді і тільки тоді, коли* $j = (* \ldots * 1 \ldots 1)$ *має* $n-k$ *останніх одиниць.*

Доведення. Розглянемо індекс елемента $x = \rho\rho^\pi$. Зрозуміло, що перші k елементів індексу можуть бути довільними. Покладемо $\rho = (0 \ldots 010 \ldots 0)$, а π-така підстановка, що не лишає 1 на місці. Тоді, $x_{k+1} \neq (0 \ldots 0)$. Тому останні $n-k$ цифр в j це одиниці. $\square$

Нехай G зображується у вигляді (5) і позначимо $G^{(1)} = \coprod_{i=0}^p t_i$, $G^{(2)} = \coprod_{i=0}^p H_i$. Тоді $G \lhd Wr_{n-1} \wr C_2$ звідси слідує, що $H = B_j$ має глибину k і останні $n-k$ координат у j - одиниці.

Доведення. Для перевірки нормальності G спрягнемо елементом $[\pi;\rho]$ з $Wr_{n-1} \wr C_2$ а саме $[\pi;\rho][e;H][\pi;\rho]^{-1}] = [e;H^\pi] \in G$, тому H інваріантна відносно дії Wr_{n-1}. Також $[t_i;\rho][t_i;H_i][t_i;\rho]^{-1} = [t_i;\rho\rho^{t_i}H_i] \in G$, тому $\rho\rho^{t_i}H_i = H_i$ звідси отримуємо $\rho\rho^{t_i}H = H$. $\square$

Нехай $G \lhd Wr_{n-1} \wr C_2$ тоді маємо:

(1) $T^* = \{t_i \in G^{(1)} | b_i \in H\}$. Тоді $t_i \lhd W_{n-1}$.
(2) $K_i = \{t_i \in G^{(1)} | b_i \in b_i H\}$. Тоді $K_i = t_i T^*$.
(3) Для довільного t, $t \in G^{(1)}$ виконується $(b_i H)^T = (b_i H)$.

Доведення. Для довільного $[\pi;\rho] \in Wr_{n-1} \wr C_2$ маємо $[\pi;\rho][t_i;H][\pi;\rho]^{-1} =$
$= [\pi t_i \pi^{-1}; \rho\rho^{\pi t_i \pi^{-1}} H] \in G$. З попередньої леми $\rho\rho^{\pi t_i \pi^{-1}} \in H$, тому $\pi t_i \pi^{-1} = t_i$. Доведемо підтвердження 2. Нехай $t_0 \in T^*$ $t_i \in K_i$ і $[t_i;H_i][t_0;H] = [t_i t_0; H_i H] =$
$= [t_i t_0; H] \in G$ звідси $t_i T^* \subset K_i$. Крім того оскільки за теоремою 4 маємо $H < \prod (C_2)^{P_{n-1}}$, тому $[t_i;H_i][K_i;H_i] = [t_i K_i; H] \in G$ тобто $t_i K_i \subset T^*$. Звідси і з $t_i T^* \subset K_i$ маємо $t_i^2 T^* \subset t_i K_i \subset T^*$, але потужності цих множин однакові, тому вони рівні. Доведемо підтвердження 3, розглянемо $[t;H][t_i T^*;H][t;H]^{-1} =$
$= [t t_i t^{-1} T^*; H_i^t] = [t_i T^*; H_i^t]$ звідси $H_i^t = H_i$. Поєднавши результати трьох останніх лем покращимо зображення (5):

$$G = \coprod_{i=0}^{r} [K_i; H_i]. \tag{7}$$

$\square$

4. Висновок

У роботі було знайдено одну нормальну підгрупу, яка виявилася дуже важливою у подальшому описі інших нормальних підгруп. Також знайдено спеціальне представлення вінцевого добутку груп.Дано конструктивний критерій нормальності для спеціального класу нормальних підгруп $S_n \wr S_m$.

Знайдено і описано усі нормальні підгрупи вінцевого добутку $S_n \wr S_n$, причому всі вони виявилися розщіплюваними. Також дано опис нормальних підгруп вінцевого добутку скінченої кількості симетричних груп підстановок $\wr_1^m S_n$.

Побудована фактор-група вінцевого добутку симетричних груп підстановок за своєю нормальною підгрупою, яка виявилася ізоморфною $\mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2$, а також показано, що решітки нормальних підгруп цих груп ізоморфні. Було програмно пораховано загальний вигляд усіх нормальних підгруп $S_n \wr S_m$, для $n, m \geqslant 3, n, m \neq 4$ і пораховано їх кількість. На основі цього створено гіпотезу та дано аналітичне доведення теореми про їх структуру і критеріїв нормальності підгруп з $\wr_{i=1}^k S_{n_i}$.

Література

[1] Биркгоф Г., Теория решеток. *М.:Наука*, 1984.–564*с*.

[2] Безущак О. О., Розщіплювальні нормальні підгрупи групи ізометрій метричного простору узагальненого берівського типу //*Мат. Студії.*, 2002.–*Т.* 17, № 1.–*С.* 29–40.

[3] Сущанский В.И. Нормальное строение группы изометрий метрического пространства целых p-адических чисел. - Алгебраические структури и их применение. Киев: КГУ, 1988. – *С.*113-121.

[4] Сущанский В.И. ℓ–сплетения и изометрии обобщенных бэровских метрик //*Укр. матем. ж.*, 1991.–*N* 8.–*С.* 1013–1038.

[5] Сущанський В.І., Сікора В.С. Операції на групах підстановок. Чернівці: Рута, 2003.

[6] Kaloujnine L. A. Sur les p-group de Sylow. // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1945. — **221**. — P. 222–224.