Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2009, № 10.— С. 132–140.

УДК 511.72

Зображення чисел рядами Кантора та деякі його застосування

Ю. В. Ралко
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. У роботі вивчаються властивості рядів Кантора і геометрія зображення дійсних чисел рядами Кантора. Описано тополого-метричні властивості множини неповних сум заданого ряду Кантора. Досліджуються властивості випадкової неповної суми ряду з незалежними доданками.

Abstract. In this paper we study the properties of the Cantor series and the geometry of representation of real numbers by the Cantor series. We describe the topological and metric properties of the set of incomplete sums of given Cantor series. We discuss the properties of random incomplete sum with independent addends.

Вступ

Сьогодні в теоретичних дослідженнях і практичних застосуваннях використовуються різні моделі дійсних чисел (системи зображення дійсних чисел), кожна з яких має свою специфіку, свою геометрію, породжує свої метричні співвідношення і дозволяє деякий клас математичних об'єктів описувати і досліджувати формально просто. Найбільш поширеними є s-кові системи (двійкова, трійкова та ін.). Одним з найпростіших у геометричному відношенні узагальнень s-кових систем є «поліосновна» система або система зображення чисел рядами Кантора, описана ще в праці Г. Кантора [**4**]. Вона використовує змінний алфавіт. Ця система, як і s-кова, має нульову надлишковість, оскільки кожне число має не більше двох зображень, причому два зображення мають лише числа, які належать зліченній підмножині множини раціональних чисел.

Необхідність глибокого вивчення цієї системи та розвиток відповідної тополого-метричної, ймовірнісної і фрактальної теорій продиктовані потребами дослідження математичних об'єктів зі складною будовою (недиференційовних функцій, сингулярних мір, перетворень, що зберігають фрактальну розмірність, динамічних систем з хаотичними траєкторіями тощо).

Переслідуючи мету детально вивчити геометрію зображення чисел рядами Кантора, можливості цієї системи в плані побудови ймовірнісної і фрактальної теорії дійсних чисел, в даній роботі ми здійснюємо систематичний виклад основ метричної теорії представлень чисел рядами Кантора і вказуємо на деякі найпростіші застосування для задання фракталів і випадкових величин.

1. Означення і приклади рядів Кантора

Нехай (q_k) — фіксована послідовність натуральних чисел, більших або рівних 2,

$$A_k = \{0, 1, 2, \dots, q_k - 1\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Означення 1. Рядом Кантора називається вираз виду

$$\frac{\varepsilon_1}{q_1} + \frac{\varepsilon_2}{q_1 q_2} + \dots + \frac{\varepsilon_k}{q_1 q_2 \cdots q_k} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{q_1 q_2 \cdots q_k}, \tag{1}$$

де (ε_k) — фіксована послідовність чисел таких, що $\varepsilon_k \in A_k$, причому $\varepsilon_k \neq 0$ нескінченну кількість разів.

Очевидно, що кожен ряд Кантора визначається двома послідовностями (q_k) і (ε_k).

Приклади рядів Кантора:

(1) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{2}{5^4} + \frac{1}{5^5} + \frac{2}{5^6} + \dots;$

(2) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(k+1)!} + \dots;$

(3) $\frac{1}{6} + \frac{2}{6 \cdot 7} + \frac{1}{6^2 \cdot 7} + \frac{2}{6^2 \cdot 7^2} + \frac{1}{6^3 \cdot 7^2} + \frac{2}{6^3 \cdot 7^3} + \dots.$

У першому з розглянутих прикладів: $q_k = 5$, $\varepsilon_{2k-1} = 1$, $\varepsilon_{2k} = 2$, у другому: $q_k = k + 1$, $\varepsilon_k = 1$, у третьому: $q_{2k-1} = 6^k \cdot 7^{k-1}$, $q_{2k} = 6^k \cdot 7^k$, $\varepsilon_{2k-1} = 1$, $\varepsilon_{2k} = 2$, при всіх $k \in \mathbb{N}$.

Лема 1. *Якщо послідовність (q_k) — фіксована, то існує континуальна множина відповідних рядів Кантора.*

Доведення. Справді, якщо $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$, $k \in \mathbb{N}$, тобто (ε_k) — нескінченна послідовність нулів або одиниць, причому без періоду (0), то відображення

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{q_1 q_2 \dots q_k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k} = y \in [0, 1]$$

є ін'єктивним відображенням множини рядів Кантора на відрізок $[0, 1]$. □

Наслідок 1. *Існує континуальна множина рядів Кантора.*

Лема 2. *Залишок ряду Кантора є рядом Кантора.*

Доведення. Справді, залишок

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{q_1 q_2 \dots q_k}$$

має структуру

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{q_{n+1}} + \frac{\varepsilon_{n+2}}{q_{n+1} q_{n+2}} + \dots,$$

причому знаменники всіх дробів задовольняють вимоги означення ряду Кантора. □

2. Збіжність рядів Кантора

Теорема 1. *Кожен ряд Кантора є збіжним і його сума не перевищує* 1.

Доведення. Нехай

$$\frac{\varepsilon_1}{q_1} + \frac{\varepsilon_2}{q_1 q_2} + \dots + \frac{\varepsilon_k}{q_1 q_2 \dots q_k} + \dots$$

— довільний ряд Кантора. Його часткова сума

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{q_1 q_2 \dots q_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k - 1}{q_1 q_2 \dots q_k} =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) + \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{q_1 q_2 \dots q_{n-1}} - \frac{1}{q_1 q_2 \dots q_n}\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{q_1 q_2 \dots q_n} < 1.$$

Оскільки $s_n < s_{n+1} < 1$ для довільного $n \in \mathbb{N}$, то існує $s = \lim_{n\to\infty} s_n \leq 1$, тобто ряд є збіжним і його сума $s \leq 1$. Теорему доведено. □

Наслідок 2. *Сума ряду Кантора* (1) *не перевищує* $\dfrac{\varepsilon_1 + 1}{q_1}$.

Справді, оскільки ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{q_2 q_3 \dots q_k}$ є рядом Кантора і за теоремою 1

$$\frac{\varepsilon_2}{q_2} + \frac{\varepsilon_3}{q_2 q_3} + \dots = s' \leq 1,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{q_1 q_2 \dots q_k} \leq \frac{\varepsilon_1}{q_1} + \frac{1}{q_1} \cdot 1 = \frac{\varepsilon_1 + 1}{q_1}.$$

Наслідок 3. *Сума ряду Кантора* (1) *не перевищує числа*

$$A_n = \frac{\varepsilon_1}{q_1} + \frac{\varepsilon_2}{q_1 q_2} + \dots + \frac{\varepsilon_{n-1}}{q_1 q_2 \dots q_{n-1}} + \frac{\varepsilon_n + 1}{q_1 q_2 \dots q_{n-1} q_n}.$$

3. Множина неповних сум ряду Кантора

Нехай $A = \{0, 1\}$, $A^\infty = A \times A \times \ldots$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = r < \infty \tag{2}$$

— заданий збіжний ряд, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ — послідовність його часткових сум, $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ — послідовність його залишків, $m = 1, 2, \ldots$.

Вираз $\sum\limits_{k\in M}^{\infty} a_k$, де M — скінченна або нескінченна підмножина множини натуральних чисел $\mathbb{N}$, називається *підрядом* ряду (2). Сума кожного підряду ряду (2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k a_k, \quad \text{де} \quad (\delta_k) \in A^\infty,$$

називається *неповною сумою* ряду (2).

Нехай

$$r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{q_1 q_2 \ldots q_k} = \frac{\varepsilon_1}{q_1} + \frac{\varepsilon_2}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{q_1 q_2 \ldots q_n} + r_n = s_n + r_n \tag{3}$$

— фіксований ряд Кантора. Оцінимо залишок ряду

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{\varepsilon_{n+1}}{q_1 q_2 \ldots q_n q_{n+1}} + \frac{\varepsilon_{n+2}}{q_1 q_2 \ldots q_n q_{n+1} q_{n+2}} + \ldots = \\ &= \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_n} \left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{q_{n+1}} + \frac{\varepsilon_{n+2}}{q_{n+1} q_{n+2}} + \ldots \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_n} \left(\frac{q_{n+1} - 1}{q_{n+1}} + \frac{q_{n+2} - 1}{q_{n+1} q_{n+2}} + \ldots \right) = \\ &= \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_n} \left(1 - \frac{1}{q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n+1}} - \frac{1}{q_{n+1} q_{n+2}} + \ldots \right) = \\ &= \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_n}. \end{aligned}$$

Кожне число x виду

$$x = x(M) = \sum_{k \in M \subset \mathbb{N}} \frac{\varepsilon_k}{q_1 q_2 \ldots q_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k \varepsilon_k}{q_1 q_2 \ldots q_k},$$

де

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k \in M, \\ 0, & \text{якщо } k \notin M, \end{cases}$$

називається *неповною сумою* ряду (3).

Множина

$$E_{r_0} = \left\{ x : x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k \varepsilon_k}{q_1 q_2 \dots q_k},\ \delta_k \in A \right\}$$

називається *множиною неповних сум* ряду Кантора (3).

Лема 3. *Якщо* $q_k = const = 2$, *а* $\varepsilon_k = const = 1$, *то множина неповних сум відповідного ряду Кантора є відрізком* $[0, 1]$.

Доведення. При $q_k = 2$, $\varepsilon_k = 1$ ряд (1) набуває вигляду

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \ldots .$$

Тому при довільній послідовності $(\delta_k) \in A^\infty$ вираз

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{2^k} = x \tag{4}$$

є класичним двійковим розкладом числа x. Враховуючи, що довільне число $x \in [0, 1]$ можна подати у вигляді (4), робимо висновок, що $E_1 = [0, 1]$. □

Зауваження 1. *Якщо* $q_k = const = 3$, *а* $\varepsilon_k = const = 2$, *то множина неповних сум відповідного ряду Кантора є класичною множиною Кантора.*

4. Циліндричні множини та їх властивості

З метою вивчення тополого-метричних і фрактальних властивостей множини неповних сум довільного ряду Кантора введемо допоміжні поняття.

Означення 2. *Циліндром* рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ ($c_i \in A$) називається множина $\Delta'_{c_1 c_2 \dots c_m}$, яка містить всі неповні суми ряду (2) виду

$$\sum_{k=1}^{m} c_k a_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} \delta_n a_n, \quad \text{де } (\delta_n) \in A^\infty. \tag{5}$$

Означення 3. *Циліндричним відрізком* рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ ($c_i \in A$) називається відрізок

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m} = \left[\inf \Delta'_{c_1 c_2 \dots c_m}, \sup \Delta'_{c_1 c_2 \dots c_m} \right] = \left[\sum_{k=1}^{m} c_k a_k, r_m + \sum_{k=1}^{m} c_k a_k \right].$$

Означення 4. Інтервал з тими ж кінцями, що й в $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}$, будемо позначати $\nabla_{c_1 c_2 \dots c_m}$ і називати *циліндричним інтервалом* рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$.

В залежності від послідовності (a_n) і набору $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ можливі випадки, коли $\Delta'_{c_1 c_2 \dots c_m}$ і $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}$ співпадають і коли не співпадають, але завжди

$$\Delta'_{c_1 c_2 \dots c_m} \subset \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}.$$

Наприклад, при $q_k = 2$ маємо $\Delta'_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta_{c_1c_2\ldots c_m}$ при довільному наборі $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$.

Безпосередньо з означень 2–4 випливають такі властивості циліндричних множин:

(1) $\inf \Delta_{c_1c_2\ldots c_m} = \inf \Delta'_{c_1c_2\ldots c_m}$, $\sup \Delta_{c_1c_2\ldots c_m} = \sup \Delta'_{c_1c_2\ldots c_m}$;

(2) $\Delta_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta_{c_1c_2\ldots c_m0} \bigcup \Delta_{c_1c_2\ldots c_m1}$, $\Delta'_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta'_{c_1c_2\ldots c_m0} \bigcup \Delta'_{c_1c_2\ldots c_m1}$;

(3) $\inf \Delta_{c_1c_2\ldots c_m} = \inf \Delta_{c_1c_2\ldots c_m0} < \inf \Delta_{c_1c_2\ldots c_m1}$, $\sup \Delta_{c_1c_2\ldots c_m} = \sup \Delta_{c_1c_2\ldots c_m1}$;

(4) $|\Delta_{c_1c_2\ldots c_m}| = r_m \to 0 \ (m \to \infty)$;

(5) $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1c_2\ldots c_m} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta'_{c_1c_2\ldots c_m} \equiv \Delta_{c_1c_2\ldots c_m\ldots} = x \in [0, r]$.

Теорема 2. *Якщо нерівність $q_k \neq 2$ виконується нескінченну кількість разів, то множина E_{r_0} неповних сум ряду Кантора* (1), *в якому фігурує послідовність (q_k), є ніде не щільною множиною міри Лебега* 0.

Доведення. Нехай (k_n) — така зростаюча послідовність натуральних чисел, що $q_{k_n} \neq 2$ і $q_j = 2$ при $j \notin \{k_n\}$. За властивостями циліндричних множин

$$\Delta'_{c_1c_2\ldots c_{k_n-1}} = \Delta'_{c_1c_2\ldots c_{k_n-1}0} \bigcup \Delta'_{c_1c_2\ldots c_{k_n-1}1}.$$

Оскільки

$$\left|\Delta_{c_1c_2\ldots c_{k_n-1}0}\right| = \left|\Delta_{c_1c_2\ldots c_{k_n-1}1}\right| < \frac{1}{2}\left|\Delta_{c_1c_2\ldots c_{k_n-1}}\right|,$$

то інтервал

$$(\sup \Delta_{c_1c_2\ldots c_{k_n-1}0}, \inf \Delta_{c_1c_2\ldots c_{k_n-1}1}) \tag{6}$$

не містить точок з E_{r_0}. Нехай (a, b) — довільний підінтервал $[0, r_0]$, де r_0 — сума заданого ряду. Легко вказати циліндр деякого рангу $\Delta_{c_1\ldots c_{k_n-1}}$, який повністю належить (a, b) і не містить точок множини E_{r_0}. Отже, E_{r_0} є ніде не щільною за означенням.

Нехай $q_{k_n} > 2$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ і $q_j = 2$ при $j \notin \{k_n\}$. Тоді множина E_{r_0} належить об'єднанню 2^{k_n} циліндричних відрізків рангу k_n з довжиною, яка не перевищує $\dfrac{1}{3^n 2^{k_n-n}}$. Отже,

$$\lambda(E_{r_0}) \leq \frac{2^{k_n}}{3^n 2^{k_n-n}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Теорему доведено. □

5. Застосування рядів Кантора

Теорема 3. *Якщо (S_k) — задана послідовність натуральних чисел, більших* 1, *то для довільного $x \in [0, 1]$ існує послідовність цілих чисел $\varepsilon_k = \varepsilon_k(x)$ така, що*

$$0 \leq \varepsilon_k \leq S_k - 1 \qquad i \qquad x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{S_1 S_2 \ldots S_k} \equiv \Delta^{C(S_k)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k\ldots}.$$

Доведення. Легко бачити, що

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k - 1}{S_1 S_2 \dots S_k}.$$

Нехай x — довільно вибране число з піввідрізка $[0, 1)$. Очевидно, що існує ε_1 таке, що

$$\frac{\varepsilon_1}{S_1} \leq x < \frac{\varepsilon_1 + 1}{S_1}, \quad \text{причому} \quad 0 \leq \varepsilon_1 \leq S_1 - 1.$$

Тоді

$$x = \frac{\varepsilon_1}{S_1} + x_1, \quad \text{де} \quad 0 \leq x_1 < \frac{1}{S_1}.$$

Аналогічно, існує ціле ε_2 таке, що $0 \leq \varepsilon_2 \leq S_2 - 1$, і

$$\frac{\varepsilon_2}{S_1 S_2} \leq x - \frac{\varepsilon_1}{S_1} = x_1 < \frac{\varepsilon_2 + 1}{S_1 S_2}.$$

Тоді

$$0 \leq x - \frac{\varepsilon_1}{S_1} - \frac{\varepsilon_2}{S_1 S_2} = x_2 < \frac{1}{S_1 S_2},$$

тобто

$$x = \frac{\varepsilon_1}{S_1} + \frac{\varepsilon_2}{S_1 S_2} + x_2, \quad \text{де} \quad x_2 < \frac{1}{S_1 S_2}.$$

Аналогічно будуються числа x_3, x_4, ..., x_{k-1}. Для числа

$$x_{n-1} = x - \frac{\varepsilon_1}{S_1} - \frac{\varepsilon_2}{S_1 S_2} - \dots - \frac{\varepsilon_{k-1}}{S_1 S_2 \dots S_{k-1}}$$

існує ціле ε_k таке, що $0 \leq \varepsilon_k \leq S_k - 1$ і

$$\frac{\varepsilon_k}{S_1 S_2 \dots S_k} \leq x_{k-1} < \frac{\varepsilon_k + 1}{S_1 S_2 \dots S_k}.$$

Тоді

$$0 \leq x_k = x_{k-1} - \frac{\varepsilon_k}{S_1 S_2 \dots S_k} < \frac{1}{S_1 S_2 \dots S_k}.$$

Звідки

$$x_{k-1} = \frac{\varepsilon_k}{S_1 S_2 \dots S_k} + x_k \quad \text{і} \quad x = \frac{\varepsilon_1}{S_1} + \frac{\varepsilon_2}{S_1 S_2} + \dots + \frac{\varepsilon_k}{S_1 S_2 \dots S_k} + x_k,$$

де

$$x_k < \frac{1}{S_1 S_2 \dots S_k} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Оскільки процес побудови ε_k визначений і $x_k \to 0$ $(k \to \infty)$, то

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{S_1 S_2 \dots S_k},$$

що й вимагалося довести. □

6. Метричні властивості множин канторівського типу

Розглядається множина

$$C = C[(q_k),(V_k)] = \left\{x : x = \Delta^{C(q_k)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k\ldots},\ \varepsilon_k \in V_k \subset A_k\right\}.$$

Теорема 4. *Множина C має міру Лебега 0 тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|A_{n_k} \setminus V_{n_k}|}{|A_{n_k}|} = \infty.$$

Доведення. Нехай (n_k) — послідовність натуральних чисел така, що $V_{n_k} \neq A_{n_k}$ і $V_j = A_j$ при $j \notin \{n_k\}$. Нехай $|A_{n_k} \setminus V_{n_k}| = 1$. Тоді F_k — об'єднання всіх циліндрів рангу k, серед внутрішніх точок яких є точки множини C, $\bar{F}_{k+1} = F_k \setminus F_{k+1}$. Очевидно, що $C \subset F_k$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$, а отже, $\lambda(C) \leq \lambda(F_k)$. Маємо

$$\lambda(C) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} \cdot \frac{\lambda(F_{k-1})}{\lambda(F_{k-2})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(F_1)}{\lambda(F_0)} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda(F_i)}{\lambda(F_{i-1})} = \lim_{k\to\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda(F_{i-1}) - \lambda(\bar{F}_i)}{\lambda(F_{i-1})} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\bar{F}_i)}{\lambda(F_{i-1})}\right).$$

За відомою теоремою про зв'язок збіжності нескінченних добутків і рядів [**5**, с. 25]

$$\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\bar{F}_i)}{\lambda(F_{i-1})}\right) = 0$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda(\bar{F}_i)}{\lambda(F_{i-1})} = \infty. \tag{7}$$

Оскільки

$$\frac{\lambda(\bar{F}_{n_k})}{\lambda(F_{n_k-1})} = \frac{|A_{n_k} \setminus V_{n_k}|}{|A_{n_k}|},$$

то ряд (7) розбігається. А отже, $\lambda(C) = 0$, що й вимагалося довести. □

Теорема 5. *Якщо $q_k = const$ при $k \geq k_0$, то множина $C = C[(q_k),(V_k)]$, де $V_k = V_0$ при $k \geq k_0$, має фрактальну розмірність $\log_{q_{k_0}}|V_0|$.*

Доведення. Множина

$$C = \bigcup_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k_0})\in A_1\times\ldots\times A_{k_0}} \left[\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_0}} \cap C\right],$$

причому $\left[\nabla_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_0}} \cap C\right] \cap \left[\nabla_{\beta_1\ldots\beta_{k_0}} \cap C\right] \neq \varnothing$, якщо $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k_0}) \neq (\beta_1,\ldots,\beta_{k_0})$.

Кожна з множин $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_0}} \cap C$ є самоподібною множиною, оскільки

$$\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_0}} \cap C = \bigcup_{i\in V_0} \left[\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_0} i} \cap C\right], \quad \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_0}} \cap C \overset{\frac{1}{q_{k_0}}}{\sim} \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_0} i} \cap C.$$

Вона є множиною канторівського типу, причому

$$\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_0}i} \cap C = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{k_0}(0)} \oplus qC_i,$$

де $C_i = C[(q_{k_0}), (V_0)]$, $q = \frac{1}{q_1q_2\cdots q_{k_0}}$.

Тополого-метричні властивості множини C_i добре вивчені. Це ніде не щільна множина нульової міри Лебега і розмірності Хаусдорфа–Безиковича $\log_{q_{k_0}}|V_0|$. Тому такі ж властивості має і початкова множина. Теорему доведено. $\square$

7. Про розподіл випадкової неповної суми з незалежними доданками

Нехай (q_k), (ε_k) — задані послідовності. Розглядається випадкова величина

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{q_1q_2\ldots q_k}\eta_k,$$

де η_k — незалежні випадкові величини, що набувають значень 0 і 1 з імовірностями p_{0k} і p_{1k} відповідно, $p_{ik} \geq 0$, $p_{0k} + p_{1k} = 1$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$.

З теореми П. Леві випливає, що випадкова величина ξ має дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0 \quad \text{або} \quad \varepsilon_k = 0 \text{ при } k > m.$$

Якщо при $q_k = 2$ рівність $\varepsilon_k = 0$ виконується лише скінченну кількість разів, причому $\varepsilon_k \neq 0$ при $k > m$, то розподіл випадкової величини ξ є дискретним.

Отже, необхідною умовою неперервності розподілу випадкової величини ξ є одночасне виконання умов $M = 0$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \infty$, які вважатимемо далі виконаними.

Якщо $q_k = \text{const} = 2$, а $\varepsilon_k = \text{const} = 1$, то ξ є випадковою величиною з незалежними двійковими цифрами, структура і властивості якої добре вивчені [**3**].

Якщо $q_k \neq 2$ нескінченну кількість разів, то розподіл ξ є сингулярним розподілом канторівського типу, оскільки множиною точок росту функції розподілу в даному випадку є множина канторівського типу (ніде не щільна нуль-множина Лебега).

Література

[1] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 208 с.

[2] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[3] *Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Тополого-метричні та фрактальні властивості згортки двох сингулярних розподілів випадкових величин з незалежними двійковими цифрами // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2002. — Вип. 67. — С. 9–19.

[4] *Cantor G.* Über die einfachen Zahlensysteme // Z. Math. Phys. — 1869. — Bd. 14. — S. 121–128.

[5] *Титчмарш Е.* Теория функций: Пер. с англ. — 2-е изд., перераб. — Москва: Наука, 1980. — 464 с.