Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2009, № 10.— С. 179–189.

УДК 519.21

Структура досконалих множин і сингулярних розподілів ймовірностей в R_n

М. В. Працьовитий
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. Доведено, що кожна обмежена лінійна досконала множина S є об'єднанням трьох неперетинних підмножин A, B, C: перша є об'єднанням відрізків, друга і третя є ніде не щільними множинами, причому кожен окіл довільної точки множини B містить підмножину множини S ненульової міри Лебега. На основі цього факту доведено, що сингулярний розподіл випадкової величини з обмеженим мінімальним замкненим носієм (спектром) є випуклою лінійною комбінацією трьох розподілів, тополого-метричні властивості ядра спектра яких аналогічні до властивостей множин A, B, C. Отримано узагальнення цих результатів для $\mathbb{R}_n$.

Abstract. We prove that every bounded linear perfect set S is a union of three disjoint subsets A, B, C: A is a union of closed intervals, B and C are nowhere dense sets, and every neighbourhood of any point of the set B contains a subset of S of zero Lebesgue measure. Using this fact we prove that singular distribution of random variable with bounded minimal closed support (spectrum) is a convex linear combination of three probability distributions such that topological and metric properties of kernels of their spectra are analogous to properties of the sets A, B, C. A generalisation of these results for $\mathbb{R}_n$ is also obtained.

Вступ

У теорії сингулярних розподілів випадкових величин широко вживається поняття спектра розподілу [**19**]. Незважаючи на те, що спектр є достатньо грубою характеристикою (наприклад, спектр дискретно розподіленої випадкової величини на множині раціональних чисел $[0;1]$ співпадає з $[0;1]$), легко вказати задачі, де це поняття достатньо продуктивно працює. Добре відомо, що спектр є замкненою множиною, яка не містить ізольованих точок (тобто множиною досконалою). Існують класифікації сингулярних розподілів, в основу яких покладено тополого-метричні властивості спектра або його зв'язок з "суттєвим носієм щільності" розподілу, одну з яких ми запропонували в [**9, 11**]. Як виявилось пізніше [**5, 4**], її можна істотно вдосконалити, що продиктовано, зокрема, потребами дослідження нескінченних згорток Бернуллі та розподілів випадкових величин з незалежними символами їх зображення в тій чи іншій системі числення (подання чисел). Це представлення чисел ланцюговими дробами (зі скінченним та нескінченним алфавітами), знакододатними рядами Енгеля, Сильвестра, Люрота, знакозмінними рядами Остроградського-Серпінського-Пірса, Остроградського, Люрота [**8, 12, 13, 14, 6**].

У зв'язку з вищесказаним вбачаємо потребу повернутись до вказаного питання ще раз і запропонувати нову вдосконалену (тоншу за попередню) класифікацію.

1. Структура досконалих множин простору R_1

Нагадаємо, що множина метричного (або топологічного) простору називається досконалою, якщо вона є замкненою і не містить ізольованих точок.

Добре відомо [**16, 17**], що досконала множина $S \subset R_1$ отримується вилученням з R_1 скінченного або нескінченного числа інтервалів (a_i, b_i) попарно без спільних точок і кінців (їх називають суміжними інтервалами множини S), тобто

$$S = R_1 \setminus \bigcup_i (a_i, b_i).$$

Цей факт називають *теоремою про структуру досконалої множини* [**9, 8**].

Точку x називатимемо *лівосторонньою кінцевою точкою* множини $E \subset R_1$, якщо існує дійсне $\varepsilon > 0$ таке, що

$$(x, x+\varepsilon) \subset E, \quad \text{але} \quad (x-\varepsilon, x) \cap E = \varnothing.$$

Точку x називатимемо *правосторонньою кінцевою точкою* множини $E \subset R_1$, якщо існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$(x-\varepsilon, x) \subset E, \quad \text{але} \quad (x, x+\varepsilon) \cap E = \varnothing.$$

Наприклад, якщо $a < b < c < d$ і $E = [a, b] \cup (c, d)$, то точки a і c є лівосторонніми кінцевими точками множини E.

Наприклад, множина

$$A = \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{\substack{c_1 \dots c_m \\ c_k \in \{0,2\}}} \Delta^3_{c_1 \dots c_m 1}, \quad \Delta^3_{c_1 \dots c_m 1} \equiv \left[\frac{1}{3^{m+1}} + \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{3^i};\ \frac{2}{3^{m+1}} + \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{3^i} \right], \quad c_i \in \{0, 2\},$$

має безліч як лівосторонніх, так і правосторонніх кінцевих точок. Кожна точка виду

$$\frac{1}{3^{m+1}} + \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{3^i}, \quad c_i \in \{0, 2\}, \quad m \in N,$$

є лівосторонньою кінцевою, а кожна точка виду

$$\frac{2}{3^{m+1}} + \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{3^i}, \quad c_i \in \{0, 2\}, \quad m \in N,$$

є правосторонньою кінцевою точкою множини A.

Класична множина Кантора

$$C = \left\{ x : \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}, \quad \alpha_i \in \{0, 2\} \right\}$$

не має ні лівосторонніх, ні правосторонніх кінцевих точок.

Точку x називатимемо *односторонньою кінцевою точкою* множини E, якщо вона є лише лівосторонньою або лише правосторонньою кінцевою точкою множини E. Множину всіх таких точок множини E позначатимемо E^{Γ}. Зрозуміло, що множина E може не мати односторонніх кінцевих точок, наприклад, множина Кантора, а може їх мати лише тоді, коли містить цілі інтервали і не співпадає з R_1.

Лема 1. *Якщо S — досконала множина з R_1 і $R_1 \setminus S \neq \emptyset$, то множина*

$$A_i = \mathrm{int} S + S^{\Gamma}$$

є порожньою множиною або об'єднанням відрізків, тобто $A = \bigcup_i [c_i, d_i]$, де $\mathrm{int} S$ — це внутрішність множини S, тобто множина всіх внутрішніх точок множини S.

Доведення. Зрозуміло, що для досконалих ніде не щільних множин (до них відноситься і множина Кантора C) $A = \emptyset$, оскільки $\mathrm{int} S = \emptyset$ і $S^{\Gamma} = \emptyset$.

Якщо множина S не є ніде не щільною, то будучи замкненою, вона містить принаймні один відрізок. Нехай $\{[c_k, d_k]\}$ — послідовність всіх неперетинних відірзків, що повністю належать S, і

$$D = \bigcup_k [c_k, d_k].$$

Доведемо, що $A = D$. Для цього покажемо, що $A \subset D$ і $D \subset A$.

Нехай $x \in A$. Тоді 1) $x \in \mathrm{int} S$ або 2) $x \in S^{\Gamma}$. Якщо $x \in \mathrm{int} S$, то існує $\varepsilon > 0$ таке, що $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset S$, а тому існує $[c_i, d_i] \subset S$ таке, що $x \in [c_i, d_i]$, а отже, $x \in D$.

Якщо $x \in S^{\Gamma}$, то існує таке i, що $x = c_i$ або $x = d_i$. В обох випадках $x \in [c_i, d_i]$, а отже, $x \in D$. Тому $A \subset D$.

Нехай тепер $x \in D$. Тоді для деякого i $x \in [c_i, d_i]$, тобто

$$\text{або} \quad c_i < x < d_i, \quad \text{або} \quad c_i = x, \quad \text{або} \quad x = d_i.$$

Якщо $c_i < x < d_i$, а $[c_i, d_i] \subset S$, то $x \in \mathrm{int} S$ і $x \in A$. Якщо $c_i = x$ або $x = d_i$, то $x \in S^{\Gamma}$ і $x \in A$. Отже, $D \subset A$. Таким чином, $A = D = [c_i, d_i]$, що й вимагалось довести. □

Лема 2. *Якщо S — досконала множина з R_1, то множина*

$$K = S \setminus A, \quad \text{де} \quad A = \mathrm{int} S + S^{\Gamma},$$

де S^{Γ} — множина односторонніх кінцевих точок (тільки лівосторонніх або тільки правосторонніх) множини S, є ніде не щільною.

Доведення. Зрозуміло, що S може бути об'єднанням відрізків і тоді $S = A$, а отже, $K = \varnothing$ і є ніде не щільною множиною.

Якщо S не містить жодного відрізка, тобто $A = \varnothing$, то $K = S$ в силу замкненості S є ніде не щільною множиною.

Тепер розглянемо випадок, коли $S \neq A \neq \varnothing$. Доведемо, що K є ніде не щільною множиною за означенням. Для цього покажемо, що довільний інтервал $(a, b) \subset R^1$ містить підінтервал (α, β), вільний від точок множини K.

Якщо $(a, b) \cap K = \varnothing$, то $(\alpha, \beta) = (a, b)$.

Нехай $x \notin A$, тобто $x \notin \mathrm{int} S$ і $x \notin S^{\Gamma}$, тоді $\left[\frac{a+x_0}{2}, x_0\right] \nsubseteq S$. Тому для деякого з суміжних з S інтервалів (a_j, b_j)

$$\left(\frac{a + x_0}{2}, x_0\right) \cap (a_j, b_j) = (c, d) \neq \varnothing.$$

Оскільки $(c, d) \subset (a_j, b_j)$ і $(a_j, b_j) \cap S = \varnothing$, то $(c, d) \cap K = \varnothing$.

Отже, $(\alpha, \beta) = (c, d)$. Тому K є ніде не щільною множиною згідно з означенням.

$\square$

Наслідок 1. *Для довільної досконалої множини $S \subset R_1$ існує єдиний розклад*

$$S = A + K,$$

де $A = \mathrm{int} S + S^{\Gamma}$, $K = S \setminus A$ — ніде не щільна множина.

Лема 3. *Якщо K — ніде не щільна множина простору R_1, а множина B містить всі точки $x \in K$, які мають властивості*

$$\lambda[(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap K] > 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{1}$$

то множина

$$C = K \setminus B$$

є: 1) ніде не щільною множиною міри Лебега нуль;

2) кожна точка x якої має властивість:

$$\lambda[(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap K] = 0 \quad \text{для деякого} \;\; \varepsilon = \varepsilon(x) > 0. \tag{2}$$

Доведення. Зрозуміло, що існують ніде не щільні множини нульової міри Лебега (наприклад, множина Кантора). Для них $B = \emptyset$, $C = K$, оскільки кожна точка такої множини має властвість (2) і не може мати властивості (1) (ці властвості вхємодопвнюючі).

Нехай принаймні одна з точок множини K має властивість (1), тобто $B \neq \emptyset$. Тут можливі два випадки:

1) кожна точка множини K має властивість (1) (такі множини K існують, наприклад, множини канторівського типу додатної міри Лебега [**9**]);

2) принаймні одна з точок множини K має властивість (2).

У першому випадку $B = K$, $C = \emptyset$ і висновок леми 3 виконується автоматично.

У другому випадку $C \neq \emptyset$, очевидно, що C ніде не щільна і кожна точка множини C має властивість (2). Доведемо, що $\lambda(C) = 0$.

Припустимо, що $\lambda(C) > 0$. Тоді існує $n \in Z$ таке, що

$$\lambda([n, n+1] \cap C) > 0.$$

Тоді для довільного $m \in N$ існує двійковий відрізок

$$\Delta^2_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = \left[n + \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{2^i},\ n + \frac{1}{2^m} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{2^i} \right], \quad \alpha_i \in \{0, 1\},$$

такий, що

$$\lambda(\Delta^2_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} \cap C) > 0.$$

Але для точки $x = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^2_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = \Delta^2_{\alpha_1 \ldots \alpha_m \ldots} \in C$ і довільного $\varepsilon > 0$ легко вказати m таке, що

$$\Delta^2_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon), \quad \text{а отже,} \quad \lambda[(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap K] \geq \lambda[(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap C] > 0,$$

що суперечить тому, що x має властвість (2). Отримане протиріччя доводить рівність $\lambda(C) = 0$ і всю лему. □

Теорема 1. *Довільну досконалу множину $S \subset R^1 \neq S$ єдиним чином можна подати у вигляді*

$$S = A + K = \tag{3}$$

$$= A + B + C, \tag{4}$$

де $A := \mathrm{int} S + S^{\Gamma} = \bigcup\limits_i [a_i, b_i]$,

$K := S \setminus A$ *— ніде не щільна множина,*

$B := \{x : \ \lambda[(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap K] > 0 \ \ \forall \varepsilon > 0\}$,

$C := K \setminus B = \{x : \ \lambda[(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap K] = 0 \ \ \text{для деякого} \ \ \varepsilon = \varepsilon(x) > 0\}$.

Доведення. Існування розкладів (3) і (4) є наслідком лем 1-3. Єдиність випливає з коректності означення множин A, K, B і C. □

Рівності (3) і (4) називатимемо *топологічною будовою (структурою) досконалої множини* S.

2. Лебегівська структура розподілу

Нехай $(X, \Re)$ — вимірний простір зі зчисленно-адитивними мірами $\mu(\cdot)$ і $\nu(\cdot)$. Міра μ називається: *дискретною*, якщо вона зосереджена (сконцентрована) на не більш ніж зчисленній множині точок; *неперервною*, якщо міра кожної одноточкової множини рівна нулю. Міра μ називається *абсолютно неперервною* відносно міри ν (позначається: $\mu \ll \nu$), якщо $\mu(E) = 0$ для всіх $E \in \Re$, для яких $\nu(E) = 0$. Якщо $\nu \ll \mu$ і $\mu \ll \nu$, то міри μ і ν називають *еквівалентними* (позначається: $\mu \sim \nu$). Міри μ і ν називаються *сингулярними (ортогональними)* (символічно: $\mu \perp \nu$), якщо

$$\exists A \in \Re : \mu(A) = 0 \quad \text{і} \quad \nu(X \backslash A) = 0,$$

тобто μ сингулярна відносно ν, якщо вона зосереджена на множині A, такій, що $\nu(A) = 0$. Очевидно, що дискретна міра сингулярна відносно всіх неатомічних (неперервних) мір.

Часто в якості однієї з мір розглядається найбільш природна геометрична міра — міра Лебега. Тому *коли говорять, що міра μ сингулярна чи абсолютно неперервна, то мають на увазі її сингулярність чи абсолютну неперервність відносно міри Лебега.* Саме в цьому смислі ми будемо використовувати це поняття далі.

Міру називають *чисто сингулярною*, якщо вона неперервна і зосереджена на множині нульової міри Лебега.

Теорема 2. *(Лебег). Кожна зчисленно-адитивна міра $\mu(\cdot)$ єдиним способом подається у вигляді*

$$\mu(E) = \mu_d(E) + \mu_{ac}(E) + \mu_s(E), \quad \forall E \in \Re, \tag{5}$$

де $\mu_d(\cdot)$ — дискретна, $\mu_{ac}(\cdot)$ — абсолютно неперервна, $\mu_s(\cdot)$ — чисто сингулярна міра. Якщо міра $\mu(\cdot)$ — ймовірнісна, то можливий розклад

$$\mu(E) = \alpha_1\mu_d(E) + \alpha_2\mu_{ac}(E) + \alpha_3\mu_s(E), \tag{6}$$

де μ_d, μ_{ac}, μ_s — дискретна, абсолютно неперервна і сингулярна ймовірнісні міри відповідно, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, і він єдиний.

Розклади (5) і (6), які називають **[18]** *структурою* міри μ, встановлюють існування лише трьох основних типів мір, тоді як всі інші називають їх *сумішами.* Вивчення структури заданої міри — традиційна задача теорії міри і ймовірностей.

Багато проблем, пов'язаних з вивченням випадкових величин, можна описувати і розв'язувати в термінах функцій розподілу. За теоремою Лебега про розклад функції обмеженої варіації *будь-яка функція розподілу* $F(x)$ *єдиним чином представляється у вигляді лінійної комбінації трьох своїх компонент*

$$F(x) = \alpha_1 F_d(x) + \alpha_2 F_{ac}(x) + \alpha_3 F_s(x), \tag{7}$$

де $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, $F_d(x)$ *— дискретна функція розподілу (або так звана функція стрибків), тобто функція, яка росте виключно стрибками і допускає представлення*

$$F_d(x) = \sum_{x_k < x} p_{x_k}$$

для деяких послідовностей $\{x_k\}$ *і* $\{p_{x_k}\}, p_{x_k} > 0; F_{ac}(x)$ *— абсолютно неперервна функція розподілу, тобто така, що*

$$F_{ac}(x) = \int_{-\infty}^{x} F'_{ac}(u) du$$

і при цьому $\int_A dF_{ac}(x) = 0$ *для кожної множини* A *з мірою Лебега рівною нулю і, нарешті,* $F_s(x)$ *— чисто сингулярна (далі, сингулярна) функція розподілу.*

Вираз (7) називають **[18]** *структурою фнкції розподілу* $F(x)$ *(або структурою розподілу ймовірностей).* Якщо $\alpha_1 = 0$, то функція розподілу $F(x)$ є неперервною. Якщо один з коефіцієнтів α_i рівний 1 (отже, інші рівні 0), то функцію розподілу називають *чистою* (дискретною, якщо $\alpha_1 = 1$; абсолютно неперервною, коли $\alpha_2 = 1$; сингулярною, якщо $\alpha_3 = 1$). Вираз (7) стверджує *існування трьох основних (чистих) типів функцій розподілу*, решта ж є їх *сумішами* (це у випадку, коли $\max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \neq 1$). Вивчення структури розподілу ймовірності — традиційна задача теорії розподілів.

Сингулярні розподіли ймовірностей до цих пір залишаються найменш вивченим класом чистих розподілів, не зважаючи на те, що їх домінуюча роль у досить широких сім'ях розподілів переокнливо доведена. Більше того, має місце теорема Замфіреску **[20]**, яка стверджує, що сингулярні функції в метричному просторі всіх неперервних монотонних функцій з супремум-метрикою утворюють множину другої категорії Бера.

В теорії сингулярних розподілів існує кілька складних проблем і неспростованих гіпотез. Досі не знайдено необхідних і достатніх умов сингулярності згортки двох сингулярних розподілів. Ще більш складною є проблема поглиблення теореми Джессена-Вінтнера, яка стверджує, що сума випадкового збіжного з ймовірністю 1 ряду з незалежних дискретно розподілених випадкових величин має чистий (чисто дискретний, чисто абсолютно неперервний або чисто сингулярний) розподіл. Якщо критерій дискретності розподілу суми ряду відомий ще з 30-х років попереднього століття, то критерій абсолютної неперервності (як і сингулярності) не знайдено. Зауважимо лише, що цим питанням займались різні дослідники і в окремих класах випадкових величин це зробити вдалось. Більше того, були описані класи випадкових величин типу Джессена-Вінтнера (для яких має місце аналог вказаної теореми) з повним вирішенням зазначеної проблеми.

3. Чисті типи сингулярних розподілів

Спектром ймовірнісної міри μ (розподілу випадкової величини ξ, що відповідає мірі μ і має функцію розподілу F_ξ) називається множина

$$\begin{aligned} S_\mu \equiv S_\xi &= \{x:\ \mathbb{P}\{\xi \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\} > 0 \ \ \forall \varepsilon > 0\} = \\ &= \{x:\ F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x-\varepsilon) > 0 \ \ \forall \varepsilon > 0\}. \end{aligned}$$

Множина S_μ є мінімальною замкненою множиною, на якій зосереджена міра ($\mu(R \setminus S_\mu) = 0$). Тому її ще називають *топологічним носієм міри μ*. Якщо μ є неперервною мірою, тобто кожній одноточковій множині приписує нульову ймовірність, то S_μ є досконалою. Далі розглядатимемо лише неперервні міри.

Згідно з теоремою 1 для спектра S_μ міри μ має місце єдиний розклад

$$S_\mu = A_\mu + B_\mu + C_\mu, \tag{8}$$

який називатимемо *канонічним розкладом спектра* на складові S^*-типу, P^*-типу, C^*-типу відповідно, або його *структурою.*

Ядром спектра S_μ ймовірнісної міри μ (розподілу відповідної випадкової величини), який має структуру (8), називається множина G_μ, що є об'єднанням тих складових A_μ, B_μ, C_μ, міра μ яких нетривіальна (більше нуля), тобто

$$G_\mu \equiv G_\xi = \chi(A_\mu) + \chi(B_\mu) + \chi(C_\mu),$$

де

$$\chi(E) = \begin{cases} E, & \text{при} \quad \mu(E) > 0, \\ \varnothing, & \text{при} \quad \mu(E) = 0. \end{cases}$$

Ймовірнісна міра μ (розподіл відповідної випадкової величини) називається *мірою (розподілом) чистого:*

1) S^*-типу, якщо $\mu(A_\mu) = 1$;
2) P^*-типу, якщо $\mu(B_\mu) = 1$;
3) C^*-типу, якщо $\mu(C_\mu) = 1$;
4) K^*-типу, якщо $\mu(B_\mu + C_\mu) = 1$.

Зауважимо, що міра чистого P^*-типу, як і міра чистого C^*-типу, є мірою чистого K^*-типу.

4. Структура сингулярного розподілу

Теорема 3. *Для довільної ймовірнісної міри μ в $(R_1, \mathfrak{B})$ мають місце розклади*

$$\mu = \beta_1 \mu^S + \beta \mu^K = \tag{9}$$

$$= \beta_1 \mu^S + \beta_2 \mu^P + \beta_3 \mu^C, \tag{10}$$

де $\beta \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $\beta_1 + \beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$,

μ^S, μ^K, μ^P, μ^C — ймовірнісні міри чистого S^*-, K^*-, P^*-, C^*-типів відповідно.

Доведення. Якщо μ є мірою чистого S^*- або K^*-типу, то розклад (9) є очевидним. Якщо μ є мірою чистого S^*-, P^*- або C^*-типу, то очевидним є розклад (10). Справді, якщо μ є мірою чистого S^*-типу, то

$$\mu = 1 \cdot \mu^S + 0 \cdot \mu^K = 1 \cdot \mu^S + 0 \cdot \mu^P + 0 \cdot \mu^C, \quad \text{де} \;\; \mu^S = \mu,$$

а μ^K, μ^P і μ^C — довільні чисті ймовірнісні міри відповідних типів.

Якщо μ є мірою чистого P^*-типу, то

$$\mu = 0 \cdot \mu^S + 1 \cdot \mu^P + 0 \cdot \mu^C = 0 \cdot \mu^S + 1 \cdot \mu^K, \quad \text{де} \;\; \mu^K = \mu^P,$$

μ^S, μ^C — довільні чисті ймовірнісні міри S^*- та C^*-типів відповідно.

Аналогічно, якщо μ є мірою чистого C^*-типу, то

$$\mu = 0 \cdot \mu^S + 0 \cdot \mu^P + 1 \cdot \mu^C = 0 \cdot \mu^S + 1 \cdot \mu^K, \quad \text{де} \;\; \mu^K = \mu^C,$$

μ^S, μ^P — довільні чисті ймовірнісні міри S^*- та P^*-типів відповідно.

Розглянемо тепер випадок, коли μ не є мірою чистого S^*-, K^*-, P^*-, C^*-типу.

Оскільки μ не є мірою чистого S^*-типу, то

$$0 < \mu(A_\mu) < 1, \quad 0 < \mu(B_\mu + C_\mu) = 1 - \mu(A_\mu) < 1.$$

Якщо μ_1 є звуженням міри μ на A_μ, а $\tilde{\mu}$ є звуженням міри μ на $B_\mu + C_\mu$, то

$$\mu^S := \frac{1}{\mu(A_\mu)} \mu_1 \quad \text{і} \quad \mu^K := \frac{1}{\mu(B_\mu + C_\mu)} \tilde{\mu}$$

є ймовірнісними мірами. Тоді має місце розклад (9) з $\beta_1 = \mu(A_\mu)$ і $\beta = \mu(B_\mu + C_\mu)$.

Оскільки μ^K не є мірою чистого P^*-типу (бо μ не є такою), то

$$0 < \mu^K(B_\mu) < 1, \quad 0 < \mu^K(C_\mu) = 1 - \mu^K(B_\mu) < 1.$$

Якщо μ_2 є звуженням міри μ^K на B_μ, а μ_3 є звуженням міри μ^K на C_μ, то

$$\mu^P := \frac{1}{\mu^K(B_\mu)} \mu_2 \quad \text{і} \quad \mu^C := \frac{1}{\mu^K(C_\mu)} \mu_3$$

є ймовірнісними мірами. Тоді має місце розклад

$$\mu^K = \mu^K(B_\mu) \mu^P + \mu^K(C_\mu) \mu^C,$$

а отже, має місце розклад (10) з $\beta_2 = \beta\mu^K(B_\mu)$ і $\beta_3 = \beta\mu^K(C_\mu)$. $\square$

5. Узагальнення

Наведені результати легко переносяться в простір R_n.

Якщо S_ξ — спектр розподілу випадкового елемента простору R_n, а $A_1 = intS_\xi$, то

$$S_\xi = A_1 + \partial S_\xi,$$

де ∂S_ξ — межа множини S_ξ.

Нехай $O_\varepsilon(x)$ — це ε-окіл точки x, $\lambda_n(\cdot)$ — n-вимірна міра Лебега. Тоді множина $K \equiv \partial S_\xi$ є об'єднанням неперетинних множин

$$A_2 \equiv \{x : \ \lambda_n(O_\varepsilon(x)) > 0 \ \ \forall\varepsilon > 0\},$$

$$A_3 \equiv \{x : \ \exists\varepsilon > 0 \ \ \lambda_n(O_\varepsilon(x)) = 0\}.$$

А отже, $S_\xi = A_1 + A_2 + A_3$, причому $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Ядром спектра називається множина I, яка є об'єднанням множин A_i таких, що $\mathbb{P}\{\xi \in A_i\} > 0$.

Якщо

$\mathbb{P}\{\xi \in A_1\} = 1$, то розподіл називається розподілом S^*-типу;

$\mathbb{P}\{\xi \in K\} = 1$ — K^*-типу;

$\mathbb{P}\{\xi \in A_2\} = 1$ — P^*-типу;

$\mathbb{P}\{\xi \in A_3\} = 1$ — C^*-типу.

у цьому випадку знову має місце теорема 3, доведення якої можна провести аналогічно до наведеного.

Література

[1] *Albeverio S., Baranovskiy O., Pratsiovytyi M., Torbin G.* The Ostrogradsky series and related Cantor-like sets // Acta Arith. — 2007. — Vol. 130, no. 3. — P.215-230.

[2] *Albeverio S., Goncharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Jessen-Wintner type random variables and fractal properties of their distributions // Mathematische Nachrichten, 2006. — Vol. 279, N 15. — P. 1619-1633.

[3] *Albeverio S., Goncharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Convolution of distributions of random variables with independent binary digits // Random Oper. Stochastic Equatons, 2007, Vol. 15, no. 1. — P.89-97.

[4] *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Spectral properties of image measures under the infinite conflict interactions // Positivity, 2006. — 10, N 1. — P. 39-49.

[5] *Albeverio S., Koval V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* On classification of singular measures and fractal properties of quasi-self-affine measures in R^2 // Random Operators and Stochastic Equations, 2008. — 16, N 2. — P. 181-211.

[6] *Pratsiovytyi M., Kyurchev D.* Properties of the distribution of the random variable defined by A_2-continued fraction with independent elements R^2 // Random Operators and Stochastic Equations, 2009. — — Vol. 17, N 1. — P.91-101.

[7] *Pratsiovytyi M.V., Feshchenko O.Yu.* Topological-metrical and fractal properties of the distributions on the set of the incomplete sums of series of positive terms // Thory of Stochastic Processes. — 2007. — 13(29), no. 1-2. — P. 205-224.

[8] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. —Київ: Вид-во НПУ ім. М.П.Драгоманова, — 1998. —296с.

[9] *Турбин А. Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. К.: Наукова думка, 1992. — 208 с.

[10] *Працевитый Н.В.* Классификация сингулярных распределений в зависимости от свойств спектра // Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи.— Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992.— С.77-83.

[11] *Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Про класифікацію одновимірних сингулярно неперервних ймовірнісних мір за їх спектральними властивостями // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова, 2006. — № 7. — С. 95-104.

[12] *Працьовитий М.В., Гетьман Б.І.* Ряди Енгеля та їх застосування // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова, 2006. — № 7. — С. 105-116.

[13] *Працьовитий М.В., Барановський О.М.* Властивості розподілів випадкових величин з незалежними різницями послідовних елементів ряду Остроградського // Теор. ймов. та мат. стат., 2004. — Вип. 70. — С. 131-144.

[14] *Працьовита І.М.* Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова, 2006. — № 7. — С. 174-189. з

[15] *Гончаренко Я.В., Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Фрактальні властивості деяких нескінченних згорток Бернуллі // Теор.ймов.та мат.стат. — 2008. — **79**. — С.34-49.

[16] *Давидов М. О.* Курс математичного аналізу. Ч.3. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. — К.: Вища школа, 1992. — 383 с.

[17] *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. — 480 с.

[18] *Золотарев В.М., Круглов В.М.* Структура безгранично делимых распределений на локально бикомпактной абелевой группе // Теория вероятностей и ее применения.— 1975.— 20, $N^{\underline{o}}$ 4.— С.712-724.

[19] *Лукач Е.* Характеристические функции.— М.: Наука, 1979.— 424с.

[20] *Zamfirescu T.* Most monotone functions are singular // Amer. Math. Mon.— 1981.— 88.— P.47-49.