Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2009, № 10.— С. 108–120.

Асимптотичні властивості характеристичної функції розподілу випадкової величини, зображеної двійковим дробом з двома надлишковими цифрами

О. П. Макарчук
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. Досліджується поведінка модуля характеристичної функції $f_\xi(t)$ випадкової величини ξ, зображеної двійковим дробом з двома надлишковими цифрами на нескінченності, а саме: величина $L_\xi = \lim\limits_{|t|\to\infty} \sup |f_\xi(t)|$. Знайдено необхідні та деякі достатні умови для того, щоб $L_\xi = 0$.

Abstract. The behavior module characteristic function $f_\xi(t)$ of a random variable ξ, depicted with two binary fraction excess numbers at infinity, namely size $L_\xi = \lim\limits_{|t|\to\infty} \sup |f_\xi(t)|$. Necessary and sufficient conditions for some to $L_\xi = 0$.

1.Вступ

Характеристичною функцією випадкової величини ξ називається комплексно-значна функція $f_\xi(t) = M(e^{it\xi})$, де $M(\cdot)$ – математичне сподівання.

Відомо[3,с.35], що коли випадкова величина ξ має дискретний розподіл то

$$L_\xi = \lim_{|t|\to\infty} \sup |f_\xi(t)| = 1.$$

Якщо розподіл ξ є абсолютно неперервним, то $L_\xi = 0$; якщо – сингулярним, то $0 \le L_\xi \le 1$. У випадку лебегівської чистоти розподілу випадкової величини ξ умова $L_\xi = 0$ є необхідною для абсолютної неперервності, а умова $0 < L_\xi < 1$ – достатньою для сингулярності розподілу ξ. Якщо випадкова величина ξ має чисто неперервний розподіл, то з $L_\xi > 0$ випливає сингулярність розподілу ξ. Отже, за поведінкою модуля характеристичної функції випадкової величини ξ на нескінченності (тобто за величиною L_ξ) можна частково судити про тип її розподілу.

Нехай τ_k – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0,1 з ймовірностями p_{0k}, p_{1k} відповідно. Випадкова величина

$$\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k 2^{-k}$$

називається випадковою величиною з незалежними двійковими цифрами.

Нехай ψ_k – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0,1,2 з ймовірностями p_{0k}, p_{1k}, p_{2k} відповідно.Випадкова величина

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k 2^{-k}$$

називається випадковою величиною, зображеною двійковим дробом з однією надлишковою цифрою.

Нехай ξ_k – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0,1,2,3 з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, p_{2k}, p_{3k}$ відповідно.Випадкова величина

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k 2^{-k}$$

називається випадковою величиною, зображеною двійковим дробом з двома надлишковими цифрами.

Величина L_τ досліджувалася в роботі [1], де були знайдені необхідні та достатні умови того, що $L_\tau = 0$. *Для того, щоб характеристична функція випадкової величини* τ *задовольняла умову* $L_\tau = 0$ *необхідно та достатньо, щоб* $p_{0k} \to \frac{1}{2}(k \to \infty)$.

Величина L_ψ досліджувалася в роботі [7], де були знайдені необхідні та достатні умови того, що $L_\psi = 0$. *Для того, щоб характеристична функція випадкової величини* ψ *задовольняла умову* $L_\psi = 0$ *необхідно та достатньо, щоб* $\lim\limits_{k\to\infty} p_{1k} = \frac{1}{2}$ *або* $\lim\limits_{k\to\infty} p_{0k} = \frac{1}{2} = \lim\limits_{k\to\infty} p_{2k}$.

Потрібно відмітити, що τ та ψ є частковими випадками випадкової величини ξ, адже при
$p_{2k} = 0 = p_{3k}$ $\forall k \in N$ ξ є випадковою величиною з незалежними двійковими цифрами, а при $p_{3k} = 0$ $\forall k \in N$ ξ є випадковою величиною, зображеною двійковим дробом з однією надлишковою цифрою.

Величина L_ξ досліджувалася в роботі [4] для випадку однаково розподілених випадкових величин ξ_k, які набувають значень 0,1,2,3 з ймовірностями p_0, p_1, p_2, p_3 відповідно.В ній були знайдені необхідні умови того, щоб $L_\xi = 0$. *Для того, щоб характеристична функція випадкової величини* ξ *задовольняла умову* $L_\xi = 0$ *необхідно, щоб* $(p_0 - p_2)^2 + (p_1 - p_3)^2 = 0$ *або*
$p_0 - p_1 + p_2 - p_3 = 0$. Питання про достатні умови того, щоб $L_\xi = 0$ у вище вказаній роботі не піднімалося.В даній роботі ми доводимо, що вказана умова є і достатньою.

Апарат характеристичних функцій відіграє суттєву роль в проблемі ідентифікації типу розподілів випадкових величин типу Джессена-Вінтнера [9], яка є окремою, актуальною проблемою сучасної математики. Міри, що відповідають випадковим величинам χ, для яких $L_\chi = 0$, називають мірами Райхмана [11]. Актуальність дослідження відповідного класу мір відзначається багатьма дослідниками.

У даній роботі ми досліджуємо умови, при яких $L_\xi = 0$, використовуючи методологію з робіт [1,2,7,8].

2.Поведінка модуля характеристичної функції випадкової величини ξ на нескінченності.

Лема 1. *Характеристична функція випадкової величини ξ може бути записана у вигляді*

$$f_\xi(t) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(t), \text{ де } f_k(t) = p_{0k} + p_{1k} e^{i\frac{t}{2^k}} + p_{2k} e^{i\frac{2t}{2^k}} + p_{3k} e^{i\frac{3t}{2^k}}.$$

Модуль $f_\xi(t)$ при $t > 2\pi$ можна подати у вигляді

$$|f_\xi(t)| = A_t D_t,$$

де

$$A_t = \prod_{k=1}^{m(t)+1} |f_k(t)|, \; D_t = \prod_{k=m(t)+2}^{\infty} |f_k(t)|,$$

$$|f_k(t)|^2 = (1 - 4(p_{0k}p_{1k} + p_{1k}p_{2k} + p_{2k}p_{3k}) \sin^2 \frac{t}{2^{k+1}} -$$

$$-4(p_{1k}p_{3k} + p_{0k}p_{2k}) \sin^2 \frac{2t}{2^{k+1}} - 4p_{0k}p_{3k} \sin^2 \frac{3t}{2^{k+1}}). \quad (1)$$

і $m(t)$ – мінімальний натуральний розв'язок нерівності $\frac{t}{2^{k+1}} < \frac{\pi}{2}$, тобто

$$m(t) = \left[\log_2 \frac{t}{\pi}\right] + 1. \quad (2)$$

Доведення. Використовуючи властивості характеристичної функції і властивості математичного сподівання, отримаємо:

$$f_\xi(t) = M(e^{it\xi}) = M(e^{it\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k 2^{-k}}) = M(\prod_{k=1}^{\infty} e^{it\xi_k 2^{-k}}) =$$
$$= \prod_{k=1}^{\infty} M(e^{it\xi_k 2^{-k}}) = \prod_{k=1}^{\infty} (p_{0k} + p_{1k} e^{i\frac{t}{2^k}} + p_{2k} e^{i\frac{2t}{2^k}} + p_{3k} e^{i\frac{3t}{2^k}}) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(t).$$

Застосовуючи формулу Ейлера, маємо:

$$f_k(t) = (p_{0k} + p_{1k} \cos \frac{t}{2^k} + p_2 \cos \frac{2t}{2^k} + p_3 \cos \frac{3t}{2^k}) + i(p_{1k} \sin \frac{t}{2^k} + p_{2k} \sin \frac{2t}{2^k} + p_{3k} \sin \frac{3t}{2^k}).$$

Звідки $|f_k(t)|^2 = (p_{0k} + p_{1k} \cos \frac{t}{2^k} + p_{2k} \cos \frac{2t}{2^k} + p_{3k} \cos \frac{3t}{2^k})^2 + (p_{1k} \sin \frac{t}{2^k} + p_{2k} \sin \frac{2t}{2^k} + p_{3k} \sin \frac{3t}{2^k})^2$.

З використанням елементарних перетворень та формули $\cos(2\beta) = 1 - 2\sin^2\beta$ отримаємо (1). □

Наслідок 1. *$|f_\xi(t)| = |f_\xi(-t)|$ для довільного $t \in R$.*

Зауваження. Переслідуючи мету дослідження модуля характеристичної фунції на нескінченності і враховуючи попередню рівність, далі розглядатимемо $t > 2\pi$.

Лема 2. *Для довільного $t > 2\pi$ існує константа $C > 0$ така, що $D_t \geq C$.*

Доведення. Оскільки $|\sin(x)| \leq |x|$ для кожного $x \in R$ і $\sum\limits_{0 \leq s < r \leq 3} p_{sk}p_{rk} = \frac{1}{2}(1 - -\sum_{i=0}^{3} p_{ik}^2) < \frac{1}{2}$, то

$$D_t \geq \prod_{j=2}^{\infty} \sqrt{1 - 4 \sum_{0 \leq r < l \leq 3} p_{r(m(t)+j)} p_{l(m(t)+j)} \sin(\tfrac{l-r}{2^{1+j}})^2} \geq$$
$$\geq \prod_{j=2}^{\infty} \sqrt{1 - 4 \sum_{0 \leq r < l \leq 3} p_{r(m(t)+j)} p_{l(m(t)+j)} (\tfrac{l-r}{2^{1+j}})^2} \geq$$
$$\geq \prod_{j=2}^{\infty} \sqrt{1 - 4 (\sum_{0 \leq s < p \leq 3} p_{s(m(t)+j)} p_{p(m(t)+j)}) (\tfrac{3\pi}{2^{1+j}})^2} \geq$$
$$\geq \prod_{j=0}^{\infty} \sqrt{1 - 2(\frac{\pi}{2^{1+j}})^2} = C > 0. \tag{3}$$

Останній добуток є збіжним зарахунок того, що є збіжним ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} (\frac{\pi}{2^{1+j}})^2$. □

Наслідок 2. *$C \cdot A_t \leq |f_\xi(t)| \leq A_t$ при $t > 2\pi$.*

Наслідок 3. *$\lim\limits_{|t| \to \infty} |f_\xi(t)| = 0$ лише, коли $\lim\limits_{|t| \to \infty} A_t = 0$.*

Теорема 1. *Якщо $L_\xi = 0$, то*

$$\lim_{k \to \infty} M_k = 0 \tag{4}$$

де

$$M_k = d_k g_{k+1} \tag{5}$$

$$d_k = (p_{0k} - p_{1k} + p_{2k} - p_{3k})^2, g_{k+1} = (p_{0(k+1)} - p_{2(k+1)})^2 + (p_{1(k+1)} - p_{3(k+1)})^2.$$

Доведення. Якщо $L_\xi = 0$, то для будь-якої послідовності $t_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ маємо: $\lim\limits_{n \to \infty} |f_\xi(t_n)| = 0$. Нехай $t_n = \pi \cdot 2^{n+1}$. Легко бачити, що $|f_k(t_n)| = 1$ при $k \leq n$,

$$m(t_n) = n + 2,$$

$$|f_{n+1}(t_n)| = |p_{0(n+1)} - p_{1(n+1)} + p_{2(n+1)} - p_{3(n+1)}|,$$
$$|f_{n+2}(t_n)| = \sqrt{(p_{0(n+2)} - p_{2(n+2)})^2 + (p_{1(n+2)} - p_{3(n+2)})^2},$$

$$|f_{n+3}(t_n)|^2 = \sum_{i=0}^{3} p^2_{i(n+3)} + \sqrt{2}(p_{0(n+3)}p_{1(n+3)} + p_{1(n+3)}p_{2(n+3)} + p_{2(n+3)}p_{3(n+3)})-$$
$$-\sqrt{2}p_{0(n+3)}p_{3(n+3)} \geq \tfrac{2-\sqrt{2}}{2}\sum_{i=0}^{3} p^2_{i(n+3)} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}(p_{0(n+3)} - p_{3(n+3)})^2 \geq$$
$$\geq \tfrac{2-\sqrt{2}}{8}(\sum_{i=0}^{3} p_{i(n+3)})^2 = \tfrac{2-\sqrt{2}}{8} > \tfrac{1}{16}.$$

Отже,

$|f_\xi(t_n)| = |f_{n+1}(t_n)||f_{n+2}(t_n)||f_{n+3}(t_n)|D_{t_n} \geq |f_{n+1}(t_n)||f_{n+2}(t_n)|\frac{1}{4}C = 0.25C\sqrt{M_{n+1}}$, де додатна константа C визначається рівністю (3).Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}|f_\xi(t_n)| = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} M_{n+1} = 0$, а отже, $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = 0$, що й вимагалось довести. □

Зауваження. Потрібно відмітити, що з рівності $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = 0$, взагалі кажучи, не випливає, що

$$\lim_{k\to\infty}(p_{0k} - p_{1k} + p_{2k} - p_{3k}) = 0 \tag{6}$$

або

$$\lim_{k\to\infty}((p_{0k} - p_{2k})^2 + (p_{1k} - p_{3k})^2) = 0. \tag{7}$$

Щоб переконатись в цьому розглянемо наступний приклад.

Нехай $p_{i(2k)} = \frac{1}{4}$ і $p_{i(2k-1)} = \frac{2i+1}{15}$ для довільного $k \in N, i \in \{0;1;2;3\}$.Тоді умова (4) виконається, оскільки

$$p_{0(2k)} - p_{1(2k)} + p_{2(2k)} - p_{3(2k)} = (p_{0(2k)} - p_{2(2k)})^2 + (p_{1(2k)} - p_{3(2k)})^2 = 0,$$

а умови (6) та (7) – ні, тому що

$$|p_{0(2k-1)} - p_{1(2k-1)} + p_{2(2k-1)} - p_{3(2k-1)}| = \frac{4}{15}$$

та

$$(p_{0(2k-1)} - p_{2(2k-1)})^2 + (p_{1(2k-1)} - p_{3(2k-1)})^2 = \frac{32}{225}.$$

Лема 3. *Якщо виконується рівність (4), то існує зростаюча послідовність натуральних чисел k_n така, що*

$$\lim_{n\to\infty}(p_{0k_n} - p_{1k_n} + p_{2k_n} - p_{3k_n}) = 0$$

або

$$\lim_{n\to\infty}((p_{0k_n} - p_{2k_n})^2 + (p_{1k_n} - p_{3k_n})^2) = 0.$$

Доведення. Оскільки послідовність стохастичних векторів $(p_{0k}; p_{1k}; p_{2k}; p_{3k})$ обмежена в R^4, то за теоремою Больцано-Вейєрштрасса з неї можна виділити збіжну підпослідовність$(p_{0k_n}; p_{1k_n}; p_{2k_n}; p_{3k_n})$, яка збігається до деякого стохастичного вектора $(q_0; q_1; q_2; q_3)$.Тоді

$$0 = \lim_{n\to\infty} M_{k_n} = (q_0 - q_1 + q_2 - q_3) \lim_{n\to\infty} ((p_{0(k_n+1)} - p_{1(k_n+1)})^2 + (p_{2(k_n+1)} - p_{3(k_n+1)})^2).$$

Рівність $q_0 - q_1 + q_2 - q_3 = 0$, рівносильна $\lim\limits_{n\to\infty}(p_{0k_n} - p_{1k_n} + p_{2k_n} - p_{3k_n}) = 0$.

Якщо $q_0 - q_1 + q_2 - q_3 \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}((p_{0(k_n+1)} - p_{1(k_n+1)})^2 + (p_{2(k_n+1)} - p_{3(k_n+1)})^2) = 0$, що і потрібно було довести. □

Зауваження. Зазначимо, що коли існує $n_0 \in N : \inf\limits_{n_0<n\in N} |p_{0k} - p_{1k} + p_{2k} - p_{3k}| > 0$, то з умови (4) випливає $\lim\limits_{k\to\infty}((p_{0k} - p_{2k})^2 + (p_{1k} - p_{3k})^2) = 0$.

Якщо ж існує $n_1 \in N : \inf\limits_{n_1<n\in N}((p_{0k} - p_{2k})^2 + (p_{1k} - p_{3k})^2) > 0$, то з умови (4) випливає $\lim\limits_{k\to\infty}(p_{0k} - p_{1k} + p_{2k} - p_{3k}) = 0$.

Лема 4. *Якщо для послідовності* (t_k) *виконується умова* $\lim\limits_{k\to\infty} \sin(\frac{t_k}{2^{k+1}}) = a$, *де* $a \in \{-1, 1\}$ *і виконується рівність (4), то*

$$\lim_{k\to\infty} |f_k(t_k)||f_{k+1}(t_k)| = 0.$$

Доведення. Оскільки $\sin\frac{2t_k}{2^{k+1}} = 2\sin\frac{t_k}{2^{k+1}}\cos\frac{t_k}{2^{k+1}}$, то $\lim\limits_{k\to\infty}\sin(\frac{2t_k}{2^{k+1}}) = 0$. Оскільки $\sin\frac{3t_k}{2^{k+1}} = 3\sin\frac{t_k}{2^{k+1}} - 4\sin^3\frac{t_k}{2^{k+1}}$, то $\lim\limits_{k\to\infty}\sin^2(\frac{3t_k}{2^{k+1}}) = 1$.

Маємо: $\lim\limits_{k\to\infty}\sin^2\frac{t_k}{2^{k+2}} = \frac{1}{2}$, бо $\sin^2\frac{t_k}{2^{k+2}} = \frac{1-\cos\frac{t_k}{2^{k+1}}}{2}$, причому $\lim\limits_{k\to\infty}\cos\frac{t_k}{2^{k+1}} = 0$.

Виконується рівність $\sin^2\frac{3t_k}{2^{k+2}} = \sin^2\frac{t_k}{2^{k+2}}(3 - 4\sin^2\frac{t_k}{2^{k+2}})^2$, тому $\lim\limits_{k\to\infty}\sin^2\frac{3t_k}{2^{k+2}} = \frac{1}{2}$.

Оскільки $1 - 4(p_{0k}p_{1k} + p_{1k}p_{2k} + p_{2k}p_{3k}) - 4p_{0k}p_{3k} = (p_{0k} - p_{1k} + p_{2k} - p_{3k})^2$, то $\lim\limits_{k\to\infty}(|f_k(t_k)|^2 - (p_{0k} - p_{1k} + p_{2k} - p_{3k})^2) = 0$.

Оскільки $1 - 2(p_{0(k+1)}p_{1(k+1)} + p_{1(k+1)}p_{2(k+1)} + p_{2(k+1)}p_{3(k+1)}) -$
$-4(p_{1(k+1)}p_{3(k+1)} + p_{0(k+1)}p_{2(k+1)}) - 2p_{0(k+1)}p_{3(k+1)} = (p_{0(k+1)} - p_{2(k+1)})^2 + (p_{1(k+1)} - p_{3(k+1)})^2$,
то $\lim\limits_{k\to\infty}(|f_{k+1}(t_k)|^2 - ((p_{0(k+1)} - p_{2(k+1)})^2 + (p_{1(k+1)} - p_{3(k+1)})^2) = 0$.

Звідки випливає потрібне твердження. □

Теорема 2. *Якщо для розподілу випадкової величини* ξ *виконується умова (4) і існує* $n_0 \in N$ *таке, що*

$$\inf_{n_0<n\in N}(p_{0k}p_{1k} + p_{1k}p_{2k} + p_{2k}p_{3k}) > 0$$

або

$$\inf_{n_0<n\in N}(p_{1k}p_{3k} + p_{0k}p_{2k}) > 0,$$

то для її характеристичної функції виконується рівність $L_\xi = 0$.

Доведення. Нехай (t_n) довільна послідовність, яка прямує до нескінченності. Покажемо, що при виконанні умов теореми виконується рівність $\lim\limits_{n\to\infty}|f_\xi(t_n)|=0$, що рівносильно твердженню теореми 2.

Розглянемо послідовність $a_n=\frac{t_n}{2^{m_n+1}}$, де натуральне число $m_n=m_n(t_n)$ визначається рівністю (2). Вона обмежена справа числом $\frac{\pi}{2}$, а зліва – $\frac{\pi}{4}$.
Можливі наступні випадки:
I)Існує границя послідовності (a_n) при $n\to\infty$.
II)Послідовність (a_n) границі не має.
I)Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$.
a) Якщо $a=\frac{\pi}{4}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_n}{2^{m_n}}=\frac{\pi}{2}$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{t_n}{2^{m_n}}=1$.Враховуючи що $|f_k(t)|\leq 1$ для кожного $k\in N$ і лему 4, отримаємо: $|f_\xi(t_n)|\leq|f_{m_n-1}(t)||f_{m_n}(t)|\to 0$ при $n\to\infty$. Звідки $\lim\limits_{n\to\infty}|f_\xi(t_n)|=0$.
b) Якщо $a=\frac{\pi}{2}$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_n}{2^{m_n+1}}=\frac{\pi}{2}$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{t_n}{2^{m_n+1}}=1$.Враховуючи що $|f_k(t)|\leq 1$ для кожного $k\in N$ і лему 4, отримаємо: $|f_\xi(t_n)|\leq|f_{m_n}(t)||f_{m_n+1}(t)|\to 0$ при
$n\to\infty$.Звідки $\lim\limits_{n\to\infty}|f_\xi(t_n)|=0$.
c) Нехай тепер $a\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$, тоді $a=q\pi$, де $\frac{1}{4}<q<\frac{1}{2}$ і в двійковому розкладі числа q

$$q=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\alpha_k(q)=0,\alpha_1(q)\alpha_2(q)...\alpha_k(q)...,\text{ де }\alpha_k(q)\in\{0;1\}\ \forall k\in N$$

$\alpha_1(q)=0,\alpha_2(q)=1$. Можливі два випадки.
1) q є двійково-раціональним числом, тобто його двійковий запис містить період (0) або (1).
2) q є двійково-ірраціональним числом, тобто існує єдине двійкове представлення q, яке містить нескінченну кількість пар "01"і "11".

Не порушуючи загальності, ми можемо вважати, що послідовність $q_n=\frac{a_n}{\pi}$ монотонна.
1)Нехай q є двійково-раціональним число, тоді існує два двійкових представлення

$$q=0,01\alpha_3(q)...\alpha_{c-1}(q)(0) \tag{8}$$

або

$$q=0,01\alpha_3(q)...\alpha_{c-1}(q)(1) \tag{9}$$

Якщо $q_n\uparrow q$, то ми використовуватимо представлення (9). Для довільного s існує натуральне число $K_0(s)$ таке, що для будь-якого $n>K_0(s)$ число q_n можна представити в наступному вигляді

$$q_n=0,01\alpha_3...\alpha_{c-1}0\underbrace{11...1}_{s}\alpha_{c+s+1}\alpha_{c+s+2}....$$

Тому

$$2^{c-1}q_n = 1\alpha_3...\alpha_{c-1}, 0\underbrace{11...1}_{s}\alpha_{c+s+1}\alpha_{c+s+2}....$$

Для вибраного t_n розглянемо число $k = m_n - c + 1$. Тоді

$$\frac{t_n}{2^{k+1}} = \pi \cdot 1\alpha_3...\alpha_{c-1}, 0\underbrace{11...1}_{s}\alpha_{c+s+1}\alpha_{c+s+2}...$$

і

$$\sin^2(\frac{t_n}{2^{k+1}}) = \sin^2(\pi \cdot 1\alpha_3...\alpha_{c-1}, 0\underbrace{11...1}_{s}\alpha_{c+s+1}\alpha_{c+s+2}...) \to 1(s \to \infty).$$

Враховуючи , що $|f_k(t_n)| \leq 1$ для кожного $k \in N$ і лему 4 , отримаємо:
$|f_\xi(t_n)| \leq |f_{m_n-c+1}(t)||f_{m_n-c+2}(t)| \to 0$, при $n \to \infty$, звідки $\lim\limits_{n\to\infty} |f_\xi(t_n)| = 0$.

Якщо $q_n \downarrow q$, то ми використовуватимо представлення (8) . Для довільного s існує натуральне число $K_0(s)$ таке, що для будь-якого $n > K_0(s)$ число q_n можна представити в наступному вигляді

$$q_n = 0, 01\alpha_3...\alpha_{c-1}1\underbrace{00...0}_{s}\alpha_{c+s+1}\alpha_{c+s+2}....$$

Тому

$$2^{c-1}q_n = 1\alpha_3...\alpha_{c-1}, 1\underbrace{00...0}_{s}\alpha_{c+s+1}\alpha_{c+s+2}....$$

Для вибраного t_n розглянемо число $k = m_n - c + 1$. Тоді

$$\frac{t_n}{2^{k+1}} = \pi \cdot 1\alpha_3...\alpha_{c-1}, 1\underbrace{00...0}_{s}\alpha_{c+s+1}\alpha_{c+s+2}...$$

і

$$\sin^2(\frac{t_n}{2^{k+1}}) = \sin^2(\pi \cdot 1\alpha_3...\alpha_{c-1}, 1\underbrace{00...0}_{s}\alpha_{c+s+1}\alpha_{c+s+2}...) \to 1(s \to \infty).$$

Враховуючи що $|f_k(t)| \leq 1$ для кожного $k \in N$ і лему 4, отримаємо:
$|f_\xi(t_n)| \leq |f_{m_n-c+1}(t)||f_{m_n-c+2}(t)| \to 0$ при $n \to \infty$, звідки $\lim\limits_{n\to\infty} |f_\xi(t_n)| = 0$.
2) q є двійково-ірраціональним числом, тоді воно має єдине двійкове представлення

$$q = 0, 01\alpha_3(q)...\alpha_{c-1}(q)....$$

Розглянемо випадок, коли існує $n_0 \in N : \inf\limits_{n_0<n\in N}(p_{1k}p_{3k} + p_{0k}p_{2k}) = \delta > 0$. Для випадку коли існує $n_0 \in N$ таке, що $\inf\limits_{n_0<n\in N}(p_{0k}p_{1k} + p_{1k}p_{2k} + p_{2k}p_{3k}) > 0$ доведення проводиться аналогічно.

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$.Зрозуміло, що існує $N_1 \in N : (1-0,36\delta)^{\frac{N_1}{2}} < \varepsilon$. Розглянемо послідовність $r_k = r_k(q)$ натуральних чисел таких, що $\{q2^{r_k}\} = 0, \beta_{r_k}01\gamma_{r_k}\rho_{r_k}....$ Позначимо $b_k(q) = b_k = \{q2^{r_k}\} = 0, \beta_{r_k}01\gamma_{r_k}\rho_{r_k}....$ Послідовність b_k є нескінченною, оскільки q – двійково-ірраціональне число .

Для кожного натурального u існує натуральне число $n'(u)$ таке, що для довільного $n > n'(u)$ двійкове представлення q_n має вигляд

$$q_n = 0,01\alpha_3(q)...\alpha_u(q)\alpha'_{u+1}(q_n)....$$

Тому, існує натуральне число $n^*(N_1)$ таке, що для довільного $n > n^*(N_1)$ виконується рівність $\{q_n 2^{r_k}\} = 0,\beta_{r_k}01\gamma_{r_k}\rho_{r_k}...$ для кожного $k \in \{1,...,N_1\}$. Для вибраного t_n позначимо $l_{kn} = m_n - r_k$ для кожного $k \in \{1,...,N_1\}$.

Існує натуральне число n^{**} таке, що для довільного $n > n^{**}$ виконується умова $l_{kn} = m_n - r_k > N_0$ для кожного $k \in \{1,...,N_1\}$.

Зрозуміло, що $\sin^2(\frac{t_n}{2^{m_n-r_k}}) = \sin^2(\pi \cdot q_n 2^{r_k}) = \sin^2(\pi \cdot 0,\beta_{r_k}01\gamma_{r_k}\rho_{r_k}...) \in (0,1;0,9)$ та $\sin^2(\frac{2t_n}{2^{m_n-r_k}}) = \sin^2(2\pi \cdot q_n 2^{r_k}) = 1 - (1-2\sin^2(\frac{t_n}{2^{m_n-r_k}}))^2 \in (0,36;1)$, тому

$$|f_{l_{kn}}(t_n)| < \sqrt{(1-0,36\delta)}\ \forall k \in \{1,...,N_1\}\,.$$

Отже, $|f_\xi(t_n)| \leq \prod_{i=1}^{N_1} |f_{l_{in}}(t_n)| < (1-0,36\delta)^{\frac{N_1}{2}} < \varepsilon$ для кожного $n > n^{**}$, звідки

$$\lim_{n\to\infty} |f_\xi(t_n)| = 0.$$

II)Нехай послідовність (a_n) не має границі при $n \to \infty$. Припустимо, що $L_\xi = b_0 > 0$. Тоді існує послідовність (t'_n), така що $\lim_{n\to\infty} |f_\xi(t'_n)| = b_0$. Оскільки послідовність $(a'_n) = (\frac{t'_n}{2^{m_n+1}})$ обмежена, то з неї можна виділити збіжну підпослідовність (a'_{n_l}). Тоді $\lim_{n\to\infty} |f_\xi(t'_{n_l})| = b_0$, що суперечить доведеному у випадку I) результату $\lim_{n\to\infty} |f_\xi(t'_{n_l})| = 0$. □

Лема 5. *Якщо* $\lim_{k\to\infty} p_{0k} = \frac{1}{2} = \lim_{k\to\infty} p_{3k}$ *і* $\lim_{k\to\infty} \sin\frac{t_k}{2^{k+1}} = a$, *де* $a \in \{-1,1\}$, *то*

$$\lim_{k\to\infty} |f_k(\frac{t_k}{3})| = 0.$$

Доведення. Якщо $\lim_{k\to\infty} p_{0k} = \frac{1}{2} = \lim_{k\to\infty} p_{3k}$, то $\lim_{k\to\infty} p_{1k} = 0 = \lim_{k\to\infty} p_{2k}$, тому $\lim_{k\to\infty}(p_{0k}p_{1k} + p_{1k}p_{2k} + p_{2k}p_{3k}) = 0 = \lim_{k\to\infty}(p_{1k}p_{3k} + p_{0k}p_{2k})$.

Оскільки $|f_k(\frac{t}{3})|^2 = 1 - 4(p_{0k}p_{1k} + p_{1k}p_{2k} + p_{2k}p_{3k})\sin^2\frac{t}{3\cdot 2^{k+1}} -$ $-4(p_{1k}p_{3k} + p_{0k}p_{2k})\sin^2\frac{2t}{3\cdot 2^{k+1}} - 4p_{0k}p_{3k}\sin^2\frac{t}{2^{k+1}}$, то $\lim_{k\to\infty} |f_k(\frac{t}{3})| = \sqrt{1 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 0$. □

Теорема 3. *Якщо для розподілу випадкової величини* ξ *виконується умова*

$$\lim_{k\to\infty} p_{0k} = \frac{1}{2} = \lim_{k\to\infty} p_{3k}$$

то для її характеристичної функції виконується рівність $L_\xi = 0$.

Доведення. Зрозуміло, що $f_\xi(\frac{t}{3}) = f_{\frac{\xi}{3}}(t)$. Розподіли випадкових величин ξ і $\frac{\xi}{3}$ еквівалентні, тому

$L_\xi = L_{\frac{\xi}{3}}$.

Нехай (t_n) довільна послідовність, яка прямує до нескінченності. Покажемо, що при виконанні умов теореми виконується рівність $\lim\limits_{n\to\infty}|f_\xi(\frac{t_n}{3})|=0$.

Розглянемо послідовність $a_n=\frac{t_n}{2^{m_n+1}}$, де натуральне число $m_n=m_n(t_n)$ визначається рівністю (2). Вона обмежена справа числом $\frac{\pi}{2}$, а зліва – $\frac{\pi}{4}$.

Можливі наступні випадки:

I)Існує границя послідовності (a_n) при $n\to\infty$.

II)Послідовність (a_n) границі не має

I)Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$.

a)Якщо $a=\frac{\pi}{4}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_n}{2^{m_n}}=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{t_n}{2^{m_n}}=1$. Враховуючи, що $|f_k(\frac{t_n}{3})|\le 1$ для довільного $k\in N$ і лему 5, отримаємо: $|f_\xi(\frac{t_n}{3})|\le|f_{m_n-1}(\frac{t_n}{3})|\to 0$ при $n\to\infty$.Звідки $\lim\limits_{n\to\infty}|f_\xi(\frac{t_n}{3})|=0$.

b) Якщо $a=\frac{\pi}{2}$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_n}{2^{m_n+1}}=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{t_n}{2^{m_n+1}}=1$. Враховуючи, що $|f_k(\frac{t_n}{3})|\le 1$ для довільного $k\in N$ і лему 5, отримаємо: $|f_\xi(\frac{t_n}{3})|\le|f_{m_n}(\frac{t_n}{3})|\to 0$, при $n\to\infty$.Звідки $\lim\limits_{n\to\infty}|f_\xi(\frac{t_n}{3})|=0$.

c)Нехай тепер $a\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ тоді $a=q\pi$, де $\frac{1}{4}<q<\frac{1}{2}$ і в двійковому розкладі числа q

$$q=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\alpha_k(q)=0,\alpha_1(q)\alpha_2(q)...\alpha_k(q)...,\text{ де }\alpha_k(q)\in\{0;1\}\ \forall k\in N$$

$\alpha_1(q)=0,\alpha_2(q)=1$. Можливі два випадки.

1) q є двійково-раціональним числом, тобто його двійковий запис містить період (0) або (1) .

2) q є двійково-ірраціональним числом, тобто існує єдине двійкове представлення q, яке містить нескінченну кількість пар "01"і "11".

Не порушуючи загальності, ми можемо вважати, що послідовність $q_n=\frac{a_n}{\pi}$ монотонна.

1)Нехай q є двійково-раціональним число, тоді існує два двійкових представлення

$$q=0,01\alpha_3(q)...\alpha_{c-1}(q)(0) \tag{10}$$

або

$$q=0,01\alpha_3(q)...\alpha_{c-1}(q)(1) \tag{11}$$

Якщо $q_n\uparrow q$, то ми використовуватимо представлення (11). Для довільного s існує натуральне число $n_0(s)$ таке, що для будь-якого $n>n_0(s)$ число q_n можна представити в наступному вигляді

$$q_n=0,01\alpha_3...\alpha_{c-1}0\underbrace{11...1}_{s}\alpha_{c+s+1}\alpha_{c+s+2}....$$

Тому

$$2^{c-1}q_n=1\alpha_3...\alpha_{c-1},0\underbrace{11...1}_{s}\alpha_{c+s+1}\alpha_{c+s+2}....$$

Для вибраного t_n розглянемо число $k = m_n - c + 1$. Тоді

$$\frac{t_n}{2^{k+1}} = \pi \cdot 1\alpha_3...\alpha_{c-1}, 0\underbrace{11...1}_{s}\alpha_{c+s+1}\alpha_{c+s+2}...$$

і

$$\sin^2(\frac{t_n}{2^{k+1}}) = \sin^2(\pi \cdot 1\alpha_3...\alpha_{c-1}, 0\underbrace{11...1}_{s}\alpha_{c+s+1}\alpha_{c+s+2}...) \to 1(s \to \infty).$$

Враховуючи, що $|f_k(\frac{t_n}{3})| \leq 1$ для довільного $k \in N$ і лему 5, отримаємо:
$|f_\xi(\frac{t_n}{3})| \leq |f_{m_n-c+1}(\frac{t_n}{3})| \to 0$ при $n \to \infty$. Звідки $\lim\limits_{n\to\infty} |f_\xi(\frac{t_n}{3})| = 0$.

Якщо $q_n \downarrow q$, то ми використовуватимо представлення (10). Для довільного s існує натуральне число $n_0(s)$ таке, що для будь-якого $n > n_0(s)$ число q_n можна представити в наступному вигляді

$$q_n = 0,01\alpha_3...\alpha_{c-1}1\underbrace{00...0}_{s}\alpha_{c+s+1}\alpha_{c+s+2}....$$

Тому

$$2^{c-1}q_n = 1\alpha_3...\alpha_{c-1}1\underbrace{00...0}_{s}\alpha_{c+s+1}\alpha_{c+s+2}....$$

Для вибраного t_n розглянемо число $k = m_n - c + 1$. Тоді

$$\frac{t_n}{2^{k+1}} = \pi \cdot 1\alpha_3...\alpha_{c-1}, 1\underbrace{00...0}_{s}\alpha_{c+s+1}\alpha_{c+s+2}...$$

і

$$\sin^2(\frac{t_n}{2^{k+1}}) = \sin^2(\pi \cdot 1\alpha_3...\alpha_{c-1}, 1\underbrace{00...0}_{s}\alpha_{c+s+1}\alpha_{c+s+2}...) \to 1(s \to \infty)$$

Враховуючи, що $|f_k(\frac{t_n}{3})| \leq 1$ для довільного $k \in N$ і лему 5, отримаємо:
$|f_\xi(\frac{t_n}{3})| \leq |f_{m_n-c+1}(\frac{t_n}{3})| \to 0$ при $n \to \infty$. Звідки $\lim\limits_{n\to\infty} |f_\xi(\frac{t_n}{3})| = 0$.
2) q є двійково-ірраціональним числом, тоді воно має єдине двійкове представлення

$$q = 0,01\alpha_3(q)...\alpha_{c-1}(q)....$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Зрозуміло, що існує $N_1 \in N : 0,996^{\frac{N_1}{2}} < \varepsilon$ та існує $N_2 \in N$ таке, що $p_{ik} > 0,1$ при $k > N_2$, $i \in \{0,3\}$. Розглянемо послідовність $r_k = r_k(q)$ натуральних чисел таких, що $\{q2^{r_k}\} = 0,\beta_{r_k}01\gamma_{r_k}\delta_{r_k}....$ Позначимо $b_k(q) = b_k = \{q2^{r_k}\} = 0,\beta_{r_k}01\gamma_{r_k}\delta_{r_k}....$ Послідовність b_k є нескінченною, оскільки q двійково-ірраціональне число .

Для кожного натурального u існує натуральне число $n'(u)$ таке, що для довільного $n > n'(u)$ двійкове представлення q_n має вигляд

$$q_n = 0,01\alpha_3(q)...\alpha_u(q)\alpha'_{u+1}(q_n)....$$

Тому існує натуральне число $n^*(N_1)$ таке, що для довільного $n > n^*(N_1)$ виконується рівність $\{q_n 2^{r_k}\} = 0, \beta_{r_k} 01 \gamma_{r_k} \delta_{r_k} ...$, для кожного $k \in \{1, ..., N_1\}$. Для вибраного t_n позначимо $l_{kn} = m_n - r_k$ при $k \in \{1, ..., N_1\}$.

Існує натуральне число n^{**} таке, що для довільного $n > n^{**}$ виконується умова $l_{kn} = m_n - r_k > N_2$ для кожного $k \in \{1, ..., N_1\}$. Зрозуміло, що
$\sin^2(\frac{t_n}{2^{m_n - r_k}}) = \sin^2(\pi \cdot q_n 2^{r_k}) = \sin^2(\pi \cdot 0, \beta_{r_k} 01 \gamma_{r_k} \delta_{r_k} ...) \in (0,1; 0,9)$.
Оскільки $p_{ik} > 0,1$ для всіх $k > N_2$ та $i \in \{0, 3\}$, то

$$|f_{l_{kn}}(\tfrac{t_n}{3})| < \sqrt{1 - 4 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1} = \sqrt{0,996} \text{ для кожного } k \in \{1, ..., N_1\}\,.$$

Отже, $|f_\xi(\frac{t_n}{3})| \leq \prod\limits_{i=1}^{N_1} |f_{l_{in}}(\frac{t_n}{3})| < 0,996^{\frac{N_1}{2}} < \varepsilon$ при $n > n^{**}$.Звідки $\lim\limits_{n \to \infty} |f_\xi(\frac{t_n}{3})| = 0$.
II)Нехай послідовність (a_n) не має границі при $n \to \infty$.

Припустимо, що $L_{\frac{\xi}{3}} = b_0 > 0$. Тоді існує послідовність (t'_n) така, що
$\lim\limits_{n \to \infty} |f_{\frac{\xi}{3}}(t'_n)| = b_0$. Оскільки послідовність $(a'_n) = (\frac{t'_n}{2^{m_n+1}})$ обмежена, то з неї можна виділити збіжну підпослідовність (a'_{n_l}). Тоді $\lim\limits_{n \to \infty} |f_{\frac{\xi}{3}}(t'_{n_l})| = b_0$, що суперечить доведеному у випадку I) результату $\lim\limits_{n \to \infty} |f_{\frac{\xi}{3}}(t'_{n_l})| = 0$. □

3.Випадок однакової розподіленості.

Розглянемо випадкову величину $\xi^* = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi^*_k 2^{-k}$, де ξ^*_k– однаково дискретно розподілені незалежні випадкової величини, які набувають значень 0,1,2,3 з ймовірностями p_0, p_1, p_2, p_3 відповідно, тобто ξ^* є частковим випадком випадкової величини ξ за умов $p_{ik} = p_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$ $\forall k \in N$.

Теорема 4. *Для того, щоб характеристична функція випадкової величини ξ^* задовольняла умову*

$$L_\xi = 0,$$

необхідно та достатньо, щоб

$$(p_0 - p_2)^2 + (p_1 - p_3)^2 = 0$$

або

$$p_0 - p_1 + p_2 - p_3 = 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Якщо $L_{\xi^*} = 0$, то за теоремою 2

$$0 = \lim_{k \to \infty} M_k = (p_0 - p_1 + p_2 - p_3)((p_0 - p_2)^2 + (p_1 - p_3)^2).$$

Звідки

$$p_0 - p_1 + p_2 - p_3 = 0$$

або

$$(p_0 - p_2)^2 + (p_1 - p_3)^2 = 0.$$

Достатність. Якщо $(p_0-p_2)^2+(p_1-p_3)^2=0$, то $p_{0k}p_{2k}+p_{1k}p_{3k}=p_0^2+p_1^2\geq \geq\frac{(p_0+p_1)^2}{2}=\frac{1}{8}>0$. Отже, за теоремою 2 $L_{\xi^*}=0$.

Нехай $p_0-p_1+p_2-p_3=0$. Якщо $p_{0k}p_{2k}+p_{1k}p_{3k}=p_0p_2+p_1p_3=0$ і $p_{0k}p_{1k}+p_{1k}p_{2k}+ +p_{2k}p_{3k}=p_0p_1+p_1p_2+p_2p_3=0$, то $p_0=\frac{1}{2}=p_3$ (перша рівність виконується лише для наступних варіантів стохастичних векторів $(p_0;p_1;p_2;p_3)$: $(0;0;\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0;0)$, $(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2};0)$, $(\frac{1}{2};0;0;\frac{1}{2})$ для перших трьох з яких не виконується друга рівність) і за теоремою 3 $L_{\xi^*}=0$, у протилежному випадку $L_{\xi^*}=0$ за теоремою 2. □

Література

[1] *Гончаренко Я.В.* Асимптотичні властивості характеристичної функції випадкової величин из незалежними двійковими цифрами та згортки сингулярних розподілів // Наукові записки НПУ імені.М.П Драгоманова.Фізико-математичні науки, 2002. – №3. – С.376-390.

[2] *Гончаренко Я.В, Микитюк І.О.* Поведінка модуля характеристичної функції випадкової величини з незалежними s-адичними цифрами на нескінченності // Науковий часопис НПУ імені.М.П Драгоманова. Серія 1.Фізико-математичні науки, 2008. – №9.– С.121-128.

[3] *Лукач Е.* Характеристические функции. – М.: Наука, 1979. – 424с.
4 *Працьовитий М.В.* Розподіли сум випадкових степеневих рядів//Доп. НАН України. – 1996.– №5. – С.32-37.

[4] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів.–Київ: Вид-во НПУ імені М.П Драгоманова, 1998.– 296с.

[5] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения.– Киев: Наук.думка, 1992.– 2008с.

[6] *Albeverio S., Goncharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits //Random Oper. Stochastic Equations, 2007.–**15**,№1.– P.89-97.

[7] *Goncharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Topological and fractal properties of the convolution of two singular distributions of random variables having independent binary digits //Theor.Probability and Math.Statist, 2003.– №67. – P.11-22

[8] *Jessen B., Wintner A.* Distribution function and Riemann Zeta-function // Trans.Amer.Math ,1935.–Soc.38.– P.48-88.

[9] *Levy P.* Sur les series don't les termes sont des variables independantes // Studia math., 3,1931.– P.119-155.

[10] *Lyons R.* Seventy years of Rajchmann measures // J.Fourier Anal.Appl.,Spesial issue.– 1995.– P.363-377.