Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2009, № 10.— С. 28–39.

УДК 517.13

Про множину неповних сум знакододатних рядів з однією умовою однорідності та узагальнення двійкового зображення чисел

Н. О. Корсунь, М. В. Працьовитий
(Інститут математики НАН України,
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. Досліджуються абсолютно збіжні ряди $a_1+...+a_n+... = a_1+...+a_n+r_n$, які задовольняють наступну властивість однорідності:

$$a_k + a_{k+1} = r_{k+1} \Leftrightarrow a_{k+2} = \frac{1}{2}a_k, \quad k = 1, 2, ...$$

Доведено, що множина таких рядів утворює двовимірний лінійний простір. Знайдено вирази загального члену ряду і його залишків, доведено, що множина підсум ряду є відрізком, описано геометрію зображення чисел підсумами фіксованих рядів даного виду, зокрема, специфіку перекриттів циліндричних множин.

Abstract. We study absolutely convergent series $a_1 + ... + a_n + ... = a_1 + ... + a_n + r_n$ with the following property of homogeneity:

$$a_k + a_{k+1} = r_{k+1} \Leftrightarrow a_{k+2} = \frac{1}{2}a_k, \quad k = 1, 2, ...$$

We prove that the set of such series forms a two-dimensional linear space. We find expressions for the general term of series and its remainders, prove that the set of subsums of this series is a closed interval, describe the geometry of representation of numbers by the subsums of given series, in particular, the peculiarities of overlap of cylindrical sets are described.

1. Вступ

Сьогодні збіжні числові ряди широко використовуються в різних розділах математики в якості засобу моделювання, задання і дослідження різних математичних об'єктів, в першу чергу, тих, що мають "складну локальну будову". Це теорія фракталів (фрактальний аналіз та фрактальна геометрія) [**2**], нетрадиційні системи числення [**7**], [**8**], [**10**], [**12**], теорія неперервних недиференційовних функцій [**2**],

---

[**3**], [**2**], теорія сингулярних ймовірнісних мір [**2**], [**6**], [**2**], теорія динамічних систем з хаотичною поведінкою, теорія конфліктних взаємодій [**7**] та інші.

В усіх цих теоріях важливе значення мають властивості рядів, зокрема, "локальні". Слідуючи принципу "від простого до складного", широкого вжитку на даний момент набули ряди, що мають певні властивості "однорідності". Це співвідношення між членами та залишками ряду, рекурентні співвідношення для членів ряду тощо. Для деяких класів таких рядів були розв'язані задачі, що були конкретизацією проблем окремих теорій (див. наприклад, [**7**], [**15**], [**8**], [**2**]). Яскравим прикладом цього є розв'язання проблеми про тип розподілу симетричних згорток Бернуллі та їх узагальнень в окремих класах, яка в загальній постановці залишається відкритою ([**4**], [**2**]).

Разом з цим багато задач, які стосуються властивостей рядів, мають своє самостійне наукове значення. Продуктивними для розвитку теорії виявились поняття неповної суми (підсуми) ряду, множини неповних сум, циліндричної множини та інших, в термінах яких можна отримати відповіді на ряд цікавих загальноматематичних проблем, зокрема тих, що стосуються фрактальних властивостей математичних об'єктів [**15**].

Дана робота присвячена дослідженню геометричних і тополого-метричних властивостей збіжних знакододатних рядів, які володіють однією властивістю однорідності.

Нехай маємо знакододатний збіжний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s, \tag{1}$$

де $s_m = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k$ — послідовність часткових сум ряду даного ряду, а $r_m = \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$ — послідовність його залишків, $m = 1, 2, ...$

Нехай M — довільна підмножина множини натуральних чисел $\mathbf{N}$. Тоді вираз $\sum\limits_{n\in M} a_m$ називається *підрядом ряду* (1), а суму кожного підряду ряду (1) називається *неповною сумою ряду* (1). Іншими словами, будь-яка сума вигляду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k a_k$, де ε_k набувають значень 0 або 1, називається *неповною сумою ряду* (1).

Множину всіх неповних сум будемо позначати Δ^{Σ}. Зокрема, всі часткові суми і залишки ряду (1) входять у Δ^{Σ}, але не лише вони. Зауважимо, що $\Delta^{\Sigma} \subset [0, s]$.

Ми будемо накладати на члени ряду наступну умову однорідності:

$$a_k + a_{k+1} = r_{k+1} \Leftrightarrow a_{k+2} = \frac{1}{2} a_k, \quad k = 1, 2, ... \tag{2}$$

2. Лінійний простір рядів з даною умовою однорідності

Найпростішими прикладами абсолютно збіжних рядів з умовою однорідності (2) є ряди:

1) $\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2^2}+0+\frac{1}{2^3}+0+...=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2^k}+0);$

2) $\frac{3}{2}-1+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+...+\frac{3}{2^k}-\frac{2}{2^k}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{3}{2^k}-\frac{2}{2^k});$

3) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+...=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}).$

Теорема 1. *Для того, щоб ряд* (1) *задовольняв умову однорідності* (2)*, необхідно і достатньо, щоб його члени мали такий вигляд*

$$a_{2k-1}=\frac{a_1}{2^{k-1}},\quad a_{2k}=\frac{s-2a_1}{2^k}, \tag{3}$$

при цьому залишки ряду виражаються

$$r_{2k-1}=\frac{s-a_1}{2^{k-1}},\quad r_{2k}=\frac{s}{2^k},\quad k=1,2,3,.... \tag{4}$$

Доведення. Необхідність. Оскільки $a_2=r_1-r_2$, а з умови однорідності $r_2=a_1+a_2$, то $a_2=r_1-a_1-a_2$. Звідки

$$a_2=\frac{r_1-a_1}{2}=\frac{(s-a_1)-a_1}{2}=\frac{s-2a_1}{2}.$$

Аналогічно, $a_3=r_2-r_3=r_2-a_2-a_3$. Звідки

$$2a_3=(s-a_1-a_2)-a_2=s-a_1-2\frac{s-2a_1}{2},$$

а отже, $a_3=\frac{1}{2}a_1$.

Очевидно, що відповідні залишки будуть мати вигляд

$$r_1=s-a_1,\quad r_2=s-a_1-a_2=s-a_1-\frac{s-2a_1}{2}=\frac{s}{2}.$$

Оскільки умова однорідності (2) еквівалентна співвідношенню $a_k=\frac{a_{k-2}}{2}$, то формули (3) і (4) очевидним чином випливають з виразів другого і третього членів ряду.

Достатність. Нехай члени ряду і його залишки мають вигляд (3) і (4) відповідно. Доведемо, що для такого ряду виконується умова однорідності (2):

$$a_{2k-1}+a_{2k}=\frac{a_1}{2^{k-1}}+\frac{s-2a_1}{2^k}=\frac{s}{2^k}=r_{2k},$$

$$a_{2k}+a_{2k+1}=\frac{s-2a_1}{2^k}+\frac{a_1}{2^k}=\frac{s-a_1}{2^k}=r_{2k+1}.$$

□

НАСЛІДОК 1. *Якщо сума ряду* (1) *дорівнює 1, то для того щоб виконувалась умова однорідності* (2), *необхідно і достатньо, щоб члени ряду і відповідні залишки мали вигляд:*

$$a_{2k-1} = \frac{a_1}{2^{k-1}}, \qquad a_{2k} = \frac{1-2a_1}{2^k}, \quad r_{2k-1} = \frac{1-a_1}{2^{k-1}}, \quad r_{2k} = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, 3, ... \tag{5}$$

Нехай P_0 — множина всіх абсолютно збіжних рядів з дійсними членами, які задовольняють умову однорідності (2).

Теорема 2. *Множина P_0 разом з лінійними операціями (додавання та множення на скаляр) утворює двовимірний лінійний простір, нульовим елементом якого є тривіальний ряд $\overline{0} \equiv \sum 0$.*

ДОВЕДЕННЯ. Справді, абсолютно збіжні ряди утворюють лінійний простір, підпростором якого є ряди з умовою однорідності (2), оскільки лінійні операції дану умову зберігають.

Доведемо, що P_0 є двовимірним. Для цього покажемо, що елементи

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2^k} + 0) \equiv \overline{e_1} \quad i \quad 1 = \sum_{k=1}^{\infty}(0 + \frac{1}{2^k}) \equiv \overline{e_2}$$

є лінійно незалежними.

Справді, рівність $x\overline{e_1} + y\overline{e_2} = \overline{0}$, яка в силу теореми 1 рівносильна системі

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ 1x + 0y = 0, \end{cases}$$

має місце тоді і тільки тоді, коли $x = y = 0$, тобто $\overline{e_1}$ і $\overline{e_2}$ — лінійно незалежні.

Покажемо, що для довільного ряду $\overline{a} \equiv \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n = s$ існують такі дійсні λ_1 і λ_2, що виконується: $\overline{a} = \lambda_1\overline{e_1} + \lambda_2\overline{e_2}$.

В силу теореми 1 для довільних $k \in N$

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{2^{k-1}} = \lambda_1\dfrac{1}{2^k} + \lambda_2 0, \\ \dfrac{s-2a_1}{2^k} = \lambda_1 0 + \lambda_2\dfrac{1}{2^k}, \end{cases} \qquad \text{тобто} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 2a_1, \\ \lambda_2 = s - 2a_1. \end{cases}$$

Отже, впорядкована пара $(\overline{e_1}, \overline{e_2})$ є базисом простору P_0. □

Лема 1. *Впорядкована пара рядів з P_0*

$$\overline{a} \equiv \sum a_n = s_a \quad i \quad \overline{b} \equiv \sum b_n = s_b$$

утворює базис тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} s_a & s_b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{6}$$

Доведення. Враховуючи двовимірніть простору P_0, досить довести, що $\overline{a}$ і $\overline{b}$ лінійно незалежні, тобто рівність

$$x\overline{a} + y\overline{b} = \overline{0} \tag{7}$$

має місце тоді і тільки тоді, коли $x = y = 0$.

Рівність (7) в силу теореми 1 рівносильна системі

$$\begin{cases} xs_a + ys_b = 0, \\ xa_1 + yb_1 = 0, \\ x(s_a - 2a_1) + y(s_b - 2b_1) = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} xs_a + ys_b = 0, \\ xa_1 + yb_1 = 0. \end{cases}$$

Ця система має тривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконується (6). □

Зауваження 1. *З теореми 1 випливає, що кожен ряд з P_0 є сумою двох рядів виду*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1}{2^{k-1}} \quad i \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s - 2a_1}{2^k},$$

перший з яких належить одновимірному лінійному простору, а другий — двопараметричній сім'ї, один з параметрів якої встановлює зв'язок з першим підпростором.

В просторі P_0 означимо оператор φ, який називатимемо *оператором зсуву*, рівністю:

$$\varphi(\sum_{k=1}^{\infty} a_n) = \sum_{k=2}^{\infty} a_n.$$

Лема 2. *Елементи*

$$\overline{a} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_n = s \quad i \quad \varphi(\overline{a}) \equiv \sum_{k=2}^{\infty} a_n = r_1$$

є лінійно незалежними тоді і тільки тоді, коли

$$s^2 - 4a_1 s - 2a_1^2 \neq 0, \quad \textit{тобто} \quad \frac{s}{a_1} \neq 2 \pm \sqrt{2}.$$

Доведення. Нехай $\varphi(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_n$ і $\varphi(s) = r_1$, $A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$, $B = \varphi(A)$.

Згідно з лемою 1, A і B — лінійно незалежні тоді і тільки тоді, коли виконується

$$\begin{vmatrix} s & s - a_1 \\ a_1 & \dfrac{s - 2a_1}{2} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad s^2 - 4a_1 s - 2a_1^2 \neq 0.$$

Звідки

$$\frac{s}{a_1} \neq 2 \pm \sqrt{2}.$$

Лему доведено. □

3. Множина неповних сум знакододатного ряду з P_0

Теорема 3. *Якщо (1) — заданий знакододатний ряд з* P_0 *з сумою* s*, то для довільного* $x \in [0,s]$ *існує така послідовність* (γ_k),$\gamma_k \in \{0,1\}$*, що*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k (a_{2k-1} + a_{2k}).$$

Доведення. Нехай x — довільне число з $[0,s]$. Тоді $x = s\gamma$, де $\gamma \in [0,1]$,а отже,

$$\gamma = \frac{\gamma_1}{2} + \frac{\gamma_2}{2^2} + \frac{\gamma_3}{2^3} + ..., \text{де} \quad \gamma_k \in \{0,1\}.$$

Звідки

$$x = \frac{s\gamma_1}{2} + \frac{s\gamma_2}{2^2} + \frac{s\gamma_3}{2^3} + ...$$

Враховуючи другу з рівностей (4) і умову однорідності (2), отримуємо

$$x = \gamma_1 r_2 + \gamma_2 r_4 + \gamma_3 r_6 + ... + \gamma_k r_{2k} + ... =$$

$$= \gamma_1(a_1 + a_2) + \gamma_2(a_3 + a_4) + \gamma_3(a_5 + a_6) + ... + \gamma_k(a_{2k-1} + a_{2k}) + ...$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k (a_{2k-1} + a_{2k}).$$

Що і треба було довести. □

Наслідок 2. *Якщо* s *— сума заданого знакододатного ряду з простору* P_0*, то його множина неповних сум* Δ^{Σ} *є відрізком* $[0,s]$.

Зауваження 2. *Множина неповних сум ряду (1) з простору* P_0 *з сумою* s *є векторною (арифметичною) сумою множин неповних сум* $\Delta^{\Sigma_1} = [0, 2a_1]$ *і* $\Delta^{\Sigma_2} = [0, s - 2a_1]$ *рядів*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1}{2^{k-1}} \quad і \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s - 2a_1}{2^k}$$

відповідно.

Дане зауваження дає ще одне обгрунтування попереднього твердження.

4. Циліндричне зображення чисел

Нехай (1) — фіксований знакододатний ряд з простору P_0, $(c_1, c_2, ..., c_m)$—заданий впорядкований набір символів з множини $\{0,1\} = A$.

Циліндром рангу m із основою $c_1...c_m$, що відповідає ряду (1), називається множина $\Delta'_{c_1...c_m}$, яка складається з усіх неповних сум даного ряду вигляду

$$\sum_{n=1}^{m} c_n a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \quad \text{де} \quad \varepsilon_n \in A.$$

Циліндричним відрізком рангу m з основою $c_1...c_m$ називається відрізок

$$\Delta_{c_1...c_m} = [\inf \Delta'_{c_1...c_m}, \sup \Delta'_{c_1...c_m}] = \Big[\sum_{n=1}^{m} c_n a_n, r_m + \sum_{n=1}^{m} c_n a_n\Big].$$

Лема 3. *Для циліндричних множин (циліндрів і циліндричних відрізків) довільного знакододатного ряду з P_0 виконуються наступні властивості:*

1. $\Delta'_{c_1...c_m} = \Delta_{c_1...c_m}$;

2. $\Delta_{c_1...c_m} = \Delta_{c_1...c_m0} \cup \Delta_{c_1...c_m1}, \Delta'_{c_1...c_m} = \Delta'_{c_1...c_m0} \cup \Delta'_{c_1...c_m1}$;

3. $|\Delta_{c_1...c_m}| = r_m \to 0 \ (m \to \infty)$;

4. $\dfrac{|\Delta_{c_1...c_mc}|}{|\Delta_{c_1...c_m}|} = \begin{cases} 1 - a_1, & \textit{якщо} \quad m \ \textit{—парне}, \\ \dfrac{1}{2(1-a_1)}, & \textit{якщо} \quad m \ \textit{—непарне}; \end{cases}$

5. $\Delta_{c_1...c_m0} \cap \Delta_{c_1...c_m1} = [\sum\limits_{k=1}^{m} c_k a_k + a_{m+1}; \sum\limits_{k=1}^{m} c_k m_k + r_{m+1}]$;

6. $|\Delta_{c_1...c_m0} \cap \Delta_{c_1...c_m1}| = a_m$.

Безпосередньо з означень циліндричних множин і їх властивостей випливає, що для довільних послідовностей $\{c_k\}$, $c_k \in A$, мають місце включення

$$\Delta_{c_1} \supset \Delta_{c_1c_2} \supset \Delta_{c_1c_2c_3} \supset ... \supset \Delta_{c_1c_2...c_k} \supset ....$$

Більше того, існує єдине число $x \in [0, 1]$ таке, що

$$x = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1...c_m} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k. \tag{8}$$

Подання числа x у вигляді (8) називається *циліндричним.* Вираз (8) символічно записується $x = \Delta_{c_1...c_m...}$ і називається *циліндричним* зображенням числа x.

Лема 4. *Довільний циліндр k-ого рангу є об'єднанням двох неперекривних циліндрів $(k + 2)$-ого рангу, а саме:*

$$\Delta_{c_1...c_k} = \Delta_{c_1...c_k00} \cup \Delta_{c_1...c_k11}. \tag{9}$$

ДОВЕДЕННЯ. Очевидно, що початок циліндричного відрізка $\Delta_{c_1...c_k}$ співпадає з початком відрізка $\Delta_{c_1...c_k00}$, а кінець співпадає з кінцем циліндричного відрізка $\Delta_{c_1...c_k11}$.

Залишається показати, що кінець першого циліндричного відрізка співпадає з початком другого. З цією метою розглянемо різницю

$$\sup \Delta_{c_1...c_k00} - \inf \Delta_{c_1...c_k11} = \sum_{i=1}^{k} a_i c_i + r_{k+2} - \sum_{i=1}^{k} a_i c_i - a_{k+1} - a_{k+2} = 0,$$

що й вимагалось довести. ☐

НАСЛІДОК 3. *Множина неповних сум* $\Delta^{\Sigma} = [0, s]$ *довільного знакододатного ряду з простору* P_0 *є об'єднанням* $2k$ *попарно неперекривних циліндрів* $2k$*-ого рангу.*

Лема 5. *Нехай* $a_1 = \frac{1}{2^m}$, $m > 2$ *— фіксоване, тоді члени ряду з* P_0 *мають вигляд:*

$$a_{2k-1} = \frac{1}{2^{m+k-1}}, a_{2k} = \frac{2^{m-1}-1}{2^{k+m-1}}, \tag{10}$$

і виконується

$$\sum_{i=1}^{m-1} a_{2i-1} = a_{2(m-1)}. \tag{11}$$

ДОВЕДЕННЯ. Доданки, що стоять в лівій частині рівності (11), утворюють геометричну прогресію зі знаменником $\frac{1}{2}$, а тому:

$$\sum_{i=1}^{m-1} a_{2i-1} = \frac{\frac{1}{2^m}(1 - \frac{1}{2^{m-1}})}{\frac{1}{2}} = \frac{2^{m-1}-1}{2^{2m-2}} = a_{2(m-1)}.$$

□

НАСЛІДОК 4. *Для класу рядів* (10) *при фіксованому значенні* m *має місце наступна рівність:*

$$\Delta_{\underbrace{1010...10}_{2m-2}} = \Delta_{\underbrace{0000...01}_{2m-2}}.$$

НАСЛІДОК 5. *Для класу рядів* (10) *при фіксованому значенні* m *і довільному натуральному* s *має місце рівність:*

$$\sum_{i=s}^{s+k-2} a_{2i-1} = a_{2(s+k-2)}.$$

Лема 6. *Члени ряду (1) з умовою однорідності (2) утворюють монотонно незростаючу послідовність тоді і тільки тоді, коли* $a_1 \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$.

ДОВЕДЕННЯ. Враховуючи формули (3) отримаємо, що члени ряду (1) будуть утворювати незростаючу послідовність, якщо виконуватиметься система нерівностей:

$$\begin{cases} \dfrac{a_{2k-1}}{a_{2k}} \geq 1, \\ \dfrac{a_{2k}}{a_{2k+1}} \geq 1. \end{cases} \tag{12}$$

З системи (12) отримуємо $a_1 \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$. □

5. Один спеціальний підклас рядів

Виділимо в P_0 підклас знакододатних рядів, для яких існує таке натуральне число $m > 1$, що має місце рівність:

$$\Delta_0 \cap \Delta_1 = \Delta_{01} \cap \Delta_{10} = ... = \Delta_{\underbrace{01...1}_{m-1}} \cap \Delta_{\underbrace{10...0}_{m-1}} = \Delta_{\underbrace{01...1}_{m}} = \Delta_{\underbrace{10...0}_{m}}. \qquad (13)$$

Єдиність такого m очевидна. Прикладом ряду, що задовольняє умову (13) при $m = 5$ є ряд:

$$\frac{3}{7} + \frac{1}{14} + \frac{3}{14} + \frac{1}{28} + \frac{3}{28} + \frac{1}{56} + ...$$

Лема 7. *Якщо знакододатний ряд задовольняє умову*

$$\Delta_0 \cap \Delta_1 = \Delta_{01} \cap \Delta_{10} = ... = \Delta_{\underbrace{01...1}_{2k}} \cap \Delta_{\underbrace{10...0}_{2k}} = \Delta_{\underbrace{01...1}_{2k+1}} = \Delta_{\underbrace{10...0}_{2k+1}} \qquad (14)$$

і має суму 1, то

$$a_1 = \frac{2^k - 1}{2^{k+1} - 1}.$$

Доведення. Очевидно, що рівність (14) рівносильна рівності

$$\inf \Delta_{\underbrace{01...1}_{2k+1}} = \inf \Delta_{\underbrace{10...0}_{2k+1}},$$

яка, в силу наслідку 1, може бути переписана у вигляді:

$$\frac{1-2a_1}{2} + \frac{a_1}{2} + \frac{1-2a_1}{2^2} + \frac{a_1}{2^2} + ... + \frac{1-2a_1}{2^k} + \frac{a_1}{2^k} = a_1,$$

$$\frac{1-a_1}{2} + \frac{1-a_1}{2^2} + ... + \frac{1-a_1}{2^k} = a_1,$$

$$(1-a_1)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^k}) = a_1.$$

Скориставшись формулою суми n перших членів геометричної прогресії, отримаємо:

$$(1-a_1)(1 - \frac{1}{2^k}) = a_1, \quad (1-a_1)(2^k - 1) = 2^k a_1,$$

звідки виражаємо:

$$a_1 = \frac{2^k - 1}{2^{k+1} - 1},$$

що і треба було довести. □

Лема 8. *Якщо знакододатний ряд задовольняє умову*

$$\Delta_0 \cap \Delta_1 = \Delta_{01} \cap \Delta_{10} = ... = \Delta_{\underbrace{01...1}_{2k-1}} \cap \Delta_{\underbrace{10...0}_{2k-1}} = \Delta_{\underbrace{01...1}_{2k}} = \Delta_{\underbrace{10...0}_{2k}} \qquad (15)$$

і має суму 1, то:

$$a_1 = \frac{2^k - 1}{2^{k+1}}.$$

Доведення. Очевидно, що рівність (15) рівносильна рівності

$$\inf \Delta_{\underbrace{01...1}_{2k+1}} = \inf \Delta_{\underbrace{10...0}_{2k+1}},$$

яка, в силу наслідку 1, може бути переписана у вигляді:

$$\frac{1-2a_1}{2} + \frac{a_1}{2} + \frac{1-2a_1}{2^2} + \frac{a_1}{2^2} + \frac{1-2a_1}{2^3} + ... + \frac{a_1}{2^{k-1}} + \frac{1-2a_1}{2^k} = a_1.$$

Використавши властивість однорідності (2) членів ряду, отримаємо:

$$\frac{1-2a_1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^k} = a_1.$$

Згорнувши за формулою суми n перших членів геометричної прогресії, маємо:

$$\frac{1-2a_1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^{k-1}}) = a_1,$$

звідки $a_1 = \dfrac{2^k-1}{2^{k+1}}$. □

Оскільки $0 < \dfrac{2^n-1}{2^{n+1}-1} < \dfrac{1}{2}$, $0 < \dfrac{2^n-1}{2^{n+1}} < \dfrac{1}{2}$, то для всіх рангів $m > 1$ буде існувати таке значення параметра a_1, що рівність (15) буде виконуватись.

Розглянемо виділений підклас рядів, що задовольняють умову (14). Безпосередньо перевіркою можемо переконатися, що для $m = 2, 3$ ряди будуть монотонно незростаючими. Вже для четвертого рангу отримуємо немонотонний ряд. Дослідимо поведінку параметра a_1 при прямуванні рангу m у нескінченність відповідно при парних ($m = 2n$) і непарних ($m = 2n+1$) значеннях рангу. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^{n+1}-1} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2},$$

то при $m > 3$ $a_1 \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, а це означає, що відповідні ряди будуть немонотонними.

Лема 9. *Якщо для деякого фіксованого значення m і відповідного значення параметра a_1 виконується $\Delta_{\underbrace{10...0}_{m}} = \Delta_{\underbrace{01...1}_{m}}$, то для довільного натурального k і фіксованих $c_1, c_2, ..., c_{km}$ має місце рівність:*

$$\Delta_{c_1c_2...c_{km}\underbrace{10...0}_{m}} = \Delta_{c_1c_2...c_{km}\underbrace{01...1}_{m}}. \tag{16}$$

Доведення. Нехай для деякого фіксованого значення m і відповідного значення параметра a_1 виконується рівність:

$$\Delta_{\underbrace{10...0}_{m}} = \Delta_{\underbrace{01...1}_{m}}. \tag{17}$$

Покажемо, що для довільного натурального k має місце рівність (4).

$$\Delta_{c_1\ldots c_{km}\underbrace{10\ldots0}_{m}} = \sum_{i=1}^{km} c_i a_i + a_{km+1}, \quad \Delta_{c_1\ldots c_{km}\underbrace{01\ldots1}_{m}} = \sum_{i=1}^{km} c_i a_i + \sum_{i=km+2}^{(k+1)m} a_i.$$

Враховуючи, що $a_{k+2} = \dfrac{a_k}{2^k}$ і (3), отримаємо:

$$\Delta_{c_1\ldots c_{km}\underbrace{10\ldots0}_{m}} = \sum_{i=1}^{km} c_i a_i + \frac{1}{2^{km+1}} a_1 = \sum_{i=1}^{km} c_i a_i +$$

$$+\frac{1}{2^{km+1}} \sum_{i=2}^{m} a_i = \Delta_{c_1\ldots c_{km}\underbrace{01\ldots1}_{m}}.$$

□

Теорема 4. *Для довцільного фіксованого $m > 3$ для рядів, які задовольняють умову (13), має місце рівність циліндричних відрізків:*

$$\Delta_{c_1\underbrace{010\ldots0}_{m-1}} = \Delta_{c_1\underbrace{101\ldots1}_{m-1}}. \tag{18}$$

Доведення. Нехай $m = 2n$ — парне. Тоді a_1 і a_2 матимуть вигляд:

$$a_1 = \frac{2^n - 1}{2^{n+1}}, \qquad a_2 = \frac{1}{2} - a_1 = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Рівність (18) буде виконуватись тоді і тільки тоді, коли буде виконуватись

$$a_3 = a_2 + \sum_{i=4}^{2n} a_i.$$

Враховуючи умову однорідності і абсолютну збіжність ряду, маємо:

$$\underbrace{(a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n})}_{n} + \underbrace{(a_5 + a_7 + \ldots + a_{2n-1})}_{n-2} = \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots\right) +$$

$$+\left((2^n - 1)(\frac{1}{2^{n+3}} + \frac{1}{2^{n+4}} + \ldots)\right) = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}(1 - \frac{1}{2^n})}{\frac{1}{2}} + (2^n - 1)\frac{\frac{1}{2^{n+3}}(1 - \frac{1}{2^{n-2}})}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2(\frac{2^n - 1}{2^{2n+1}} + \frac{(2^n - 1)(2^{n-2} - 1)}{2^{2n+1}}) = \frac{2^n - 1}{2^{n+2}} = a_3.$$

Нехай $m = 2n + 1$ — непарне. Тоді a_1 і a_2 наберуть відповідно вигляду:

$$a_1 = \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1}, \quad a_2 = \frac{1}{2} - \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1} = \frac{1}{2(2^{n+1} - 1)}.$$

По аналогії з випадком парних значень m отримаємо:

$$\underbrace{a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}}_{n} + \underbrace{a_5 + a_7 + \ldots + a_{2n+1}}_{n-1} = \frac{1}{2^{n+1} - 1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) +$$

$$+\frac{2^n-1}{2^{n+1}-1}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2^{n+1}-1}\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{\frac{1}{2}}+\frac{2^n-1}{2^{n+1}-1}\frac{\frac{1}{2^2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{2^n-1}{2(2^{n+1}-1)}=a_3.$$

□

При виконанні умов теореми 4 (існуванні рівності циліндричних відрізків) виникає неоднозначність циліндричного зображення чисел і непроста геометрія перекриттів циліндричних множин.

Література

[1] *Albeverio S., Gontcharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal properties of the distributions of some class of random variables of the Jessen-Wintner type // Mathematische Nachrichten, Vol.279, 2006, No.15. — P. 1619-1633.

[2] *Daroczy Z., Katai I.* On differentiable additive functions // Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eotvosnominatae, sectio computatorica. — 1987. — tomus VII. — P.63-67.

[3] *Daroczy Z., Katai I.* Additive functions // Analysis mathematica. — 1986. — 12. — P.85-96.

[4] *Peres Y., Schlag W., Solomyak B.* Sixty years of Bernoulli convolutions // Fractal Geometry and Stochstics II /Progress in Probability. — 2000. — v.46. — P.39-65.

[5] *Pratsiovytyi M.V., Feschenko O.Y.* Topological-metrical and fractal properties of the distributions on the set of the incomplete sums of series of positive terms // Theory of stochastic Processes, **13(29)**, (2007), № 1-2, 205-224.

[6] *Salem R.* On some singular monotonic functions which are strictly increasing // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — 53. — P. 423-439.

[7] *Барановський О.М.* Деякі задачі метричної теорії чисел, представлених рядами Остроградського 1-го виду // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. — Київ: Вид-во НПУ імені Драгоманова. — 2002. — Вип. 3. — С.391-402.

[8] *Василенко Н.М.* Фібоначчієві подання дійсних чисел // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2005, №6. — С.261-271.

[9] *Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г.М.* Тополого-метричні і фрактальні властивості множини неповних сум знакододатного ряду та розподілів на ній // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова — 2005, №6. — С. 210-224.

[10] *Микитюк І.О., Працьовитий М.В.* Двійкова система числення з надлишковими цифрами і її відповідна метрична теорія чмсел // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2003. — Вип. 4. — С.270-290.

[11] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[12] *Торбін Г. М.* Фрактальні властивості розподілів випадкових величин з незалежними $Q*$-знаками // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — 2002. — Вип. 3. — С. 363-375.