Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2009, № 10.— С. 88–99.

УДК 511.72

Метричні властивості множини чисел, визначених умовами на їх розклади в ряд Енгеля

Б. І. Гетьман
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. Робота присвячена E-зображенню дійсних чисел (різницеве зображення чисел рядами Енгеля). В ній вивчаються властивості хвостових, циліндричних і напівциліндричних множин, а також множини чисел із заданою послідовністю фіксованих E-символів. Розглядаються застосування отриманих результатів до дослідження властивостей розподілу випадкової величини з незалежними E-сивмолами (цифрами).

Abstract. The paper is devoted to E-representation of real numbers (difference form of Engel representation of numbers). We study the properties of tail, cylindrical and semi-cylindrical sets as well as the set of numbers with given sequence of fixed E-symbols. We apply obtained results to study the properties of the random variable with independent E-symbols (digits).

Вступ

Існує кілька теорій дійсних чисел як нескінченних рядів, елементами яких є числа, обернені до натуральних. Серед них теорії зображення чисел знакозмінними рядами Остроградського 1-го [**6, 7**] та 2-го видів [**4**], Люрота [**11, 12**], знакододатними двійковими рядами [**2**] і рядами Сильвестера [**17**] та Люрота [**14, 2**]. Одна з них — це теорія дійсних чисел у формі рядів Енгеля [**9**]:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \ldots + \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_k} + \ldots,$$

де $a_k \geq 2$, $a_{k+1} \geq a_k$. Цей спосіб кодування (зображення) дійсних чисел є об'єктом самостійного наукового дослідження [**16, 10, 15, 13**], а також використовується для розвитку метричної, ймовірнісної і фрактальної теорій дійсних чисел [**8, 1**].

Теорема 1 ([**8**]). *Довільне число x з $(0,1]$ єдиним чином розкладається в ряд Енгеля, тобто існує послідовність натуральних чисел (q_k) така, що $q_{k+1} \geq q_k$ і*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q_1+1)(q_2+1)\dots(q_k+1)}. \tag{1}$$

Вираз (1) можна переписати [**8**] у вигляді

$$x = \frac{1}{2+g_1} + \frac{1}{(2+g_1)(2+g_1+g_2)} + \frac{1}{(2+g_1)(2+g_1+g_2)(2+g_1+g_2+g_3)} + \dots, \tag{2}$$

де $g_1 = q_1 - 1$, $g_{k+1} = q_{k+1} - q_k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Таким чином, для довільного числа $x \in (0,1]$ існує єдина послідовність чисел (g_n), $g_n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, така, що має місце рівність (2).

Означення 1. Вираз (2) скорочено позначатимемо $\Delta^E_{g_1 g_2 \dots g_n \dots}$ і називатимемо *E-зображенням* числа x. При цьому $g_k = g_k(x)$ називається *k-м символом* (*цифрою*) *E-зображення* або *k-м E-символом* числа x.

Оскільки кожне число має єдине E-зображення, то послідовність функцій $g_k = g_k(x)$, визначених на $(0,1]$, визначається однозначно.

Враховуючи єдиність розкладу (розвинення) числа $x \in (0,1]$ в ряд Енгеля, очевидним є наступне твердження.

Лема 1. *(1) Числа x і y є рівними тоді і тільки тоді, коли $g_i(x) = g_i(y)$ для будь-якого $i \in \mathbb{N}$.*

(2) Нерівність $x < y$ має місце тоді і тільки тоді, коли існує m таке, що $g_m(x) \neq g_m(y)$ і $g_j(x) = g_j(y)$ для будь-якого $j = \overline{1, m-1}$.

Доведення. Твердження 1 випливає з єдиності E-зображення числа $x \in (0,1]$. Твердження 2 — з ознаки порівняння збіжності знакододатних рядів. □

Тополого-метрична теорія дійсних чисел у формі рядів Енгеля вивчалася в роботах [**8, 1**]. В даній роботі ми вивчаємо властивості хвостових множин і множин чисел із заданою послідовністю фіксованих E-символів, які є суттєвими для розподілів випадкових величин з незалежними E-символами.

1. Циліндри та їх властивості

Означення 2. Нехай $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ — впорядкований набір невід'ємних цілих чисел. *Циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$* називається множина $\Delta^E_{c_1 c_2 \dots c_m}$ всіх точок півінтервалу $(0,1]$, які мають E-зображення виду $\Delta^E_{c_1 c_2 \dots c_m g_{m+1} g_{m+2} \dots}$, тобто таке E-зображення, перші m символів якого співпадають з c_1, c_2, ..., c_m відповідно.

З означень циліндра і E-зображення випливають наступні властивості циліндрів.

Властивість 1. *Для довільного набору цілих невід'ємних чисел* $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ *мають місце рівності:*

$$\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m} = \bigcup_{c=0}^{\infty} \Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m c},$$

$$\inf \Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(2+\sigma_1)(2+\sigma_2)\ldots(2+\sigma_k)} = \Delta^E_{c_1c_2\ldots c_{m-1}(c_m+1)0\ldots0\ldots} \equiv a,$$

$$\max \Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m} = a + \frac{1}{(2+\sigma_1)(2+\sigma_2)\ldots(2+\sigma_m)(1+\sigma_m)} = \Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m(0)} \equiv b,$$

де $\sigma_k \equiv c_1 + c_2 + \ldots + c_k$,

$$\max \Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m(c+1)} = \inf \Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m c};$$

$$\max \Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m(c+j)} < \inf \Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m c} \quad \text{при } j > 1.$$

Властивість 2. *Циліндр* $\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}$ *є півінтервалом* $(a, b]$.

Означення 3. Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — впорядкований набір невід'ємних цілих чисел. *Циліндричним інтервалом рангу* m *з основою* $c_1c_2\ldots c_m$ (символічно: $\nabla^E_{c_1c_2\ldots c_m}$) називається інтервал з тими ж кінцями, що й циліндр $\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}$.

Властивість 3. *Довжина циліндра* $\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}$ *обчислюється за формулою*

$$\left|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}\right| = \frac{1}{(2+\sigma_1)(2+\sigma_2)\ldots(2+\sigma_m)(1+\sigma_m)},$$

де $\sigma_k \equiv c_1 + c_2 + \ldots + c_k$.

Зауваження 1. *Найдовшим серед циліндрів рангу* m *є циліндр* $\Delta^E_{\underbrace{00\ldots0}_{m}}$, *довжина якого дорівнює* 2^{-m}.

Зауваження 2. *Циліндри різних рангів можуть мати однакову довжину. Наприклад,*

$$\left|\Delta^E_2\right| = \frac{1}{12} = \left|\Delta^E_{01}\right|.$$

Властивість 4. *Мають місце рівності:*

$$\lim_{c\to\infty} \left|\Delta^E_c\right| = 0, \qquad \lim_{m\to\infty} \left|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}\right| = 0$$

для довільної послідовності (c_m), *де* $c_m \in \mathbb{N}_0$.

Властивість 5. *Для довільної послідовності* (c_m), $c_m \in \mathbb{N}_0$, *виконується*

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m} \equiv \Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m\ldots} = x \in (0, 1].$$

Дана властивість є наслідком властивостей 1 та 4 і аксіоми Кантора.

Зауваження 3. *Останній факт свідчить про природність вибору символічного позначення E-зображення числа x.*

Властивість 6. *Якщо $m \le k$, то*

$$\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m} \bigcap \Delta^E_{d_1d_2\ldots d_k} = \begin{cases} \Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}, & \text{коли } c_i = d_i,\ i = \overline{1,m}; \\ \varnothing, & \text{коли } \exists\ c_i \ne d_i. \end{cases}$$

Властивість 7 (важливі метричні відношення). *Для будь-якого натурального числа s і набору натуральних чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ мають місце співвідношення:*

$$\frac{\left|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m s}\right|}{\left|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}\right|} = \frac{\sigma_m + 1}{(\sigma_m + s)(\sigma_m + s + 1)}, \tag{3}$$

$$\left|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m s 1}\right| = \frac{1}{\sigma_m + s}\left|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m(s+1)}\right|, \tag{4}$$

$$\left|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m s}\right| = \frac{1}{\sigma_m + s + 1}\sum_{j=s+1}^{\infty}\left|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m j}\right|, \tag{5}$$

де $\sigma_m \equiv c_1 + c_2 + \ldots + c_m$.

Доведення. Рівності (3) і (4) випливають безпосередньо з властивості 3. Доведемо рівність (5). Для цього виразимо

$$\left|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m s}\right| = A \cdot \frac{1}{(2 + \sigma_m + s)(1 + \sigma_m + s)}, \quad \text{де} \quad A = \frac{1}{(2 + \sigma_1)(2 + \sigma_2)\ldots(2 + \sigma_m)};$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=s+1}^{\infty}\left|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m j}\right| &= A\left[\frac{1}{(3 + \sigma_m + s)(2 + \sigma_m + s)} + \frac{1}{(4 + \sigma_m + s)(3 + \sigma_m + s)} + \ldots\right] = \\ &= A\left[\frac{1}{2 + \sigma_m + s} - \frac{1}{3 + \sigma_m + s} + \frac{1}{3 + \sigma_m + s} - \frac{1}{4 + \sigma_m + s} + \ldots\right] = \\ &= A \cdot \frac{1}{2 + \sigma_m + s} = (1 + \sigma_m + s) \cdot \left|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m s}\right|, \end{aligned}$$

що й треба було довести. □

2. Оператор зсуву символів EE-зображення числа

У множині $\mathcal{Z}^E_{(0,1]}$ всіх зображень дійсних чисел півінтервала $(0, 1]$ рядом Енгеля розглянемо оператор $\widehat{\varphi}$ зсуву цифр, означений рівністю

$$\widehat{\varphi}(\Delta^E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^E_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots},$$

який породжує функцію $\varphi\colon (0, 1] \to (0, 1]$.

Очевидно, що оператор $\widehat{\varphi}$ має зліченну множину інваріантних точок: $\Delta^E_{(c)}$, де $c \in \mathbb{N}_0$. Він має властивість сюр'єктивності, але не є ін'єктивним, оскільки прообразом зображення $\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_k\ldots}$ є точки $\Delta^E_{cc_1c_2\ldots c_k\ldots}$, де c пробігає множину $\mathbb{N}_0$.

n-кратне застосування оператора зсуву $\widehat{\varphi}$ приводить до оператора $\widehat{\varphi}^n$:

$$\widehat{\varphi}^n(\Delta^E_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^E_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots}.$$

Лема 2. *Функція φ є*

(1) спадною на кожному з циліндричних інтервалів 1-го рангу;

(2) неперервною у кожній точці циліндричного інтервалу 1-го рангу і неперервною зліва у правому кінці цього інтервалу.

Доведення. 1. Розглянемо дві довільні точки

$$x_1 = \Delta^E_{\alpha_1\alpha_2(x_1)\ldots\alpha_n(x_1)\ldots} \quad \text{та} \quad x_2 = \Delta^E_{\alpha_1\alpha_2(x_2)\ldots\alpha_n(x_2)\ldots}$$

з інтервалу $\Delta^E_{\alpha_1}$ такі, що $x_1 < x_2$. Оскільки згідно з лемою 1 їхні E-символи задовольняють умову $\alpha_2(x_1) > \alpha_2(x_2)$ і $\alpha_n(\varphi(x)) = \alpha_{n+1}(x)$, то $\varphi(x_1) > \varphi(x_2)$, що й доводить перше твердження.

2. Оскільки функція φ є монотонною і обмеженою на кожному інтервалі 1-го рангу, то вона має скінченні границі справа і зліва у кожній точці цього інтервалу. Крім того, вона має скінченну границю зліва у правому кінці інтервалу та скінченну границю справа у лівому його кінці.

Нехай $x = \Delta^E_{\alpha_1\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}$ — довільна ірраціональна точка інтервалу $\Delta^E_{\alpha_1}$, а (x_k) — довільна послідовність точок x_k, що $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.

Легко довести, що $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ рівносильно тому, що $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = \infty$, де m_k — найменше натуральне число, для якого $\alpha_{m_k}(x_k) \neq \alpha_{m_k}(x)$. Справді, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ рівносильно тому, що для довільного $C > 0$ існує $m_k > C$ і відрізок m_k-го рангу $\Delta^E_{\alpha_1\alpha_2(x)\ldots\alpha_{m_k}(x)}$, який містить всі x_k, починаючи з деякого.

Тому з рівностей $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ і $\alpha_n(\varphi(x)) = \alpha_{n+1}(x)$ випливає, що

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi(x),$$

що й доводить неперервність функції φ в точці x.

Нехай тепер $x = \Delta^E_{\alpha_1\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}$ — довільна раціональна точка інтервалу $\Delta^E_{\alpha_1}$ і нехай спочатку n — непарне число.

Розглянемо послідовність (x'_k), збіжну до x і $x'_k < x$, такого вигляду

$$x'_k = \Delta^E_{\alpha_1\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)k}.$$

Очевидно, що $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(x'_k) = \varphi(x)$, тобто функція φ є неперервною зліва у точці x.

Розглянемо послідовність (x''_k), збіжну до x і $x''_k > x$, такого вигляду

$$x''_k = \Delta^E_{\alpha_1\alpha_2(x)\ldots(\alpha_n(x)-1)1k}.$$

Очевидно, що $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(x''_k) = \varphi(x)$, тобто функція φ є неперервною справа у точці x.

Аналогічно можна довести неперервність функції φ у довільній раціональній точці $x \in \Delta^E_{\alpha_1}$ у випадку парного n, а також його неперервність зліва у точці $\Delta^E_{\alpha_1}$. □

3. Хвостові множини

У множині $\mathcal{Z}^E_{(0,1]}$ всіх E-зображень чисел $(0,1]$ введемо бінарне відношення еквівалентності «мати однаковий хвіст» (символічно:).

Означення 4. Будемо говорити, що два E-зображення

$$\Delta^E_{\alpha_1\ldots\alpha_m\ldots} \quad \text{і} \quad \Delta^E_{\beta_1\ldots\beta_m\ldots}$$

мають однаковий хвіст або *перебувають у відношенні* , якщо існують натуральні числа m і k такі, що $\alpha_{m+j} = \beta_{k+j}$ для будь-якого $j \in \mathbb{N}$.

Очевидно, що відношення є відношенням еквівалентності (тобто має властивості рефлексивності, симетричності та транзитивності) і розбиває множину, на якій воно задане, на класи еквівалентності. Кожен з класів еквівалентності називатимемо *хвостовою множиною*. Кожна хвостова множина однозначно визначається довільним своїм елементом (представником).

Будемо говорити, що два числа x і y мають однаковий хвіст (або перебувають у відношенні), якщо їх E-зображення перебувають у відношенні . Символічно: xy.

Лема 3. *Кожна хвостова множина є зліченною, щільною в* $(0,1]$ *множиною.*

Доведення. Нехай H — довільний клас еквівалентності, $x_0 = \Delta^E_{c_1\ldots c_k\ldots}$ — його представник. Тоді, очевидно, що для довільного натурального m існує множина H_m таких чисел, що

$$\alpha_{k+j}(x_0) = \alpha_{m+j}(x_0) \quad \text{для довільного } j \in \mathbb{N},\ k = 1,\ 2,\ \ldots .$$

Тоді $H = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} H_m$. Множина H, будучи зліченним об'єднанням зліченних множин, є множиною зліченною [**3**].

Доведемо тепер, що H — щільна в $(0,1]$. Оскільки належність числа x до множини H не залежить від довільної скінченної кількості символів його E-зображення, то в кожному з циліндрів довільного рангу m існує точка множини H. Отже, H є всюди щільною в $(0,1]$ множиною. □

Теорема 2. *Фактор-множина* $G \equiv (0,1]/$ *є континуальною.*

Доведення. Скористаємося методом доведення від супротивного. Припустимо, що G є зліченною. Тоді, згідно з лемою 3, півінтервал $(0,1]$ є зліченним об'єднанням зліченних множин. Але добре відомо, що остання множина є зліченною, а півінтервал $(0,1]$ є континуальною множиною. Отримана суперечність доводить теорему. □

4. Критерій дискретності розподілу випадкової велчини з незалежними EЕ-символами

Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2+\eta_1)(2+\eta_1+\eta_2)\dots(2+\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_k)} = \Delta^E_{\eta_1\eta_2\dots\eta_k\dots}, \tag{6}$$

E-символи η_k якої є незалежними випадковими величинами, що набувають значень 0, 1, …, m, … з ймовірностями p_{0k}, p_{1k}, …, p_{mk}, … відповідно, тобто

$$\mathsf{P}\{\eta_k = m\} = p_{mk} \quad \text{і} \quad p_{mk} \geq 0, \quad \sum_{m=1}^{\infty} p_{mk} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3. *Випадкова величина ξ має дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли*

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max_m \{p_{mk}\} > 0. \tag{7}$$

Причому у випадку дискретності атомами розподілу випадкової величини ξ є ті і тільки ті $x \in [0,1]$, які відрізняються від

$$x_0 = \Delta^E_{g'_1 g'_2 \dots g'_k \dots}, \quad \text{де} \quad p_{g'_k k} = \max_m \{p_{mk}\} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

лише скінченною кількістю E-символів $g_k(x)$, для яких $p_{g_k(x)k} > 0$.

Доведення. Зауважимо, що x є атомом розподілу ξ, якщо

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_{g_k(x)k} > 0.$$

Необхідність. Нехай випадкова величина ξ має дискретний розподіл і x — один з атомів розподілу. Припустимо, що нескінченний добуток в (7) розбігається до 0. Тоді

$$\mathsf{P}\{\xi = x\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{g_k(x)k} \leq \prod_{k=1}^{\infty} \max_m \{p_{mk}\} = 0,$$

але це суперечить тому, що x — атом розподілу. Отримана суперечність доводить необхідність.

Достатність. Нехай виконується (7). Тоді, очевидно, що x_0 і всі x, які відрізняються від нього лише скінченною кількістю E-символів $g_k(x)$, для яких $p_{g_k(x)k} > 0$, є атомами розподілу ξ. Покажемо, що ξ має дискретний розподіл.

Нехай $x_j^{(m)} = \Delta^E_{g_1 g_2 \dots g_m g'_{m+1} \dots g'_k \dots}$ — довільний атом з тих, E-символи яких збігаються з E-символами x_0, починаючи з $(m+1)$-го. Тоді

$$\mathsf{P}\left\{\xi = x_j^{(m)}\right\} = p_{g_1 1} p_{g_2 2} \dots p_{g_m m} \prod_{k=m+1}^{\infty} p_{g'_k(x)k},$$

$$\mathsf{P}\left\{\xi \in \left\{x_j^{(m)}\right\}\right\} = \sum_{\substack{g_1\,:\,p_{g_1 1}>0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ g_m:\,p_{g_m m}>0}} \left(p_{g_1 1} p_{g_2 2} \dots p_{g_m m} \prod_{k=m+1}^{\infty} p_{g'_k(x)k}\right) =$$

$$= \sum_{g_1\,:\,p_{g_1 1}>0} p_{g_1 1} \dots \sum_{g_m\,:\,p_{g_m m}>0} p_{g_m m} \prod_{k=m+1}^{\infty} p_{g'_k(x)k} = \prod_{k=m+1}^{\infty} p_{g'_k(x)k},$$

оскільки кожна з отриманих сум дорівнює 1.

Множина $D = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \left\{x_j^{(m)}\right\}$ — не більш ніж зліченна, оскільки вона є зліченним об'єднанням не більш ніж зліченних множин. Оскільки $\left\{x_j^{(m)}\right\} \subseteq \left\{x_j^{(m+1)}\right\}$, то за властивістю неперервності ймовірності

$$\mathsf{P}\left\{\xi \in D\right\} = \lim_{m\to\infty} \mathsf{P}\left\{\xi \in \left\{x_j^{(m)}\right\}\right\} = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=m+1}^{\infty} p_{g'_k k} = 1,$$

остання границя дорівнює 1 за властивостями збіжних нескінченних добутків.

Отже, $\mathsf{P}\left\{\xi \in D\right\} = 1$, тобто випадкова величина ξ зосереджена на не більш ніж зліченній множині і має, таким чином, дискретний розподіл за означенням. □

Наслідок 1. *Випадкова величина ξ має неперервний розподіл тоді і тільки тоді, коли нескінченний добуток в* (7) *дорівнює* 0.

5. Напівциліндри

Нехай c — фіксоване ціле невід'ємне число, а k — число натуральне. Розглянемо множину Δ_c^k всіх чисел $x \in (0,1]$, які можна подати у вигляді (2) так, що $g_k(x) = c$, тобто

$$\Delta_c^k \equiv \left\{x : g_k(x) = c\right\}.$$

Очевидно, що при $k = 1$ множина Δ_c^k є циліндром E-зображення 1-го рангу Δ_c^E і згідно з властивістю 3

$$\left|\Delta_c^1\right| = \left|\Delta_c^E\right| = \frac{1}{(2+c)(1+c)}.$$

Якщо $k = 2$, то згідно з означенням множини Δ_c^k і властивостями циліндрів

$$\Delta_c^2 = \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} \Delta_{ic}^E.$$

Тому для міри Лебега

$$\lambda(\Delta_c^2) = \sum_{i=0}^{\infty} \left|\Delta_{ic}^E\right| = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2+i)(2+i+c)(1+i+c)}.$$

При $c=0$ маємо

$$\lambda(\Delta_0^2)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2+i)(2+i)(1+i)}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2+i}\left(\frac{1}{1+i}-\frac{1}{2+i}\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2+i)(1+i)}-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2+i)^2}=2-\zeta(2),$$

де $\zeta(v)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^v}$ — функція Рімана.

При $c=1$ отримуємо

$$\lambda(\Delta_1^2)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2+i)(2+i+1)(1+i+1)}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2+i}\left(\frac{1}{1+i+1}-\frac{1}{2+i+1}\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2+i)^2}-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2+i)(2+i+1)}=\zeta(2)-\frac{3}{2}.$$

При $c>1$ отримуємо

$$\lambda(\Delta_c^2)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2+i)(1+i+c)}-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2+i)(2+i+c)}$$

і

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2+i)(2+i+c-1)}=\frac{1}{c-1}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2+i}-\frac{1}{2+i+c-1}\right)=\frac{1}{c-1}\sum_{i=2}^{c}\frac{1}{i},$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2+i)(2+i+c)}=\frac{1}{c}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2+i}-\frac{1}{2+i+c}\right)=\frac{1}{c}\sum_{i=2}^{c+1}\frac{1}{i}.$$

Отже,

$$\lambda(\Delta_c^2)=\frac{1}{c-1}\sum_{i=2}^{c}\frac{1}{i}-\frac{1}{c}\sum_{i=2}^{c+1}\frac{1}{i}.$$

Для довільного $k>2$ міра Лебега множини Δ_c^k визначається рівністю

$$\lambda(\Delta_c^k)=\sum_{i_1=0}^{\infty}\dots\sum_{i_{k-1}=0}^{\infty}\left|\Delta^E_{i_1\dots i_{k-1}c}\right|.$$

Дамо її оцінку.

Лема 4. *Для довільних* $k\in\mathbb{N}$ *і* $c\in\mathbb{N}_0$ *має місце нерівність*

$$\lambda(\Delta_c^k)\le\frac{1}{2\cdot(2c+1)}.$$

Доведення. Оскільки при $k\ge 1$

$$\Delta_c^k=\bigcup_{i_1\in\mathbb{N}_0}\dots\bigcup_{i_{k-1}\in\mathbb{N}_0}\Delta^E_{i_1\dots i_{k-1}c},$$

то

$$\lambda(\Delta_c^k) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_{k-1}=0}^{\infty} \left|\Delta^E_{i_1 \ldots i_{k-1} c}\right| \leq \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_{k-1}=0}^{\infty} \frac{1}{2\cdot(2c+1)} \cdot \left|\Delta^E_{i_1 \ldots i_{k-1}}\right| =$$
$$= \frac{1}{2\cdot(2c+1)} \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_{k-1}=0}^{\infty} \left|\Delta^E_{i_1 \ldots i_{k-1}}\right| = \frac{1}{2\cdot(2c+1)}.$$

Остання рівність випливає з того, що

$$\sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_{k-1}=0}^{\infty} \left|\Delta^E_{i_1 \ldots i_{k-1}}\right| = 1. \qquad \square$$

Означення 5. Нехай (c_n) — фіксована послідовність цілих невід'ємних чисел, (k_n) — фіксована зростаюча послідовність натуральних чисел. *Напівциліндром* з основою

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{pmatrix}$$

називається множина

$$\Delta^{k_1 k_2 \ldots k_n}_{c_1 c_2 \ldots c_n} \equiv \left\{x : x = \Delta^E_{g_1 g_2 \ldots g_k \ldots},\ g_{k_1} = c_1, g_{k_2} = c_2, \ldots, g_{k_n} = c_n\right\}.$$

Очевидно, що коли $k_1 = 1$, $k_{i+1} - k_i = 1$ для всіх $i = \overline{1, n-1}$, то напівциліндр $\Delta^{k_1 k_2 \ldots k_n}_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ є циліндром n-го рангу $\Delta^E_{c_1 c_2 \ldots c_n}$.

6. Множина чисел із заданою послідовністю фіксованих EЕ-символів

Нехай (c_n) — фіксована послідовність цілих невід'ємних чисел, (k_n) — фіксована зростаюча послідовність натуральних чисел. Розглядається множина

$$\Delta^{k_1 k_2 \ldots k_n \ldots}_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots} = \left\{x : x = \Delta^E_{g_1 g_2 \ldots g_k \ldots},\ g_{k_1}(x) = c_1, g_{k_2}(x) = c_2, \ldots, g_{k_n}(x) = c_n, \ldots\right\}.$$

Теорема 4. *Нехай $d_n := k_{n+1} - k_n$.*

1. Якщо $d_n = 1$ для всіх n і $k_1 = 1$, то множина $\Delta^{k_1 k_2 \ldots k_n \ldots}_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}$ складається з однієї точки $\Delta^E_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}$. Якщо нерівність $d_n > 1$ виконується для скінченної множини номерів n, то вона є зліченною. Якщо $d_n > 1$ для нескінченної множини номерів n, то вона є континуальною.

2. Міра Лебега множини $\Delta^{k_1 k_2 \ldots k_n \ldots}_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}$ дорівнює 0.

Доведення. 1. Якщо $d_n = 1$, починаючи з деякого номера n_0, то множина $\Delta^{k_1 k_2 \ldots k_n \ldots}_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}$ є зліченною, оскільки лише на скінченній множині перших $n_0 - 1$ місць є можливість вибирати E-елементи з не більш ніж зліченної множини. Якщо $d_n > 1$ для нескінченної множини номерів n, то множина $\Delta^{k_1 k_2 \ldots k_n \ldots}_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}$ є континуальною, оскільки можна встановити взаємно однозначну відповідність f між цією множиною і півінтервалом $(0,1]$, поклавши

$$f(\Delta^E_{g_1 g_2 \dots g_n \dots}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n},$$

де $\alpha_n = 0$, якщо $d_n = 1$, і $\alpha_n = 1$, якщо $d_n > 1$.

2. Якщо множина $\Delta^{k_1 k_2 \dots k_n \dots}_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}$ є не більш ніж зліченною, то її міра Лебега дорівнює 0 за властивостями міри Лебега. Тому досить довести твердження для випадку, коли вона є континуальною.

Нехай F_k — замикання об'єднання всіх циліндричних множин рангу k, внутрішність яких містить точки множини $\Delta^{k_1 k_2 \dots k_n \dots}_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}$. Оскільки $F_{k_n} \supset F_{k_{n+1}}$ і

$$\Delta^{k_1 k_2 \dots k_n \dots}_{c_1 c_2 \dots c_n \dots} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{k_n},$$

то за властивістю неперервності міри Лебега

$$\lambda\big(\Delta^{k_1 k_2 \dots k_n \dots}_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}\big) = \lim_{n\to\infty} \lambda(F_{k_n}).$$

З основного метричного відношення випливає, що

$$\left|\Delta^E_{c_1 c_2 \dots c_{k+1}}\right| \leq \frac{1}{2} \left|\Delta^E_{c_1 c_2 \dots c_k}\right|.$$

Тому

$$\lambda(F_{k_{n+1}}) = \sum_{i_1\in\mathbb{N}} \sum_{i_2\in\mathbb{N}} \cdots \sum_{i_{k_{n+1}-1}\in\mathbb{N}} \left|\Delta^E_{i_1 \dots i_{k_1-1} c_1 i_{k_1+1} \dots i_{k_n-1} c_n i_{k_n+1} \dots i_{k_{n+1}-1} c_{n+1}}\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2} \sum_{i_1\in\mathbb{N}} \sum_{i_2\in\mathbb{N}} \cdots \sum_{i_{k_{n+1}-1}\in\mathbb{N}} \left|\Delta^E_{i_1 \dots i_{k_1-1} c_1 i_{k_1+1} \dots i_{k_n-1} c_n i_{k_n+1} \dots i_{k_{n+1}-1}}\right| = \frac{1}{2} \lambda(F_{k_{n+1}-1}).$$

З означення множини $\Delta^{k_1 k_2 \dots k_n \dots}_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}$ випливає, що

$$F_{k_n} = F_{k_n+1} = F_{k_n+2} = \ldots = F_{k_{n+1}-1},$$

а отже, $\lambda(F_{k_{n+1}}) \leq \dfrac{1}{2}\lambda(F_{k_n})$ для довільного натурального n. Звідси

$$\lambda(F_{k_{n+1}}) \leq \frac{1}{2^n}\lambda(F_{k_1}) \to 0 \quad (n \to 0),$$

а отже, $\lambda\big(\Delta^{k_1 k_2 \dots k_n \dots}_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}\big) = 0$. □

Наслідок 2. *Спектр розподілу (множина точок росту функції розподілу) випадкової величини ξ, означеної рівністю* (6), *є замиканням множини $\Delta^{k_1 k_2 \dots k_n \dots}_{c_1 c_2 \dots c_n \dots}$, якщо $p_{c_n k_n} = 1$ для довільного $n \in \mathbb{N}$ і $p_{sj} \neq 0$ при $j \notin \{k_n\}$.*

Наслідок 3. *Випадкова величина ξ має сингулярний розподіл канторівського типу, якщо виконуються умови наслідку 2 і $M = 0$.*

Література

[1] *Гетьман Б. І.* Зображення чисел s-адичними рядами Енгеля // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. — 2008. — № 9. — С. 212–224. — Доступний за адресою http://fmi.npu.edu.ua/images/files/publications/naukchasopys1/nz2008-9.pdf.

[2] *Жихарева І. Ю., Працьовитий М. В.* Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи метричної теорії // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. — 2008. — № 9. — С. 200–211. — Доступний за адресою http://fmi.npu.edu.ua/images/files/publications/naukchasopys1/nz2008-9.pdf.

[3] *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — Москва: Наука, 1974. — 480 с.

[4] *Працьовита І. М.* Про розклади чисел у знакозмінні s-адичні ряди і ряди Остроградського 1-та 2-го видів // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 7. — С. 958–968.

[5] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[6] *Працьовитий М. В., Барановський О. М.* Властивості розподілів випадкових величин з незалежними різницями послідовних елементів ряду Остроградського // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2004. — № 70. — С. 131–143.

[7] *Працьовитий М. В., Барановський О. М.* Про міру Лебега деяких множин чисел, визначених властивостями їх розкладу в ряд Остроградського // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. — 2004. — № 5. — С. 217–227.

[8] *Працьовитий М. В., Гетьман Б. І.* Ряди Енгеля та їх застосування // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. — 2006. — № 7. — С. 105–116.

[9] *Engel F.* Entwicklung der Zahlen nach Stammbrüchen // Verhandl. d. 52 Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Marburg vom 29. September bis 3. Oktober 1913. — Leipzig, 1914. — S. 190–191.

[10] *Erdős P., Rényi A., Szüsz P.* On Engel's and Sylvester's series // Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Math. — 1958. — Vol. 1. — P. 7–32.

[11] *Kalpazidou S., Knopfmacher A., Knopfmacher J.* Lüroth-type alternating series representations for real numbers // Acta Arith. — 1990. — Vol. 55, no. 4. — P. 311–322.

[12] *Kalpazidou S., Knopfmacher A., Knopfmacher J.* Metric properties of alternating Lüroth series // Portugal. Math. — 1991. — Vol. 48, no. 3. — P. 319–325. — Available at http://purl.pt/3268.

[13] *Laohakosol V., Chaichana T., Rattanamoong J., Rompurk Kanasri N.* Engel series and Cohen–Egyptian fraction expansions // Internat. J. Math. Math. Sci. — 2009. — P. 1–15. — 10.1155/2009/865705.

[14] *Lüroth J.* Ueber eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reihe // Math. Ann. — 1883. — Bd. 21, H. 3. — S. 411–423. — 10.1007/BF01443883, http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?GDZPPN002247364.

[15] *Rényi A.* A new approach to the theory of Engel's series // Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Math. — 1962. — Vol. 5. — P. 25–32.

[16] *Sierpiński W.* Sur quelques algorithmes pour développer les nombres réels en séries // Sierpiński W. Oeuvres choisies. — Warszawa: PWN, 1974. — t. 1: Bibliographie, théorie des nombres et analyse mathématique. — P. 236–254.

[17] *Sylvester J. J.* On a point in the theory of vulgar fractions // Amer. J. Math. — 1880. — Vol. 3, no. 4. — P. 332–335. — 10.2307/2369261.