Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова.— 2008, № 9.— С. 48–65.

УДК 517.9

Двоточкова крайова задача для вироджених сингулярно збурених лінійних систем диференціальних рівнянь

М. Б. Віра
(Ніжинський державний університет імені М. Гоголя)

Анотація. Запропоновано алгоритм побудови асимптотичного розв'язку двоточкової крайової задачі для сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженнями.

Abstract. The algorithm of building of the asymptotic solution of two-point boundary-value problem for the degenerated singular perturbed linear systems of differential equations is proposed.

Розглянемо крайову задачу

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$Mx(0,\varepsilon) + Nx(1,\varepsilon) = d, \tag{2}$$

де $x(t,\varepsilon)$ – шуканий $n-$вимірний вектор, $t \in [0;1]$; $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]-$ малий параметр, $h \in N$; $A(t,\varepsilon), B(t)$ - $(n \times n)-$матриці, d – $p-$вимірний вектор-стовпець, $f(t,\varepsilon)$ – $n-$вимірний вектор-стовпець; M, N – матриці зі сталими елементами розмірністю $(p \times n)$.

Нехай виконуються наступні умови:

1) матриця $A(t,\varepsilon)$ і вектор $f(t,\varepsilon)$ допускають на відрізку $[0;1]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями параметра ε:

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t); f(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(t); \tag{3}$$

2) коефіцієнти $A_k(t), f_k(t)$ розвинень (3) і матриця $B(t)$ нескінченно диференційовані на відрізку $[0;1]$;

3)$\det B(t) = 0, \forall t \in [0;1]$;

4)в'язка матриць

$$A_0(t) - \lambda B(t) \tag{4}$$

має лише прості елементарні дільники, а саме: $n-1$ скінченних елементарних дільників $\lambda-\lambda_1(t),...,\lambda-\lambda_{n-1}(t)$ і один нескінченний.

Крайові задачі типу (1),(2) для випадку $B(t)=E$, де E - одинична матриця, досліджувались у роботах [1-3]. Зокрема в [1] для побудови асимптотики розв'язків застосовувався метод регуляризації, а в [2], [3] - метод примежових функцій. В монографії [4] здійснена класифікація крайових задач з нетеровою лінійною частиною, в залежності від рангу крайової задачі (критичний і некритичний випадок), визначені умови розв'язності і структура розв'язку для кожного з випадків.

У даній статті вивчається можливість побудови асимптотичного розв'язку крайової задачі (1),(2) з використанням результатів асимптотичного аналізу загального розв'язку системи (1), здійсненого в роботах [5], [6]. Слід зазначити, що задача (1), (2) з тотожно виродженою матрицею при похідній іншими авторами не розглядалась.

Будемо вважати, що в'язка матриць (4) є регулярною [7], і при всіх $t\in[0;1]$ зберігається її кронекерова структура. Тоді [6, с.32] матриця $A_0(t)$ матиме $n-1$ власних векторів $\varphi_i(t),\ i=\overline{1,n-1}$ відносно матриці $B(t)$, що відповідають власним значенням $\lambda_i(t)$, $i=\overline{1,n-1}$, а матриця $B(t)$ - один власний вектор $\widetilde{\varphi}(t)$, який відповідає її нульовому власному значенню. Якщо $\psi_i(t)$, $i=\overline{1,n-1}$ – нулі матриць $(A_0-\lambda_iB)^*$, а $\widetilde{\psi}(t)$ - нуль матриці $B^*(t)$, то їх можна визначити так, щоб виконувалися співвідношення

$$(B\varphi_i,\psi_i)=1, i=\overline{1,n-1}, \tag{5}$$
$$(A_0\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi})=1.$$

Будемо вважати, що вектори $\psi_i(t)$, $i=\overline{1,n-1}$, $\widetilde{\psi}(t)$ визначено саме так. При цьому з нескінченної диференційовності матриць $A_0(t)$, $B(t)$ випливає нескінченна диференційовність скалярних функцій $\lambda_i(t)$, $i=\overline{1,n-1}$ і вектор-функцій $\varphi_i(t)$, $\widetilde{\varphi}(t)$, $\psi_i(t)$, $\widetilde{\psi}(t)$, $i=\overline{1,n-1}$ [6, с.53].

Дослідимо асимптотику розв'язку крайової задачі при $p=n-1$.

Виходячи зі структури загального асимптотичного розв'язку системи (1), побудованого в [5], [6] розв'язок крайової задачі (1), (2) будемо шукати у вигляді

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n-1}u_i(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_{\alpha_i}^{t}\lambda_i(t,\varepsilon)dt)+\widetilde{v}(t,\varepsilon), \tag{6}$$

де α_i, $i=\overline{1,n-1}$ - числа, які буде визначено нижче; $u_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$; $\widetilde{v}(t,\varepsilon)$ – n- вимірні вектор-функції, $\lambda_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$ – скалярні функції, що зображаються формальними розвиненнями за степенями малого параметра:

$$u_i(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k^{(i)}(t), \lambda_i(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\lambda_k^{(i)}(t), i=\overline{1,n-1}, \tag{7}$$

$$\widetilde{v}(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\widetilde{v}_k(t). \tag{8}$$

Покажемо, що коефіцієнти розвинень (7), (8) можна визначити так, щоб вектор (6) формально задовольняв систему (1) та крайову умову (2). Підставивши вектор (6) у систему (1) і прирівнявши вирази при однакових експонентах та вирази без експонент, маємо

$$\varepsilon^h B(t)(u_s(t,\varepsilon))'+\lambda_s(t,\varepsilon)B(t)u_s(t,\varepsilon)=A(t,\varepsilon)u_s(t,\varepsilon),s=\overline{1,n-1}; \tag{9}$$

$$\varepsilon^h B(t)(\widetilde{v}(t,\varepsilon))'=A(t,\varepsilon)\widetilde{v}(t,\varepsilon)+f(t,\varepsilon). \tag{10}$$

Кожне з цих рівнянь розв'яжемо методом із [8]. Врахувавши розвинення (7) та прирівнявши в (9) коефіцієнти при однакових степенях ε, дістанемо

$$(A_0(t)-\lambda_0^{(s)}(t)B(t))u_0^{(s)}(t)=0, \tag{11}$$

$$(A_0(t)-\lambda_0^{(s)}(t)B(t))u_k^{(s)}(t)=b_k^{(s)}(t),k=1,2,...,\ s=\overline{1,n-1}, \tag{12}$$

де

$$b_k^{(s)}(t)=\lambda_k^{(s)}(t)B(t)u_0^{(s)}(t)+g_k^{(s)}(t),k=1,2,...,\ s=\overline{1,n-1}, \tag{13}$$

$$g_k^{(s)}(t)=B(t)(u_{k-h}^{(s)}(t))'+\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i^{(s)}(t)B(t)u_{k-i}^{(s)}(t)-\sum_{i=1}^{k}A_i(t)u_{k-i}^{(s)}(t).$$

З рівняння (11) знайдемо

$$u_0^{(s)}(t)=c_0^{(s)}\varphi_s(t),\lambda_0^{(s)}(t)=\lambda_s(t),\ s=\overline{1,n-1}. \tag{14}$$

За виконання умови розв'язності – ортогональності векторів $b_k^{(s)}(t)$ до вектора $\psi_s(t)$ – з рівнянь (12) матимемо

$$u_k^{(s)}(t)=H_s(t)b_k^{(s)}(t)+c_k^{(s)}\varphi_s(t),\ s=\overline{1,n-1}, \tag{15}$$

де $H_s(t)=(A_0(t)-\lambda_0^{(s)}(t)B(t))^-$ – матриця, напівобернена до матриці $A_0(t)-\lambda_0^{(s)}(t)B(t)$, а $c_k^{(s)}$ – сталі множники, які підлягають визначенню з крайових умов. Підставляючи (14), (15) у (13), вираз для векторів $b_k^{(s)}(t)$ перетворимо до вигляду

$$b_k^{(s)}(t)=\sum_{i=0}^{k-1}c_i^{(s)}\widetilde{b}_{k-i}^{(s)},$$

$$\widetilde{b}_k^{(s)}(t)=\lambda_k^{(s)}(t)B(t)\varphi_s(t)+m_k^{(s)}(t),$$

$$m_k^{(s)}(t)=B(t)\delta_{h,k}\varphi_s'(t)+\sum_{i=1}^{k-1}B(t)\delta_{h,i}(H_s(t)\widetilde{b}_{k-i}^{(s)})'+\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i^{(s)}(t)B(t)H_s(t)\widetilde{b}_{k-i}^{(s)}-$$

$$-A_k(t)\varphi_s(t)-\sum_{i=1}^{k-1}A_i(t)H_s(t)\widetilde{b}_{k-i}^{(s)},s=\overline{1,n-1},k=1,2,\ldots.$$

Тоді, взявши до уваги (5), з умови розв'язності дістанемо

$$\lambda_k^{(s)}(t) = -(m_k^{(s)}(t), \psi_s(t)), \; s = \overline{1, n-1}. \tag{16}$$

Наклавши умову

$$\det A_0(t) \neq 0, \forall t \in [0; 1], \tag{17}$$

із (10) знайдемо рекурентні співвідношення для визначення коефіцієнтів $\widetilde{v}_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots :$

$$\widetilde{v}_0(t) = -A_0^{-1}(t) f_0(t),$$

$$\widetilde{v}_k(t) = A_0^{-1}(t)[B(t)(\widetilde{v}_{k-h}(t))' - \sum_{i=1}^{k} A_i(t)\widetilde{v}_{k-i}(t) - f_k(t)], \; k = 1, 2, \ldots. \tag{18}$$

Розглянемо тепер $m-$наближення, обірвавши ряди (7), (8) на $m-$му члені

$$u_m^{(k)}(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{m} u_j^{(k)}(t)\varepsilon^j; \lambda_m^{(k)}(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j^{(k)}(t)\varepsilon^j; \; k = \overline{1, n-1}; \tag{19}$$

$$\widetilde{v}_m(t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{m} \widetilde{v}_j(t)\varepsilon^j. \tag{20}$$

Дослідимо спершу стійкий випадок, коли

$$Re\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon) \leq 0, \; i = \overline{1, n-1}, \; \forall t \in [0; 1]. \tag{21}$$

У першому випадку наближений розв'язок задачі (1), (2) представимо у вигляді

$$x_m(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} u_m^{(i)}(t,\varepsilon) \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon) dt) + \widetilde{v}_m(t,\varepsilon). \qquad (22),$$

поклавши у (6) $\alpha_i = 0, i = \overline{1, n-1}$. Підставивши цей вираз у крайову умову (2), дістанемо

$$M \sum_{i=1}^{n-1} u_m^{(i)}(0,\varepsilon) + M\widetilde{v}_m(0,\varepsilon) + N \sum_{i=1}^{n-1} u_m^{(i)}(1,\varepsilon) \exp(\varepsilon^{-h} \int_0^1 \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon) dt) +$$
$$+ N\widetilde{v}_m(1,\varepsilon) = d. \tag{23}$$

Оскільки згідно з (21)

$$\exp(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon) dt) = o(\varepsilon^{m+1}), i = \overline{1, n-1}, \tag{24}$$

то, знехтувавши відповідними доданками, замість (23) розглянемо рівність

$$M \sum_{i=1}^{n-1} u_m^{(i)}(0,\varepsilon) + M\widetilde{v}_m(0,\varepsilon) + N\widetilde{v}_m(1,\varepsilon) = d, \tag{25}$$

з якої визначимо сталі множники $c_i^{(k)}, \; i = \overline{1, n-1}, \; k = \overline{0, m}$.

Прирівнявши в (25) коефіцієнти при однакових степенях малого параметра з врахуванням (19),(20), маємо

$$M\sum_{i=1}^{n-1}u_k^{(i)}(0)+M\widetilde{v}_k(0)+N\widetilde{v}_k(1)-\delta_{k,0}d=0,\ k=\overline{0,m},$$

де $\delta_{k,0}$ - символ Кронекера. Підставивши в ці рівності вирази (15), (18), дістанемо

$$M\sum_{j=1}^{n-1}(\sum_{i=0}^{k-1}c_i^{(j)}H_j(0)\widetilde{b}_{k-i}^{(j)}(0)+c_k^{(j)}\varphi_j(0))+$$
$$+MA_0^{-1}(0)[B(0)(\widetilde{v}_{k-h}(0))'-\sum_{i=1}^{k}A_i(0)\widetilde{v}_{k-i}(0)-f_k(0)]+$$
$$+NA_0^{-1}(1)[B(1)(\widetilde{v}_{k-h}(1))'-\sum_{i=1}^{k}A_i(1)\widetilde{v}_{k-i}(1)-f_k(1)]-\delta_{k,0}d=0, \tag{26}$$
$$k=\overline{0,m}.$$

Введемо позначення

$$c_k=col(c_k^{(1)},c_k^{(2)},\ldots,c_k^{(n-1)}),k=0,1,\ldots;$$
$$U_0=(\varphi_1(0),\varphi_2(0),\ldots,\varphi_{n-1}(0));$$
$$\Phi_k=(H_1(0)\widetilde{b}_k^{(1)}(0),H_2(0)\widetilde{b}_k^{(2)}(0),\ldots,H_{n-1}(0)\widetilde{b}_k^{(n-1)}(0)),\ k=1,2,\ldots;$$
$$l_k=MA_0^{-1}(0)[B(0)(\widetilde{v}_{k-h}(0))'-\sum_{i=1}^{k}A_i(0)\widetilde{v}_{k-i}(0)-f_k(0)]+$$
$$+NA_0^{-1}(1)[B(1)(\widetilde{v}_{k-h}(1))'-\sum_{i=1}^{k}A_i(1)\widetilde{v}_{k-i}(1)-f_k(1)]-\delta_{k,0}d,$$
$$k=0,1,\ldots.$$

Припустимо, що

$$\det MU_0\neq 0. \tag{27}$$

Тоді рівності (26) запишуться у вигляді

$$M\sum_{i=1}^{k}\Phi_i c_{k-i}+MU_0c_k+l_k=0,\ k=\overline{0,m}.$$

Звідси однозначно визначаються вектори c_k:

$$c_0=-(MU_0)^{-1}l_0,$$
$$c_k=-(MU_0)^{-1}(l_k+M\sum_{i=1}^{k}\Phi_i c_{k-i}),\ k=\overline{1,m}. \tag{28}$$

Покажемо, що побудований в такий спосіб вираз (22) є асимптотичним зображенням точного розв'язку крайової задачі (1), (2). Підставивши (22) в диференціальний оператор

$$L(x) = \varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} - A(t,\varepsilon)x - f(t,\varepsilon),$$

маємо

$$L(x_m) = \sum_{i=1}^{n-1}[\varepsilon^h B(t)(u_m^{(i)}(t,\varepsilon))' + \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)B(t)u_m^{(i)}(t,\varepsilon) - A(t,\varepsilon)u_m^{(i)}(t,\varepsilon)]\times$$

$$\times \exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt) - [\varepsilon^h B(t)(\widetilde{v}_m(t,\varepsilon))' - A(t,\varepsilon)\widetilde{v}_m(t,\varepsilon) - f(t,\varepsilon)].$$

Згідно з наведеним вище алгоритмом визначення функцій $\lambda_m(t,\varepsilon)$ і вектор-функцій $u_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $\widetilde{v}_m(t,\varepsilon)$ вирази в квадратних дужках є величинами порядку $O(\varepsilon^{m+1})$. Отже,

$$L(x_m) = \sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon^{m+1}a_i(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^1 \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt) + \varepsilon^{m+1}b(t,\varepsilon),$$

де $a_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$, $b(t,\varepsilon)$ – n-вимірні вектор-функції, рівномірно обмежені на $[0;1]$. Взявши до уваги (21), цю рівність подамо у вигляді

$$L(x_m) = \varepsilon^{m+1}a(t,\varepsilon),$$

де $a(t,\varepsilon)$ – вектор-функція, рівномірно обмежена на $[0;1]$ при $\varepsilon \to 0$.

Нехай $x(t,\varepsilon)$ - точний розв'язок задачі (1), (2). Позначимо

$$y_m(t,\varepsilon) = x_m(t,\varepsilon) - x(t,\varepsilon). \tag{29}$$

Тоді вектор $y_m(t,\varepsilon)$ буде розв'язком крайової задачі

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dy_m}{dt} = A(t,\varepsilon)y_m + \varepsilon^{m+1}a(t,\varepsilon), \tag{30}$$

$$My_m(0,\varepsilon) + Ny_m(1,\varepsilon) = \varepsilon^{m+1}b(\varepsilon), \tag{31}$$

де $b(\varepsilon)$ - деякий обмежений $n-1-$вимірний вектор. Помножимо систему (30) на ε^{-h}:

$$B(t)\frac{dy_m}{dt} = \widetilde{A}(t,\varepsilon)y_m + \varepsilon^{m+1-h}a(t,\varepsilon), \tag{32}$$

де

$$\widetilde{A}(t,\varepsilon) = \varepsilon^{-h}A(t,\varepsilon).$$

Поряд із крайовою задачею (32), (31) розглянемо відповідну однорідну задачу

$$B(t)\frac{dx}{dt} = \widetilde{A}(t,\varepsilon)x, \tag{33}$$

$$Mx(0,\varepsilon) + Nx(1,\varepsilon) = 0, \tag{34}$$

а також систему, спряжену з (33)

$$\frac{d}{dt}B^*(t)x = -\widetilde{A}^*(t,\varepsilon)x. \tag{35}$$

Згідно з [6] фундаментальна матриця однорідної системи (33) в даному випадку має вигляд

$$X_{n-1}(t,\varepsilon)=(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t\Lambda_m(t,\varepsilon)dt),$$

де $\Lambda_m=diag\{\lambda_m^{(1)}(t,\varepsilon),\ldots,\lambda_m^{(n-1)}(t,\varepsilon)\}$, $U_m(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^m\varepsilon^kU_k(t)$, а матриці $U_k(t)$ складаються з вектор-стовпців, які визначаються за формулами (15), в яких $c_0^{(s)}=1,\ c_i^{(s)}=0,\ i=\overline{1,n-1}$.

Аналогічну структуру має і фундаментальна матриця спряженої системи (35)

$$Y_{n-1}(t,\varepsilon)=(\widehat{U}_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\exp(-\varepsilon^{-h}\int_0^t\Lambda_m^*(t,\varepsilon)dt),$$

де $\widehat{U}_m(t,\varepsilon)$ – матриця, елементи якої визначаються за тим же алгоритмом, що і елементи матриці $U_m(t,\varepsilon)$; Λ^* - матриця, комплексно спряжена з Λ_m. Тоді, використовуючи [6, с.67], загальний розв'язок системи (32) подамо у вигляді

$$\begin{gathered}y_m(t,\varepsilon)=(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t\Lambda_m(t,\varepsilon)dt)c+\\ +\int_0^t(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_\tau^t\Lambda_m(t,\varepsilon)dt)\times\\ \times(\widehat{U}_m^*(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))q(\tau,\varepsilon)d\tau-\widetilde{\varphi}(t)(\widetilde{\psi}^*(t)\widetilde{L}\widetilde{\varphi}(t))^{-1}\widetilde{\psi}^*(t)q(t,\varepsilon),\end{gathered}$$

де

$$q(t,\varepsilon)=\varepsilon^{m-h+1}a(t,\varepsilon), \tag{36}$$

$$\widetilde{L}(t)=A(t)-\varepsilon^hB(t)\frac{d}{dt}.$$

Визначивши вектор c із крайової умови (31) і взявши до уваги (21), (24), отримаємо асимптотичний розв'язок неоднорідної крайової задачі (32), (31):

$$\begin{gathered}y_m(t,\varepsilon)=(Gq)(t,\varepsilon)+(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t\Lambda_m(t,\varepsilon)dt)\times\\ \times([MU_m(0,\varepsilon)]^{-1}+O(\varepsilon^{m+1}))\varepsilon^{m+1}b(\varepsilon),\end{gathered} \tag{37}$$

де $(Gq)(t,\varepsilon)$ – оператор Гріна крайової задачі (30), (31), тобто розв'язок напіводнорідної крайової задачі (32), (34). Другий доданок виразу (37) – розв'язок напіводнорідної задачі (33), (31). Оператор Гріна для даного випадку має вигляд

$$\begin{gathered}(Gq)(t,\varepsilon)=\int_0^1G_0(t,\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau+(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t\Lambda_m(t,\varepsilon)dt)\times\\ \times([MU_m(0,\varepsilon)]^{-1}+O(\varepsilon^{m+1}))(M\xi(0,\varepsilon)+N\xi(1,\varepsilon))-\xi(t,\varepsilon),\end{gathered}$$

де

$$\xi(t,\varepsilon)=\widetilde{\varphi}(t)(\widetilde{\psi}^*(t)\widetilde{L}\widetilde{\varphi}(t))^{-1}\widetilde{\psi}^*(t)q(t,\varepsilon).$$

$G_0(t,\tau,\varepsilon)$ - матриця Гріна однорідної крайової задачі (33), (34), яка має наступну структуру:

$$G_0(t,\tau,\varepsilon) = \begin{cases} -(U_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda_m(t,\varepsilon)dt)\times \\ \times([MU_m(0,\varepsilon)]^{-1} + O(\varepsilon^{m+1}))N(U_m(1,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1}))\times \\ \times\exp(\varepsilon^{-h}\int_\tau^1 \Lambda_m(s,\varepsilon)ds)(\widehat{U}^*_m(\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})), \\ \text{якщо} \quad 0 \le t < \tau \le 1; \\ (U_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_\tau^t \Lambda_m(s,\varepsilon)ds)\times \\ \times(\widehat{U}^*_m(\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})) - (U_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1}))\times \\ \times\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda_m(t,\varepsilon)dt)([MU_m(0,\varepsilon)]^{-1} + O(\varepsilon^{m+1}))\times \\ \times N(U_m(1,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_\tau^1 \Lambda_m(s,\varepsilon)ds)\times \\ \times(\widehat{U}^*_m(\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})), \\ \text{якщо} \quad 0 \le \tau \le t \le 1. \end{cases} \tag{38}$$

Перейшовши в рівності (37) до оцінок за нормою, дістанемо

$$\|y_m(t,\varepsilon)\| \le \int_0^1 \|G_0(t,\tau,\varepsilon)\| \cdot \|q(\tau,\varepsilon)\|d\tau +$$
$$+\|U_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})\| \cdot \|\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda_m(t,\varepsilon)dt)\| \cdot \|(MU_m(0,\varepsilon))^{-1} + O(\varepsilon^{m+1})\|\times$$
$$\times\|M\xi(0,\varepsilon) + N\xi(1,\varepsilon)\| + \varepsilon^{m+1}(\|U_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})\|)\|\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda_m(t,\varepsilon)dt)\|\times$$
$$\times\|(MU_m(0,\varepsilon))^{-1} + O(\varepsilon^{m+1})\| \cdot \|b(\varepsilon)\| + \|\xi(t,\varepsilon)\|. \tag{39}$$

Взявши до уваги формули (37), (38) і врахувавшиумову (21), та обмеженість всіх матричних і векторних функцій, які містяться в (39), матимемо

$$\|y_m(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon^{m-h+1}c,$$

де c – деяка стала, що не залежить від ε. Повернувшись до заміни (29), отримаємо остаточну оцінку

$$\|x_m(t,\varepsilon) - x(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon^{m-h+1}c. \tag{40}$$

В результаті доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови 1)-4) і (17), (21), (27), то при досить малих ε крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок, який виражається асимптотичною формулою*

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n-1} u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt) + \widetilde{v}_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m-h+1}),$$

де $u_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$; $\widetilde{v}_m(t,\varepsilon)$ – $n-$вимірні вектор-функції, $\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$ – скалярні функції, що зображаються у вигляді розвинень (19),(20), коефіцієнти яких визначаються за допомогою рекурентних формул (15), (16), (18), (28).

Якщо умова (27) не виконується, тобто

$$\det MU_0 = 0, \tag{41}$$

то наближений розв'язок крайової задачі (1), (2) шукаємо у вигляді (22), де $u_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$ – $n-$вимірні вектор-функції, $\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$ – скалярні функції, що зображаються формальними розвиненнями:

$$u_m^{(i)}(t,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k u_k^{(i)}(t), \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k\lambda_k^{(i)}(t), i=\overline{1,n-1},$$

а вектор-функція $\widetilde{v}_m(t,\varepsilon)$ має вигляд (20).

Проведемо аналогічні міркування, врахувавши останні розвинення. В результаті дістанемо систему

$$M\sum_{i=1}^{k}\Phi_i c_{k-i} + MU_0c_k + l_{k-1} = 0, k=\overline{0,m}, \tag{42}$$

із якої визначимо вектори $c_k, k=\overline{0,m}$. Для цього спершу розглянемо співвідношення (42) на нульовому кроці:

$$MU_0c_0 = 0. \tag{43}$$

Звідси, якщо

$$rank MU_0 = n-2, \tag{44}$$

то останнє рівняння має ненульовий розв'язок

$$c_0 = \alpha_0 g, \tag{45}$$

де g – власний вектор, що відповідає нульовому власному значенню матриці MU_0; α_0 – константа, яка підлягає визначенню. На наступному кроці рівність (42) має вигляд

$$M\Phi_1c_0 + MU_0c_1 + l_0 = 0, \tag{46}$$

для сумісності якої необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова

$$(l_0 + M\Phi_1 c_0, g') = 0, \tag{47}$$

де g' – власний вектор, що відповідає нульовому власному значенню матриці, спряженої до MU_0. Якщо

$$(M\Phi_1 g, g') \neq 0, \tag{48}$$

то, враховуючи (45), із співвідношення (47) знайдемо

$$\alpha_0 = -\frac{(l_0, g')}{(M\Phi_1 g, g')}.$$

Тоді із формули (46) маємо

$$c_1 = -(MU_0)^+(l_0 + \alpha_0 M\Phi_1 g) + \alpha_1 g,$$

де $(MU_0)^+$ – псевдообернена матриця по Муру-Пенроузу до матриці MU_0, α_1 – поки що невідома константа.

Використавши умову сумісності системи (42) на $(k+1)$-му кроці, дістанемо

$$\alpha_k = -[(l_k, g') + (\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-j}(-1)^i P_i^{k-j}(M\Phi, (MU_0)^+)l_j, g') +$$

$$+(\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-j+1}(-1)^{i+1}\alpha_j \widetilde{P}_i^{k-j+1}((MU_0)^+, M\Phi)g, g')][M\Phi_1 g, g']^{-1}, k = \overline{0,m},$$

де символом $P_k^j(M\Phi, (MU_0)^+)$ позначимо суму всіх можливих добутків k множників $M\Phi_{i1}(MU_0)^+, ..., M\Phi_{ik}(MU_0)^+$ з натуральними індексами $i_1, i_2, ..., i_k$, сума яких дорівнює j; а символом $P_k^j((MU_0)^+, M\Phi)$ аналогічну суму всіх можливих добутків k множників вигляду $(MU_0)^+ M\Phi_{i1}, ..., (MU_0)^+ M\Phi_{ik}$: вираз $\widetilde{P}_k^j((MU_0)^+, M\Phi)$ пов'язаний з виразом $P_k^j((MU_0)^+, M\Phi)$ співвідношенням

$$(MU_0)^+ \widetilde{P}_k^j((MU_0)^+, M\Phi) = P_k^j((MU_0)^+, M\Phi).$$

Тоді із формули (42) дістанемо

$$c_k = -(MU_0)^+[l_{k-1} + \sum_{j=0}^{k-2}\sum_{i=1}^{k-1-j}(-1)^i P_i^{k-1-j}(M\Phi, (MU_0)^+)l_j +$$

$$+\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-j}(-1)^{i+1}\alpha_j \widetilde{P}_i^{k-j}((MU_0)^+, M\Phi)g] + \alpha_k g,\ k = \overline{0,m}.$$

Якщо ж і умова (48) не виконується, тобто

$$(M\Phi_1 g, g') = 0, \tag{49}$$

то розв'язок крайової задачі шукаємо у вигляді (22), де

$$u_m^{(i)}(t,\varepsilon)=\varepsilon^{-2}\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k u_k^{(i)}(t),\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k\lambda_k^{(i)}(t),i=\overline{1,n-1},$$

а вектор-функція $\widetilde{v}_m(t,\varepsilon)$ має вигляд (20).

Побудова формального розв'язку крайової задачі (1), (2) в даному випадку зводиться до відшукання розв'язків системи

$$M\sum_{i=1}^{k}\Phi_i c_{k-i}+MU_0c_k+l_{k-2}=0,\ k=\overline{0,m}. \tag{50}$$

Очевидно, що на нульовому кроці останнє співвідношення має вигляд (43), звідки, завдяки виконанню умов (41), (44), аналогічно знайдемо вектор c_0. На наступному кроці маємо

$$M\Phi_1c_0+MU_0c_1=0. \tag{51}$$

Умова розв'язності цього рівняння, з урахуванням (45), має вигляд (49), і, отже, виконується за припущенням. Тоді з (51) дістанемо

$$c_1=-\alpha_0(MU_0)^+M\Phi_1g+\alpha_1g,$$

де α_0,α_1 – невідомі сталі, які підлягають визначенню.

При $k=2$ рівняння (50) має вигляд

$$M\Phi_2c_0+M\Phi_1c_1+MU_0c_2+l_0=0. \tag{52}$$

Якщо

$$(M\Phi_2g-M\Phi_1(MU_0)^+M\Phi_1g,g')\neq0, \tag{53}$$

то з умови розв'язності цього рівняння дістанемо

$$\alpha_0=-\frac{(l_0,g')}{(M\Phi_2g-M\Phi_1(MU_0)^+M\Phi_1g,g')}.$$

Одночасно із (52) визначимо c_2 :

$$c_2=-(MU_0)^+(l_0+\alpha_0M\Phi_2g-\alpha_0M\Phi_1(MU_0)^+M\Phi_1g+\alpha_1M\Phi_1g)+\alpha_2g,$$

де α_1,α_2 – поки що невідомі сталі.

Діючи так і далі, з умови розв'язності рівняння (50) на $(k+2)$-му кроці дістанемо

$$\alpha_k=-[(l_k,g')+(\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=1}^{k-j+1}(-1)^iP_i^{k-j+1}(M\Phi,(MU_0)^+)l_{j-1},g')+$$

$$+(\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-j+2}(-1)^{i+1}\alpha_j\widetilde{P}_i^{k-j+2}((MU_0)^+,M\Phi)g,g')]\times$$

$$\times(M\Phi_2g-M\Phi_1(MU_0)^+M\Phi_1g,g')^{-1},\ k=\overline{0,m}.$$

Тоді із співвідношення (50) визначимо вектори c_k:

$$c_k = -(MU_0)^+[l_{k-2} + \sum_{j=0}^{k-2}\sum_{i=1}^{k-1-j}(-1)^i P_i^{k-1-j}(M\Phi, (MU_0)^+)l_{j-1} +$$

$$+\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-j}(-1)^{i+1}\alpha_j \widetilde{P}_i^{k-j}((MU_0)^+, M\Phi)g] + \alpha_k g,\ k = \overline{0, m}.$$

Якщо ж і умова (53) не виконується, але мають місце співвідношення

$$\begin{gathered} \textstyle\sum_{j=1}^{k}(-1)^j(\widetilde{P}_j^k((MU_0)^+, M\Phi)g, g') = 0, k < s, \\ \textstyle\sum_{j=1}^{s}(-1)^j(\widetilde{P}_j^s((MU_0)^+, M\Phi)g, g') \neq 0, \end{gathered} \tag{54}$$

то розв'язок крайової задачі (1), (2) будуємо у вигляді (22), де

$$u_m^{(i)}(t,\varepsilon) = \varepsilon^{-s}\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k u_k^{(i)}(t), \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(t), i = \overline{1, n-1}. \tag{55}$$

При цьому неважко переконатися у справедливості наступних рекурентних співвідношень

$$c_k = -(MU_0)^+[l_{k-s} + \sum_{j=0}^{k-2}\sum_{i=1}^{k-1-j}(-1)^i P_i^{k-1-j}(M\Phi, (MU_0)^+)l_{j-s+1} +$$

$$+\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{k-j}(-1)^{i+1}\alpha_j \widetilde{P}_i^{k-j}((MU_0)^+, M\Phi)g] + \alpha_k g,\ k = \overline{0, m}, \tag{56}$$

$$\alpha_k = -[(l_k, g') + (\sum_{j=0}^{k+s-2}\sum_{i=1}^{k+s-j-1}(-1)^i P_i^{k+s-j-1}(M\Phi, (MU_0)^+)l_{j-s+1}, g') +$$

$$+(\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{k+s-j}(-1)^{i+1}\alpha_j \widetilde{P}_i^{k+s-j}((MU_0)^+, M\Phi)g, g')]\times$$

$$\times(\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j+1}(\widetilde{P}_j^s((MU_0)^+, M\Phi)g, g'))^{-1},\ k = \overline{0, m}. \tag{57}$$

Зазначимо, що виконання співвідношення (54) забезпечує неособливість матриці $MU_m(0,\varepsilon)$ при досить малих $\varepsilon > 0$. При цьому обернена до неї матриця матиме полюс s-го порядку в точці $\varepsilon = 0$ і її можна представити у вигляді

$$(MU_m(0,\varepsilon))^{-1} = \frac{1}{\varepsilon^s}\cdot Q(\varepsilon), \tag{58}$$

де $Q(\varepsilon)$ - деяка обмежена матриця розмірності $(n-1)\times(n-1)$ [6, c.95]. Врахувавши (55), (58) і повторивши такі самі викладки, що й у випадку, коли виконується умова (27), отримаємо таку асимптотичну оцінку

$$\|x_m(t,\varepsilon) - x(t,\varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{m+1-h-s}.$$

Отже, справджується наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови 1)-4), а також (17), (21), (44), (54), то при досить малих крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок, який виражається асимптотичною формулою*

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n-1}u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt)+\widetilde{v}_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1-h-s}),$$

де $u_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$; $\widetilde{v}_m(t,\varepsilon)-$ $n-$*вимірні вектор-функції,* $\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$ *- скалярні функції, що зображаються у вигляді розвинень (55),(20), коефіцієнти яких визначаються за допомогою рекурентних формул (15), (16), (18), (56), (57).*

Перейдемо до розгляду умовно стійкого випадку, коли

$$Re\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)\leq 0,\ i=\overline{1,l},\ Re\lambda_m^{(j)}(t,\varepsilon)\geq 0,\ j=\overline{l+1,n-1}. \tag{59}$$

Наближений розв'язок задачі (1), (2) в цьому випадку будемо шукати у вигляді

$$x_m(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{l}u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt)+$$

$$+\sum_{i=l+1}^{n-1}u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp(-\varepsilon^{-h}\int\limits_t^1\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt)+\widetilde{v}_m(t,\varepsilon), \tag{60}$$

поклавши у (6) $\alpha_i=0, i=\overline{1,l}, \alpha_i=1, i=\overline{l+1,n-1}$. Підставивши (60) у крайову умову (2), дістанемо

$$M\sum_{i=1}^{l}u_m^{(i)}(0,\varepsilon)+M\sum_{i=l+1}^{n-1}u_m^{(i)}(0,\varepsilon)\exp(-\varepsilon^{-h}\int_0^1\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt)+$$

$$+M\widetilde{v}_m(0,\varepsilon)+N\sum_{i=1}^{l}u_m^{(i)}(1,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^1\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt)+$$

$$+N\sum_{i=l+1}^{n-1}u_m^{(i)}(1,\varepsilon)+N\widetilde{v}_m(1,\varepsilon)=d. \tag{61}$$

Взявши до уваги (59) і нехтуючи величинами порядку $o(\varepsilon^{m+1})$, замість (61) розглянемо рівність

$$M\sum_{i=1}^{l}u_m^{(i)}(0,\varepsilon)+M\widetilde{v}_m(0,\varepsilon)+N\sum_{i=l+1}^{n-1}u_m^{(i)}(1,\varepsilon)+N\widetilde{v}_m(1,\varepsilon)=d,$$

з якої визначимо сталі множники $c_i^{(k)}, i = \overline{1, n-1}, k = \overline{0, m}$. Прирівнявши в ній коефіцієнти при однакових степенях ε з врахуванням (19),(20) маємо систему рівнянь

$$M \sum_{s=1}^{l} u_k^{(s)}(0) + M\widetilde{v}_k(0) + N \sum_{s=l+1}^{n-1} u_k^{(s)}(1) + N\widetilde{v}_k(1) = \delta_{k,0} d,\ k = \overline{0, m}.$$

Врахувавши (15), запишемо її у вигляді

$$M \sum_{s=1}^{l} (\sum_{i=0}^{k-1} c_i^{(s)} H_s(0) \widetilde{b}_{k-i}^{(s)}(0) + c_k^{(s)} \varphi_s(0)) + N \sum_{s=l+1}^{n-1} (\sum_{i=0}^{k-1} c_i^{(s)} H_s(1) \widetilde{b}_{k-i}^{(s)}(1) +$$

$$+ c_k^{(s)} \varphi_s(1)) = \delta_{k,0} d - M\widetilde{v}_k(0) - N\widetilde{v}_k(1), k = \overline{0, m}. \qquad (62)$$

Припустимо, що

$$\det(M\varphi_1(0), M\varphi_2(0), \ldots, M\varphi_l(0), N\varphi_{l+1}(1), \ldots, N\varphi_{n-1}(1)) \neq 0. \qquad (63)$$

Введемо позначення

$$\widetilde{l}_k = M\widetilde{v}_k(0) + N\widetilde{v}_k(1) - \delta_{k,0} d,\ k = 0, 1, \ldots,$$

$$\widetilde{U}_0 = (M\varphi_1(0), M\varphi_2(0), \ldots, M\varphi_l(0), N\varphi_{l+1}(1), \ldots, N\varphi_{n-1}(1)),$$

$$c_k = col(c_k^{(1)}, c_k^{(2)}, \ldots, c_k^{(n-1)}),$$

$$\widetilde{\Phi}_k = (MH_1(0)\widetilde{b}_k^{(1)}(0), \ldots, MH_l(0)\widetilde{b}_k^{(l)}(0),$$

$$NH_{l+1}(1)\widetilde{b}_k^{(l+1)}(1), \ldots, NH_{n-1}(1)\widetilde{b}_k^{(n-1)}(1)).$$

Тоді рівності (62) набувають вигляду

$$\sum_{i=1}^{k} \widetilde{\Phi}_i c_{k-i} + \widetilde{U}_0 c_k + \widetilde{l}_k = 0,\ k = \overline{0, m},$$

звідки:

$$c_0 = -\widetilde{U}_0^{-1} \widetilde{l}_0,$$

$$c_k = -\widetilde{U}_0^{-1}(\widetilde{l}_k + \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\Phi}_i c_{k-i}),\ k = \overline{1, m}. \qquad (64)$$

Для виведення асимптотичної оцінки наближеного розв'язку (60), як і в попередньому випадку, розглянемо рівняння (32) з крайовою умовою (31), яке задовольняє вектор нев'язки

$$y_m(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon).$$

У даному випадку фундаментальну матрицю однорідної системи (33) виразимо асимптотичною формулою

$$X(t, \varepsilon) = [U_m(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})] diag\{\exp(\varepsilon^{-h} \int_0^t \Lambda_m^{(1)}(t, \varepsilon) dt),$$

$$\exp(-\varepsilon^{-h}\int_t^1 \Lambda_m^{(2)}(t,\varepsilon)dt)\},$$

де

$$\Lambda_m^{(1)} = diag\{\lambda_m^{(1)}(t,\varepsilon),\dots,\lambda_m^{(l)}(t,\varepsilon)\},$$
$$\Lambda_m^{(2)} = diag\{\lambda_m^{(l+1)}(t,\varepsilon),\dots,\lambda_m^{(n-1)}(t,\varepsilon)\},$$

$U_m(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k U_k(t)$, а матриці $U_k(t)$ складаються з вектор-стовпців, які визначаються за формулами (15), в яких $c_0^{(s)} = 1,\ c_i^{(s)} = 0,\ i = \overline{1, n-1}$, [5,6]. Аналогічно зображається і фундаментальна матриця спряженої системи (35):

$$Y(t,\varepsilon) = [\widehat{U}_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})]diag\{\exp(-\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda_m^{(1)*}(t,\varepsilon)dt),$$
$$\exp(\varepsilon^{-h}\int_t^1 \Lambda_m^{(2)*}(t,\varepsilon)dt)\},$$

де $\widehat{U}_m(t,\varepsilon)$ - прямокутна матриця відповідних розмірів.

Введемо позначення

$$Y_m^{(1)}(t,\varepsilon) = diag\{\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda_m^{(1)}(t,\varepsilon)dt), 0\};$$
$$Y_m^{(2)}(t,\varepsilon) = diag\{0, \exp(-\varepsilon^{-h}\int_t^1 \Lambda_m^{(2)}(t,\varepsilon)dt)\},$$

де нульові блоки мають розмірності $(n-l-1)\times(n-l-1)$ та $(l\times l)$ відповідно. Тоді

$$X(t,\varepsilon) = X_1(t,\varepsilon) + X_2(t,\varepsilon),$$

де

$$X_i(t,\varepsilon) = [U_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^{m+1})]Y_m^{(i)}(t,\varepsilon),\ i = 1,2,$$

і загальний розв'язок системи (32) можна подати у вигляді

$$y_m(t,\varepsilon) = X(t,\varepsilon)c + \int_0^t X_1(t,\varepsilon)Y^*(\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau + \int_1^t X_2(t,\varepsilon)Y^*(\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau -$$
$$-\widetilde{\varphi}(t)(\widetilde{\psi}^*(t)\widetilde{L}\widetilde{\varphi}(t))^{-1}\widetilde{\psi}^*(t)q(t,\varepsilon).$$

Визначивши сталий вектор c із крайової умови (31) і беручи до уваги умову (59), для розв'язку задачі (32), (31) отримаємо вираз

$$y_m(t,\varepsilon) = (Gq)(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}X(t,\varepsilon)([MU_m^{(1)}(0,\varepsilon); NU_m^{(2)}(1,\varepsilon)] +$$
$$+O(\varepsilon^{m+1}))^{-1}b(\varepsilon). \tag{65}$$

Тут $U_m^{(1)}(t,\varepsilon)$ – прямокутна матриця розмірністю $n\times l$, стовпцями якої є вектори $u_m^{(i)}(t,\varepsilon),\ i = \overline{1,l}$, а $U_m^{(2)}(t,\varepsilon)$ – матриця розмірністю $n\times(n-l-1)$, стовпцями якої є вектори $u_m^{(i)}(t,\varepsilon),\ i = \overline{l+1, n-1}$:

$$(Gq)(t,\varepsilon) = \int_0^1 G_0(t,\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau +$$

$$+X(t,\varepsilon)([MU_m^{(1)}(0,\varepsilon);NU_m^{(2)}(1,\varepsilon)]^{-1}+O(\varepsilon^{m+1}))\times$$
$$\times(M\xi(0,\varepsilon)+N\xi(1,\varepsilon))-\xi(t,\varepsilon), \tag{66}$$

де

$$\xi(t,\varepsilon)=\widetilde{\varphi}(t)(\widetilde{\psi}^*(t)\widetilde{L}\widetilde{\varphi}(t))^{-1}\widetilde{\psi}^*(t)q(t,\varepsilon),$$

$G_0(t,\tau,\varepsilon)$ - матриця Гріна крайової задачі (33), (34), яка має наступну структуру:

$$G_0(t,\tau,\varepsilon)=\begin{cases} (U_m^{(1)}(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_\tau^t\Lambda_m^{(1)}(s,\varepsilon)ds)\times \\ \times[\widehat{U}_m^{(1)*}(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1})]+K_m(t,\tau,\varepsilon), \\ \text{якщо}\quad 0\le\tau<t\le1, \\ (U_m^{(2)}(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\exp(-\varepsilon^{-h}\int_t^\tau\Lambda_m^{(2)}(s,\varepsilon)ds)\times \\ \times(\widehat{U}_m^{(2)*}(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))+K_m(t,\tau,\varepsilon), \\ \text{якщо}\quad 0\le t\le\tau\le1. \end{cases}$$

де

$$K_m(t,\tau,\varepsilon)=(U_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))(Y_m^{(1)}(t,\varepsilon)+Y_m^{(2)}(t,\varepsilon))\times$$
$$\times([MU_m^{(1)}(0,\varepsilon);NU_m^{(2)}(1,\varepsilon)]+O(\varepsilon^{m+1}))^{-1}\times$$
$$\times[(MU_m^{(2)}(0,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\exp(-\varepsilon^{-h}\int_0^\tau\Lambda_2(s,\varepsilon)ds)(\widehat{U}_m^{(2)*}(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))-$$
$$-(NU_m^{(1)}(1,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))\exp(\varepsilon^{-h}\int_\tau^1\Lambda_1(s,\varepsilon)ds)(\widehat{U}_m^{(1)*}(\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1}))].$$

Виходячи з умови (59), неважко переконатися, що всі матричні і векторні функції, які містяться в (65), (66), рівномірно обмежені при всіх $t\in[0;1]$ і досить малих ε. Тому, перейшовши в (65) до оцінок за нормою, дістанемо асимптотичну оцінку вигляду (40).

Отже, доведена така теорема.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови 1)-4) і умови (17), (59), (63), то при досить малих ε крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок, який зображається асимптотичною формулою*

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{l}u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt)+$$

$$+\sum_{i=l+1}^{n-1} u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp(-\varepsilon^{-h}\int_t^1 \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt)+\widetilde{v}_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1-h}),$$

де $u_m^{(i)}(t,\varepsilon), i=\overline{1,n-1}; \widetilde{v}_m(t,\varepsilon)$ – *n-вимірні вектор-функції,* $\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$ – *скалярні функції, що зображаються у вигляді розвинень (19),(20), коефіцієнти яких визначаються за допомогою рекурентних формул (15), (16), (18), (64).*

Якщо умова (63) не виконується, тобто

$$\det \widetilde{U}_0 = 0, \tag{67}$$

і

$$rank\widetilde{U}_0 = n-2, \tag{68}$$

то, як і в попередньому випадку, наближений розв'язок задачі (1), (2) можна побудувати у вигляді (60), (55), (20). При цьому показник s визначатиметься умовами аналогічними (54):

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^j(\widetilde{P}_j^k(\widetilde{U}_0^+,\widetilde{\Phi})q,q')=0, k<s, \tag{69}$$

$$\sum_{j=1}^{s}(-1)^j(\widetilde{P}_j^s(\widetilde{U}_0^+,\widetilde{\Phi})q,q')\neq 0, \tag{70}$$

де q,q' – елементи нуль-просторів матриць U_0 та U_0^* відповідно, $\widetilde{P}_j^k(\widetilde{U}_0^+,\widetilde{\Phi})$ – сума всіх можливих добутків j множників вигляду $\widetilde{U}_0^+\widetilde{\Phi}_{s1},\widetilde{U}_0^+\widetilde{\Phi}_{s2},...,\widetilde{U}_0^+\widetilde{\Phi}_{sj}$, сума індексів яких $s_1+s_2+...+s_j=k$, причому з кожного утвореного в такий спосіб доданка відбирається перший множник $\widetilde{U}_0^+$.

Алгоритм для визначення векторних констант $c_i, i=\overline{1,m}$, цілком аналогічний до того, який застосовується вище в стійкому випадку. Таким же способом дістаємо й відповідну асимптотичну оцінку побудованого наближення. В результаті приходимо до наступної теореми.

Теорема 4. *Якщо виконуються умови 1)-4) і (17), (59), (67)-(70), то при досить малих* ε *крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок, який зображається асимптотичною формулою*

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{l} u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt)+$$

$$+\sum_{i=l+1}^{n-1} u_m^{(i)}(t,\varepsilon)\exp(-\varepsilon^{-h}\int_t^1 \lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)dt)+\widetilde{v}_m(t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{m+1-h-s}),$$

де $u_m^{(i)}(t,\varepsilon), i=\overline{1,n-1}; \widetilde{v}_m(t,\varepsilon)-n$ – *вимірні вектор-функції,* $\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n-1}$ – *скалярні функції, що зображаються у вигляді розвинень (19), (20).*

Література

[1] *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 398 с.

[2] *Каранджулов Л.И.* Линейные краевые задачи для сингулярно возмущённых дифференциальных систем // Докл. АН Украины. – 1996. - №7.– С.1-5.

[3] *Каранджулов Л.И., Бойчук А.А., Божко В.А.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущённой линейной краевой задачи // Докл. АН Украины. – 1994. – №1.– С.7-10.

[4] *Бойчук А.А., Журавльов В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщённо-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – К.: Труди Інституту математики НАНУ, том 13.

[5] *Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. – К.: Выща школа, 1991. – 207 с.

[6] *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.

[7] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 548 с.

[8] *Яковець В.П., Кочерга О.І.* Задача Коші для виродженої сингулярно збуреної лінійної системи // Допов. НАН України. – 1999. – №5. – с.34-39.