Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2008, № 9.— С. 171–191.

УДК 511.7

Математичні структури в просторі послідовностей Фібоначчі

Н. М. Василенко, М. В. Працьовитий
(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. У роботі вивчається двовимірний лінійний простір числових послідовностей Фібоначчі, а саме, послідовностей, що володіють наступною властивістю однорідності: кожний наступний член є сумою двох попередніх. Знайдено вираз загального члена послідовності та її зв'язок з класичною послідовністю Фібоначчі. Доведено критерій належності наперед заданого числа (зокрема, нуля) даній послідовності.

Доведено, що множина нескінченно малих послідовностей Фібоначчі утворює одновимірний підпростір, інваріантний відносно оператора зсуву (елементів). Розглянуто різні нормування простору, метризації та оснащення його мірами.

Abstract. In this paper, we study two-dimensional linear space of Fibonacci sequences, i.e., sequences with the homogeneity property: every next term is a sum of two previous terms. The expression for general term of this sequence and connection with classic Fibonacci sequence are found. We prove criterion for any given number (in particular, for zero) to belong to this sequence.

The set of infinitesimal Fibonacci sequences forms the shift invariant one-dimensional subspace of this space. We consider different norms, metrics, measures in this space.

Вступ

Найпростішими серед широковживаних двопараметричних числових послідовностей є прогресії (арифметична та геометрична) і класична послідовність Фібоначчі (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...). Геометрична прогресія широко використовується в різних системах числення, а також у конструкціях для задання та дослідження фракталів [**18**]. Класична послідовність Фібоначчі, яка є складнішою, ніж прогресії, теж може використовуватись в подібних цілях [**2, 12**]. Добре вивчені її властивості та тісний зв'язок з такими математичними поняттями як золотий поділ відрізка, ланцюгові дроби, тощо є основою для широкого використання в різних розділах математики, зокрема, для побудови метричної, ймовірнісної і фрактальної теорій дійсних чисел, теорії функцій та ймовірностей. В аналогічних цілях можуть використовуватись її узагальнення.

Послідовність, кожний наступний член якої (починаючи з третього) є сумою двох попередніх, ми називаємо (просто) *послідовністю Фібоначчі.* Природним способом введені лінійні операції на множині таких послідовностей перетворюють її на двовимірний векторний простір, у якому різними способами можуть бути введені скалярний добуток, норма, метрика, міри Лебега та Хаусдорфа, а також фрактальна розмірність, зокрема, розмірність Хаусдорфа-Безиковича. Саме побудові цих математичних структур в просторі послідовностей Фібоначчі і присвячена дана робота.

1. Числова послідовність Фібоначчі

Означення 1. Послідовність дійсних чисел (a_n), $n \in \mathbb{N}$, яка має властивість

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

називатимемо *послідовністю Фібоначчі.*

Тривіальним прикладом послідовності Фібоначчі є $(0) = (0,\ 0,\ 0,\ \dots)$ — *нуль-послідовність*. Із означення 1 зрозуміло, що існує континуальна кількість числових послідовностей Фібоначчі, кожна з яких визначається двома першими членами. Очевидно, що коли $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність Фібоначчі, то $(a_n)_{n=m}^{\infty}$ — теж послідовність Фібоначчі.

Надалі, ми широко використовуватимемо константи $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ і $\widehat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Теорема 1. *Для загального члена послідовності* (1) *має місце рівність*

$$a_n = (a_2 - a_1)\frac{\varphi^{n-1} - \widehat{\varphi}^{n-1}}{\sqrt{5}} + a_1\frac{\varphi^n - \widehat{\varphi}^n}{\sqrt{5}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доведення. Вираз загального члена числової послідовності (1) знайдемо, використовуючи метод генератрис [**20**]. Генератриса числової послідовності (1) має вигляд

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{n-1} = a_1 + a_2 t + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1} t^{n-1} + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2} t^{n-1}. \tag{2}$$

Врахувавши, що

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1} t^{n-1} = t(\mathcal{A}(t) - a_1), \qquad \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2} t^{n-1} = t^2 \mathcal{A}(t),$$

та підставивши ці вирази у (2), одержимо рівняння для знаходження генератриси $\mathcal{A}(t)$:

$$\mathcal{A}(t) = a_1 + a_2 t + t(\mathcal{A}(t) - a_1) + t^2 \mathcal{A}(t).$$

Звідки

$$\mathcal{A}(t) = \frac{(a_1 - a_2)t - a_1}{t^2 + t - 1}. \tag{3}$$

Розклавши функцію (3) в степеневий ряд, коефіцієнт при t^{n-1} буде шуканим a_n.

Врахувавши, що $t^2 + t - 1 = (t - t_1)(t - t_2)$, де $t_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $t_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $t_1 t_2 = -1$, $t_2 - t_1 = \sqrt{5}$, виконуємо розклад

$$\mathcal{A}(t) = \frac{(a_1 - a_2)t - a_1}{(t - t_1)(t - t_2)} = \frac{B_1}{t - t_1} + \frac{B_2}{t - t_2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{(a_2 - a_1)t_1 + a_1}{t - t_1} + \frac{(a_1 - a_2)t_2 - a_1}{t - t_2} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{a_2 - a_1 + \frac{a_1}{t_2}}{1 - \frac{t}{t_2}} - \frac{a_2 - a_1 + \frac{a_1}{t_1}}{1 - \frac{t}{t_1}} \right).$$

Оскільки $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ при $|x| < 1$. Тому при $|t| < |t_2|$ маємо $|t| < |t_1|$ і

$$\mathcal{A}(t) = \frac{a_2 - a_1 + \frac{a_1}{t_2}}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{t_2} \right)^n - \frac{a_2 - a_1 + \frac{a_1}{t_1}}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{t_1} \right)^n =$$

$$= \frac{a_2 - a_1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{t_2^n} - \frac{1}{t_1^n} \right) t^n + \frac{a_1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{t_2^{n+1}} - \frac{1}{t_1^{n+1}} \right) t^n =$$

$$= (a_2 - a_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n - \widehat{\varphi}^n}{\sqrt{5}} t^n + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{n+1} - \widehat{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}} t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left((a_2 - a_1) \frac{\varphi^n - \widehat{\varphi}^n}{\sqrt{5}} + a_1 \frac{\varphi^{n+1} - \widehat{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}} \right) t^n.$$

□

Наслідок 1. *Якщо* $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, *— класична послідовність Фібоначчі, то*

$$u_n = \frac{\varphi^{n+1} - \widehat{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

Наслідок 2. *Якщо* (a_n) *— послідовність Фібоначчі, то має місце рівність*

$$a_n = a_1 u_{n-3} + a_2 u_{n-2}, \tag{4}$$

де $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ *– класична послідовність Фібоначчі,* $u_{-1} = u_1 - u_0 = 0$, $u_{-2} = u_0 - u_{-1} = 1$.

Наслідок 3. *Якщо* (a_n) *— послідовність Фібоначчі така, що* $\frac{a_2}{a_1} \neq \widehat{\varphi}$, *то для довільного натурального* k *має місце рівність*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+k}}{a_n} = \varphi^k.$$

Наслідок 4. *Для* $n \geq 3$ *мають місце нерівності*

$$\frac{\varphi^{n-3}(a_1 + a_2\varphi)}{\sqrt{5}} < a_n < \frac{\varphi^{n-1}(a_1 + a_2\varphi)}{\sqrt{5}}. \tag{5}$$

Відомі властивості класичної послідовності Фібоначчі [**12**] і рівність (4) дозволяють отримати ряд властивостей довільної числової послідовності Фібоначчі.

Лема 1. *Для довільного* $n \in \mathbb{N}_0$ *та довільної послідовності Фібоначчі* (a_n), *відмінної від нуль-послідовності, такої, що* $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, *виконується рівність*

$$u_n = \frac{a_1 a_{n+3} - a_2 a_{n+2}}{a_1^2 + a_1 a_2 - a_2^2}. \tag{6}$$

Доведення. Для доведення леми 1 використаємо метод математичної індукції. При $n = 0$, перетворивши праву частину рівності (6), одержимо

$$\frac{a_1(a_1 + a_2) - a_2^2}{a_1^2 + a_1 a_2 - a_2^2} = \frac{a_1^2 + a_1 a_2 - a_2^2}{a_1^2 + a_1 a_2 - a_2^2} = 1 = u_0.$$

Тобто рівність (6) виконується.

Припустимо, що рівність (6) виконується при $n = k$

$$u_k = \frac{a_1 a_{k+3} - a_2 a_{k+2}}{a_1^2 + a_1 a_2 - a_2^2}$$

і покажемо, що тоді

$$u_{k+1} = \frac{a_1 a_{k+4} - a_2 a_{k+3}}{a_1^2 + a_1 a_2 - a_2^2}.$$

Згідно з означенням послідовності Фібоначчі та припущенням індукції, маємо

$$u_{k+1} = u_k + u_{k-1} = \frac{a_1 a_{k+3} - a_2 a_{k+2} + a_1 a_{k+2} - a_2 a_{k+1}}{a_1^2 + a_1 a_2 - a_2^2} =$$

$$= \frac{a_1(a_{k+3} + a_{k+2}) - a_2(a_{k+2} + a_{k+1})}{a_1^2 + a_1 a_2 - a_2^2} = \frac{a_1 a_{k+4} - a_2 a_{k+3}}{a_1^2 + a_1 a_2 - a_2^2}.$$

Отже, рівність (6) має місце для довільного $n \in \mathbb{N}_0$. Причому, з того, що $a_1^2 + a_1 a_2 - a_2^2 \neq 0$, маємо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. □

Лема 2. *Нехай* (a_n) *— довільна послідовність Фібоначчі. Якщо існує* $k \in \mathbb{N}$ *таке, що* $a_k = 0$ *і* $a_{k+1} \neq 0$, *то*

$$a_{k+m} = u_{m-1} \cdot a_{k+1}, \quad 2 \leq m \in \mathbb{N}.$$

Доведення. З того, що $a_k = 0$ і $a_{k+1} \neq 0$ маємо

$$a_{k+2} = a_k + a_{k+1} = a_{k+1} = u_1 a_{k+1},$$

$$a_{k+3} = a_{k+1} + a_{k+2} = u_0 a_{k+1} + u_1 a_{k+1} = u_2 a_{k+1},$$

$$a_{k+4} = a_{k+2} + a_{k+3} = u_1 a_{k+1} + u_2 a_{k+1} = u_3 a_{k+1},$$

$$\ldots,$$

$$a_{k+m} = a_{k+m-2} + a_{k+m-1} = u_{m-3} a_{k+1} + u_{m-2} a_{k+1} = u_{m-1} a_{k+1},$$

де $(u_{m-1})_{m=2}^{\infty}$ — класична послідовність Фібоначчі (без члена u_0). □

Наслідок 5. *Якщо k-ий член a_k, послідовності Фібоначчі (a_n) дорівнює нулю і $a_{k+1} \neq 0$, то для довільного натурального $n > k+1$ має місце нерівність*

$$a_n \cdot a_{k+1} > 0,$$

тобто всі члени послідовності Фібоначчі, починаючи з $(k+1)$-го мають однаковий знак.

Наслідок 6. *Якщо послідовність Фібоначчі (a_n), відмінна від нуль-послідовності, містить нуль, то $|a_n| \to \infty$ при $n \to \infty$.*

Наслідок 7. *Довільна послідовність Фібоначчі, відмінна від нуль-послідовності, може містити не більше одного нуля.*

Лема 3. *Для того, щоб в послідовності Фібоначчі n-ий член $(n > 2)$ був рівним числу r, необхідно і достатньо, щоб*

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{r}{a_2 u_{n-3}} - \frac{u_{n-2}}{u_{n-3}}. \tag{7}$$

Доведення. Нехай існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що $a_n = r$. Тоді, враховуючи рівність (4), маємо

$$r = a_1 u_{n-3} + a_2 u_{n-2} \;\Leftrightarrow\; r = a_2 u_{n-3} \cdot \frac{a_1}{a_2} + a_2 u_{n-2} \;\Leftrightarrow\; \frac{r - a_2 u_{n-2}}{a_2 u_{n-3}} = \frac{a_1}{a_2},$$

що рівносильно (7).

Нехай для деякого $n > 2$ має місце рівність (7), яку можна переписати у вигляді

$$a_2 = \frac{r}{u_{n-2}} - \frac{u_{n-3}}{u_{n-2}} a_1.$$

Доведемо методом математичної індукції, що тоді для довільного натурального $k > 2$ має місце рівність

$$a_k = \frac{a_1(u_{k-3}u_{n-2} - u_{k-2}u_{n-3}) + u_{k-2} r}{u_{n-2}}. \tag{8}$$

При $k = 3$, перетворивши праву частину рівності (8), отримаємо

$$\frac{a_1(u_0 u_{n-2} - u_1 u_{n-3}) + u_1 r}{u_{n-2}} = a_1 + \frac{r - a_1 u_{n-3}}{u_{n-2}} = a_1 + a_2 = a_3.$$

Тобто рівність (8) виконується.

Припустимо, що рівність (8) виконується при $k = m$,

$$a_m = \frac{a_1(u_{m-3}u_{n-2} - u_{m-2}u_{n-3}) + u_{m-2} r}{u_{n-2}}$$

і покажемо, що тоді

$$a_{m+1} = \frac{a_1(u_{m-2}u_{n-2} - u_{m-1}u_{n-3}) + u_{m-1} r}{u_{n-2}}.$$

Використовуючи рекурентні співвідношення (1) та припущення індукції, можемо записати

$$a_{m+1}=a_m+a_{m-1}=\frac{a_1(u_{m-3}u_{n-2}-u_{m-2}u_{n-3})+u_{m-2}r+a_1(u_{m-4}u_{n-2}-u_{m-3}u_{n-3})+u_{m-3}r}{u_{n-2}}=$$

$$=\frac{a_1\left((u_{m-3}+u_{m-4})u_{n-2}-(u_{m-2}+u_{m-3})u_{n-3}\right)+(u_{m-2}+u_{m-3})r}{u_{n-2}}=$$

$$=\frac{a_1(u_{m-2}u_{n-2}-u_{m-1}u_{n-3})+u_{m-1}r}{u_{n-2}}.$$

Таким чином, рівність (8) має місце для довільного натурального $k>2$. При $k=n$ з рівності (8) отримуємо $a_n=r$, що й вимагалось довести. □

Наслідок 8. *Якщо послідовність Фібоначчі* (a_n), $n>2$, *містить дійсне число* r, *то її загальний член виражається рівністю* (8).

Наслідок 9. *Послідовність Фібоначчі* (a_n), $n>2$, *містить нуль* (*а саме* $a_k=0$) *тоді і тільки тоді, коли для деякого натурального* k *виконується рівність*

$$\frac{a_1}{a_2}=-\frac{u_{k-2}}{u_{k-3}}.$$

2. Простір послідовностей Фібоначчі

Нехай

$$\mathcal{F}=\{(a_n):\ a_1,a_2\in\mathbb{R},\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2},n\geq 3\}$$

— множина всіх послідовностей Фібоначчі.

Для елементів множини $\mathcal{F}$ введемо лінійні операції (додавання та множення на скаляр) за законами:

$$(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)\ \text{ і }\ \lambda(a_n)=(\lambda a_n),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Оскільки бінарна операція додавання є замкненою (алгебраїчною):

$$a_n+b_n=a_{n-1}+a_{n-2}+b_{n-1}+b_{n-2}=\left[a_{n-1}+b_{n-1}\right]+\left[a_{n-2}+b_{n-2}\right],$$

то легко бачити, що множина $\mathcal{F}$ разом з операцією додавання є *комутативною групою*, нейтральним елементом якої є нуль-послідовність (0), а симетричним (протилежним) елементом для послідовності (a_n) є послідовність $(-a_n)$.

Враховуючи, що

$$\lambda a_n=\lambda\left[a_{n-1}+a_{n-2}\right]=\lambda a_{n-1}+\lambda a_{n-2},\quad \forall\ n\in\mathbb{N},$$

то нескладно бачити, що множина $\mathcal{F}$ разом з операціями додавання та множення на скаляр є *лінійним* (*векторним*) *простором*. Це є підставою називати елементи множини $\mathcal{F}$ векторами і вживати позначення $(a_n)=\overrightarrow{a}$.

Надалі $\overrightarrow{e_1} = (1,\ 0,\ u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots)$, $\overrightarrow{e_2} = (0,\ u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots)$, де $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ — класична послідовність Фібоначчі.

Лема 4. *Вектори $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ є лінійно незалежними і для довільного $\overrightarrow{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots) \in \mathcal{F}$ має місце рівність*

$$\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}. \tag{9}$$

Доведення. Легко бачити, що рівність $\alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{0}$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Отже, вектори $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ є лінійно незалежними.

Нехай $\overrightarrow{x} = (x_n)$ — довільно вибраний елемент з $\mathcal{F}$. Тоді, за наслідком 2, для $n \geq 3$ має місце рівність $x_n = x_1u_{n-3} + x_2u_{n-2}$, яка рівносильна рівності (9). □

Наслідок 10. *Впорядкована пара векторів $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ утворює базис, в якому вектор $\overrightarrow{x} = (x_n)$ має координати $(x_1; x_2)$.*

Теорема 2. *Множина $\mathcal{F}$ разом з операціями додавання та множення на скаляр, тобто математична структура $(\mathcal{F}, +, \lambda(\cdot))$, є двовимірним векторним простором.*

2.1. Оператор зсуву. У векторному просторі $(\mathcal{F}, +, \lambda(\cdot))$ розглянемо оператор

$$L(\overrightarrow{x}) = (x_2,\ x_3,\ \ldots)\,,$$

де $\overrightarrow{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots x_k, \ldots) \in \mathcal{F}$, $k \in \mathbb{N}$, який назвемо *оператором зсуву.*

Очевидно, що оператор зсуву є лінійним, тобто

$$L\,(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = L\,(\overrightarrow{x}) + L\,(\overrightarrow{y}) \quad \text{і} \quad L\,(\lambda\overrightarrow{x}) = \lambda L\,(\overrightarrow{x})\,.$$

Нехай $L^{(k)}(\cdot)$ — k-й степінь оператора L, тобто

$$L^{(k)}(\overrightarrow{x}) = L\,(L\,(\ \ldots\ L(x))) = (x_{k+1},\ x_{k+2},\ \ldots)\,.$$

Лема 5. *При довільному натуральному k два вектори $\overrightarrow{s} = (s_1,\ s_2,\ \ldots)$ і $L^{(k)}(\overrightarrow{s}) = (s_{k+1},\ s_{k+2},\ \ldots)$ з $\mathcal{F}$ є лінійно залежними тоді і тільки тоді, коли $s_2 = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}s_1$.*

Доведення. Нехай k — фіксоване натуральне число. Векторна рівність

$$\gamma_1\overrightarrow{s} + \gamma_2L^{(k)}(\overrightarrow{s}) = \overrightarrow{0} \tag{10}$$

еквівалентна системі рівнянь

$$\gamma_1s_n + \gamma_2s_{k+n} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots\ .$$

Оскільки всі рівняння системи, починаючи з третього, є наслідком перших двох, то остання система рівнянь рівносильна системі

$$\begin{cases} \gamma_1s_1 + \gamma_2s_{k+1} = 0, \\ \gamma_1s_2 + \gamma_2s_{k+2} = 0. \end{cases}$$

З курсу лінійної алгебри відомо, що система двох лінійних однорідних рівнянь з двома невідомими має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_{k+1} \\ s_2 & s_{k+2} \end{vmatrix} = 0,$$

що рівносильно рівності $s_1 s_{k+2} - s_2 s_{k+1} = 0$.

Врахувавши (4), перепишемо останню рівність у вигляді

$$s_1 (s_1 u_{k-1} + s_2 u_k) - s_2 (s_1 u_{k-2} + s_2 u_{k-1}) = 0.$$

Звідки

$$s_1^2 u_{k-1} - s_2^2 u_{k-1} + s_1 s_2 u_{k-1} = 0$$

і

$$s_2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} s_1, \tag{11}$$

оскільки $u_{k-1} \neq 0$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. □

Наслідок 11. *Якщо вектори $\overrightarrow{s}$ і $L^{(k)}(\overrightarrow{s})$ з $\mathcal{F}$ є лінійно залежними, то для довільного натурального k має місце рівність*

$$L^{(k)}(\overrightarrow{s}) = \left(u_{k-2} + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} u_{k-1} \right) \overrightarrow{s}.$$

Доведення. Оскільки вектори $\overrightarrow{s}$ і $L^{(k)}(\overrightarrow{s})$ є лінійно залежними, то враховуючи рівність (11), їх можна переписати у вигляді

$$\overrightarrow{s} = \left(\left(u_{n-3} + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} u_{n-2} \right) s_1 \right)_{n=1}^{\infty},$$

$$L^{(k)}(\overrightarrow{s}) = \left(\left(u_{n-2} + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} u_{n-1} \right) s_1 \right)_{n=k}^{\infty} = \left(\left(u_{n+k-3} + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} u_{n+k-2} \right) s_1 \right)_{n=1}^{\infty}.$$

Нескладно довести [**12**], що для членів класичної послідовності Фібоначчі $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ виконується рівність

$$u_{n+m} = u_{n-1} u_{m-1} + u_n u_m, \quad m \in N. \tag{12}$$

Розглянемо добуток

$$\left(u_{k-2} + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} u_{k-1} \right) \overrightarrow{s} = \left(\left(u_{k-2} + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} u_{k-1} \right) \left(u_{n-3} + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} u_{n-2} \right) s_1 \right)_{n=1}^{\infty} =$$

$$= \left(\left(u_{k-2} u_{n-3} + u_{k-1} u_{n-2} + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} (u_{k-2} u_{n-2} + u_{k-1} u_{n-2} + u_{k-1} u_{n-3}) \right) s_1 \right)_{n=1}^{\infty}.$$

Використовуючи (12), останню рівність перепишемо у вигляді

$$\left(u_{k-2}+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}u_{k-1}\right)\overrightarrow{s}=\left(\left(u_{n+k-3}+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}(u_k u_{n-2}+u_{k-1}u_{n-3})\right)s_1\right)_{n=1}^{\infty}=$$

$$=\left(\left(u_{n+k-3}+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}u_{n+k-2}\right)s_1\right)_{n=1}^{\infty}=L^{(k)}(\overrightarrow{s}).$$

□

Наслідок 12. *Для довільного натурального k вектори $\overrightarrow{s}$ і $L^{(k)}(\overrightarrow{s})$ лінійно незалежні тоді і тільки тоді, коли $s_2\neq\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}s_1$.*

Наслідок 13. *Впорядкована пара векторів $\overrightarrow{s}=(s_1,\ s_2,\ \ldots)$, $L^{(k)}(\overrightarrow{s})=(s_{k+1},\ s_{k+2},\ \ldots)$, де $s_2\neq\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}s_1$, є базисом лінійного простору $\mathcal{F}$.*

Відповідь на питання про зв'язок між координатами вектора в різних базисах дає наступне твердження.

Теорема 3. *Якщо вектор $\overrightarrow{x}$ в базисі $\langle\overrightarrow{e}_1,\overrightarrow{e}_2\rangle$ має координати $(x_1;x_2)$, а в базисі $\left\langle\overrightarrow{s},L^{(k)}(\overrightarrow{s})\right\rangle$ — $(x_1';x_2')$, то*

$$\begin{cases} x_1=s_1x_1'+s_{k+1}x_2',\\ x_2=s_2x_1'+s_{k+2}x_2'.\end{cases}\tag{13}$$

Зауважимо, що $\ker L^{(k)}=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$, а отже, оператор $L^{(k)}$ є невиродженим, і його матриця в базисі $\langle\overrightarrow{e}_1,\ \overrightarrow{e}_2\rangle$ має вигляд $\begin{pmatrix} u_{k-2} & u_{k-1}\\ u_{k-1} & u_k\end{pmatrix}$.

2.2. Підпростір нескінченно малих послідовностей Фібоначчі.

Теорема 4. *Нескінченно малі послідовності Фібоначчі утворюють одновимірний підпростір векторного простору $(\mathcal{F},+,\lambda(\cdot))$.*

Доведення. Нехай Q — це множина всіх нескінченно малих послідовностей Фібоначчі, тобто

$$Q=\left\{(b_n):\ b_n=b_{n-1}+b_{n-2},\ b_n\to 0\ (n\to\infty)\right\}.$$

Оскільки послідовність $(\widehat{\varphi}^n)_{n=0}^{\infty}=(1,\ \widehat{\varphi},\ \widehat{\varphi}^2,\ \ldots\widehat{\varphi}^n,\ \ldots)\in Q$, де $\widehat{\varphi}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, то Q містить елементи, відмінні від нуль-послідовності.

Враховуючи, що $Q\subset\mathcal{F}$ і виконуються наступні умови:
1) для довільних $(b_n^{(1)}),(b_n^{(2)})\in Q$ має місце включення $(b_n^{(1)})+(b_n^{(2)})\in Q$;
2) для довільних $\lambda\in R$ і $(b_n)\in Q$ має місце включення $\lambda(b_n)\in Q$;
робимо висновок, що Q є підпростором лінійного простору $\mathcal{F}$. Оскільки класична

послідовність Фібоначчі $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$ не належить Q, то $Q \neq \mathcal{F}$, а, отже, Q є одновимірним підпростором. $\square$

Теорема 5. *Підмножина $\mathcal{F}^1$ множини $\mathcal{F}$ таких послідовностей (a_n), для яких ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, утворює одновимірний лінійний підпростір, який співпадає з підпростором нескінченно малих послідовностей Фібоначчі.*

Доведення. Покажемо, що $\mathcal{F}^1$ задовольняє означення підпростору.

Нагадаємо, що для двох збіжних рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ та довільних дійсних чисел α і β має місце рівність

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) . \tag{14}$$

Тоді з рівності (14) випливає, що множина $\mathcal{F}^1$ є підпростором простору $\mathcal{F}$ згідно з означенням. Оскільки класична послідовність Фібоначчі не належить $\mathcal{F}^1$, то $\mathcal{F}^1 \neq \mathcal{F}$. Звідки випливає, що $\mathcal{F}^1$ — одновимірний підпростір.

Розглянемо $(\lambda \widehat{\varphi}^{n-1})_{n=1}^{\infty}$ — нескінченно мала збіжна послідовність Фібоначчі. Тоді з того, що $(\lambda \widehat{\varphi}^{n-1})_{n=1}^{\infty} \in Q \bigcap \mathcal{F}^1$ маємо $Q = \mathcal{F}^1$. $\square$

Наслідок 14. *Одновимірний підпростір нескінченно малих послідовностей Фібоначчі $\mathcal{F}^1$ є інваріантним підпростором оператора зсуву L і довільного його степеня.*

Зазначимо також, що існує ще рівно один, інваріантний відносно оператора зсуву L і довільного його степеня, одновимірний підпростір, який породжений послідовністю $(1,\ \varphi,\ \varphi^2,\ \ldots)$.

3. Евклідовість та повнота простору послідовностей Фібоначчі

Існують різні способи нормування скінченновимірних лінійних просторів над полем дійсних чисел. Традиційно норма вводиться через скалярний добуток.

Для визначення скалярного добутку використаємо фіксований раніше вибраний базис $\langle \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2 \rangle$. Тоді для довільних елементів $\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y} \in \mathcal{F}$, їх скалярний добуток може бути означений як сума добутків однойменних координат даних векторів у вказаному базисі:

$$\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 . \tag{15}$$

Коректність даного означення (тобто виконання аксіом скалярного добутку) є очевидною.

Тоді норма в просторі $\langle \mathcal{F}, +, \lambda(\cdot), \bullet \rangle$ визначається як функціонал

$$\| \overrightarrow{x} \| = \sqrt{\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \tag{16}$$

для якого, очевидно, виконуються аксіоми норми:

(1) $\|\overrightarrow{x}\| \geq 0;\quad \|\overrightarrow{x}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0};$

(2) $\|\lambda\overrightarrow{x}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{x}\|, \quad \lambda \in \mathbb{R};$

(3) $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leq \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|.$

Виконання властивостей (1) і (2) випливає з властивостей скалярного добутку. А виконання властивості (3) (нерівності трикутника) випливає з нерівності Коші-Буняковського

$$(\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{y})^2 \leq (\overrightarrow{x} \bullet \overrightarrow{x})(\overrightarrow{y} \bullet \overrightarrow{y}).$$

Оскільки в базисі $\langle\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\rangle$ — $\overrightarrow{e_1} = (1;\ 0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0;\ 1)$, то використовуючи рівності (15) і (16), нескладно переконатися, що вибраний базис є ортонормованим.

Скалярний добуток, визначений в ортонормованому базисі рівністю (15), назвемо *природним.*

Будь-який евклідовий простір можна метризувати, ввівши в ньому відстань між елементами $\overrightarrow{x}$ і $\overrightarrow{y}$ наступним чином

$$\rho(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}. \tag{17}$$

Тоді виконання аксіом метричного простору випливає з властивостей (1) — (3) норми.

ЗАУВАЖЕННЯ 1. *Простір* $(\mathcal{F}, +, \lambda(\cdot), \bullet)$ *є повним (як довільний скінченновимірний нормований простір)* [**11**, ст. 174].

4. s-норма та s-метрика в просторі послідовностей Фібоначчі

Розглянемо інший спосіб нормування простору послідовностей Фібоначчі.

Нехай $1 < s$ — фіксоване натуральне число. Визначимо дійснозначну функцію $\gamma(\cdot, \cdot)$ двох змінних рівністю

$$\gamma(\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x} \circ \overrightarrow{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n y_n}{s^{2n}}. \tag{18}$$

Обгрунтуємо коректність так даного означення, тобто покажемо, що ряд (18) збігається для довільних $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ з $\mathcal{F}$.

Очевидно, що для $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ або $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$ функція $\gamma(\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y})$ є коректно визначеною. Нехай $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0} \neq \overrightarrow{y}$. Тоді можливі випадки.

1. З наслідку 5 випливає, що для довільної послідовності Фібоначчі, що не є нескінченно малою, існує номер $n_0 \in N$, починаючи з якого всі члени послідовності мають однаковий знак. Тому для довільних $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y} \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}^1$, починаючи з деякого $n_0 = \max\{k_0, m_0\}$, де $k_0 \in N$ таке, що для довільного натурального $k \geq k_0$ всі x_k

одного знаку, $m_0 \in N$ таке, що для довільного натурального $m \geq m_0$ всі y_m одного знаку, члени ряду (18) матимуть однаковий знак. Тобто ряд

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{x_n y_n}{s^{2n}} \tag{19}$$

є знакосталим і його збіжність рівносильна збіжності ряду(18).

Для дослідження ряду (19) на збіжність скористаємося ознакою Д'Аламбера. Розглянемо границю відношення

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}y_{n+1}}{s^{2n+2}} \cdot \frac{s^{2n}}{x_n y_n} = \frac{1}{s^2} \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \cdot \frac{y_{n+1}}{y_n} =$$
$$= \frac{1}{s^2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_1 u_{n-2} + x_2 u_{n-1}}{x_1 u_{n-3} + x_2 u_{n-2}} \cdot \frac{y_1 u_{n-2} + y_2 u_{n-1}}{y_1 u_{n-3} + y_2 u_{n-2}} \right) =$$
$$= \frac{1}{s^2} \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \right)^2 \cdot \left(\frac{x_1 \frac{u_{n-2}}{u_{n-1}} + x_2}{x_1 \frac{u_{n-3}}{u_{n-2}} + x_2} \right) \cdot \left(\frac{y_1 \frac{u_{n-2}}{u_{n-1}} + y_2}{y_1 \frac{u_{n-3}}{u_{n-2}} + y_2} \right) \right] = \left(\frac{\varphi}{s} \right)^2 < 1.$$

Отже, права частина рівності (18) є дійсним числом.

2. Нехай $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathcal{F}^1$. Тоді $(x_n) = (\lambda_1 \widehat{\varphi}^{n-1})$, $(y_n) = (\lambda_2 \widehat{\varphi}^{n-1})$, де $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$ і права частина рівності (18) може бути переписана у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n y_n}{s^{2n}} = \lambda_1 \lambda_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{\varphi}^{2n-2}}{s^{2n}} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\widehat{\varphi}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\widehat{\varphi}^2}{s^2} \right)^n = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{s^2 - \widehat{\varphi}^2}.$$

Отриманий ряд є сумою геометричної прогресії. Для її збіжності необхідно і достатньо, щоб виконувалась нерівність $\frac{\widehat{\varphi}^2}{s^2} < 1$. Очевидно, що при $s > 1$ остання нерівність виконується. Отже, права частина рівності (18) знову є дійсним числом.

3. Нехай $\overrightarrow{x} \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}^1$, $\overrightarrow{y} \in \mathcal{F}^1$. Тоді $(y_n) = (\lambda \widehat{\varphi}^{n-1})$, $n \in N$, і як випливає з попередніх міркувань, існує натуральне число n_0 таке, що ряд (19) є знакозмінним.

Зрозуміло, що ряд (18) збігається, якщо збігається ряд (19). Дослідимо останній на збіжність. Перевіримо виконання наступних умов:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n y_n}{s^{2n}} = 0$;

(2) $\dfrac{|x_{n+1} y_{n+1}|}{s^{2n+2}} \leq \dfrac{|x_n y_n|}{s^{2n}}$ для довільного $n \in N$.

Обчислимо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n}{s^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 u_{n-3} + x_2 u_{n-2}}{s^{2n}} \cdot \widehat{\varphi}^{n-1} = x_1 \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n-3}}{s^{2n}} \widehat{\varphi}^{n-1} + x_2 \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n-2}}{s^{2n}} \widehat{\varphi}^{n-1}.$$

Нескладно довести, що для довільного $n \in N$ має місце нерівність $u_n < 2^n$. Тоді, очевидно, що для довільного $n \in N$, виконуються наступні нерівності

$$u_{n-3} < s^n \quad \text{і} \quad u_{n-2} < s^n.$$

А, отже,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n-3}}{s^{2n}} \widehat{\varphi}^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n-2}}{s^{2n}} \widehat{\varphi}^{n-1} = 0$$

(як границя добутку обмеженої і нескінченно малої послідовностей) і умова (1) виконується.

Покажемо, що послідовність $\left(\dfrac{|x_n y_n|}{s^{2n}}\right)$ є незростаючою. Для цього розглянемо відношення

$$\frac{|x_{n+1}y_{n+1}|\,/s^{2n+2}}{|x_n y_n|\,/s^{2n}} = \left|\frac{x_{n+1}y_{n+1}}{x_n y_n}\right| \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{x_{n+1}}{x_n} \cdot \left|\frac{\lambda\widehat{\varphi}^n}{\lambda\widehat{\varphi}^{n-1}}\right| \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{x_{n+1}}{x_n} \cdot \frac{|\widehat{\varphi}|}{s^2}.$$

З наслідку 3 випливає, що для довільної послідовності Фібоначчі, відмінної від нескінченно малої, має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \varphi.$$

Отже,

$$\frac{|\widehat{\varphi}|}{s^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1,$$

тобто умова (2) має місце. Тоді, за ознакою Лейбніца, з виконання умов (1) і (2) випливає, що права частина рівності (18) є дійсним числом.

З вище викладеного випливає, що ряд (18) збігається при довільних $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ з $\mathcal{F}$.

Нескладно переконатися, що означена рівністю (18) дійснозначна функція є *скалярним добутком елементів* $\overrightarrow{x}$ *і* $\overrightarrow{y}$ *з* $\mathcal{F}$, оскільки задовольняє аксіоми скалярного добутку:

(1) $\gamma(\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y}) = \gamma(\overrightarrow{y},\ \overrightarrow{x})$;
(2) $\gamma\left(\overrightarrow{x}^{(1)} + \overrightarrow{x}^{(2)},\ \overrightarrow{y}\right) = \gamma\left(\overrightarrow{x}^{(1)},\ \overrightarrow{y}\right) + \gamma\left(\overrightarrow{x}^{(2)},\ \overrightarrow{y}\right)$;
(3) $\gamma(\lambda\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y}) = \gamma(\overrightarrow{x},\ \lambda\overrightarrow{y}) = \lambda\gamma(\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y})$;
(4) $\gamma(\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{x}) \geq 0$, причому $\gamma(\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{x}) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

Норму в евклідовому просторі $(\mathcal{F}, +, \lambda(\cdot), \circ)$ визначимо як функціонал

$$\|\overrightarrow{x}\|_s = \sqrt{\overrightarrow{x} \circ \overrightarrow{x}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{s^{2n}}}. \tag{20}$$

Норму, визначену рівністю (20), називатимемо *s-нормою.*

Оскільки всі норми в скінченновимірному векторному просторі є еквівалентними [**17**, ст. 151], то s-норма еквівалентна нормі, породженій природним скалярним добутком.

Метрику в евклідовому нормованому просторі $\mathcal{F}$ означимо стандартним способом

$$\rho_s(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \rho_s = \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|_s = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_n - y_n)^2}{s^{2n}}}, \tag{21}$$

де $\overrightarrow{x} = (x_n)$, $\overrightarrow{y} = (y_n) \in \mathcal{F}$. Отже, $(\mathcal{F}, \rho_s)$ — метричний простір.

Метрику, визначену рівністю (21), називатимемо *s-метрикою.*

Теорема 6. *Метричний простір* $(\mathcal{F}, \rho_s)$ *є повним.*

Теорема 6 є наслідком скінченновимірності та нормованості простору $(\mathcal{F}, +, \lambda(\cdot), \circ)$ [**11**, ст. 174].

5. Ортогоналізація базису

Розглянемо питання ортогоналізації базису в просторі послідовностей Фібоначчі, коли скалярний добуток в ньому означається рівністю(18).

Найбільш відомим методом ортогоналізації, за допомогою якого по лінійно незалежній системі векторів $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ будується ортогональна система векторів $\overrightarrow{\varphi_1}$, $\overrightarrow{\varphi_2}$ є алгоритм Грама-Шмідта [**13**]. Його суть полягає в наступному: покладемо

$$\overrightarrow{\varphi_1} = \overrightarrow{e_1}, \quad \overrightarrow{\varphi_2} = \overrightarrow{e_2} - \left(\frac{\overrightarrow{\varphi_1} \circ \overrightarrow{e_2}}{\overrightarrow{\varphi_1} \circ \overrightarrow{\varphi_1}}\right) \overrightarrow{\varphi_1} = \overrightarrow{e_2} - \left(\frac{\overrightarrow{e_1} \circ \overrightarrow{e_2}}{\overrightarrow{e_1} \circ \overrightarrow{e_1}}\right) \overrightarrow{e_1}.$$

Обчислимо $\overrightarrow{e_1} \circ \overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2} \circ \overrightarrow{e_2}$ та $\overrightarrow{e_1} \circ \overrightarrow{e_2}$.

Враховуючи (18) та (20), можемо записати

$$\overrightarrow{e_1} \circ \overrightarrow{e_1} = \|\overrightarrow{e_1}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n-3}^2}{s^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{u_{n-3}}{s^n}\right)^2, \tag{22}$$

де $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ – класична послідовність Фібоначчі, $u_{-1} = 0$, $u_{-2} = 1$.

Розглянемо числову послідовність $\left(u_{n-3}^2\right)$, $n \in N$. Генератриса цієї числової послідовності має вигляд

$$G_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n-3}^2 t^n = u_{-2}^2 t + u_{-1}^2 t^2 + u_0^2 t^3 + \cdots = t + \sum_{n=2}^{\infty} u_{n-3}^2 t^n. \tag{23}$$

Враховуючи, що

$$u_{n-3}^2 = (u_{n-2} - u_{n-4})^2 = u_{n-2}^2 + u_{n-4}^2 - 2(u_{n-3}^2 - (-1)^{n-3}),$$

одержимо

$$u_{n-3}^2 = \frac{1}{3}\left(u_{n-2}^2 + u_{n-4}^2 - 2(-1)^n\right).$$

Тоді рівність (23) може бути переписана у вигляді

$$G_1(t) = t + \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} u_{n-2}^2 t^n + \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} u_{n-4}^2 t^n - \frac{2}{3}\sum_{n=2}^{\infty}(-t)^n. \tag{24}$$

Оскільки

$$\sum_{n=2}^{\infty} u_{n-2}^2 t^n = \frac{G_1(t) - t}{t}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} u_{n-4}^2 t^n = G_1(t)t, \quad \sum_{n=2}^{\infty}(-t)^n = \frac{t^2}{1+t}, \quad |t| < 1,$$

то рівність (24) можна переписати у вигляді

$$G_1(t) = t + \frac{1}{3}\left(\frac{G_1(t) - t}{t}\right) + \frac{1}{3}G_1(t)t - \frac{2t^2}{3(1+t)}.$$

Звідки

$$G_1(t) = \frac{t(t^2+2t-1)}{(1+t)(-t^2+3t-1)}.$$

Поклавши в останній рівності $t = 1/s^2$ одержимо

$$\overrightarrow{e_1} \circ \overrightarrow{e_1} = G_1\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{1+2s^2-s^4}{(1+s^2)(-1+3s^2-s^4)}. \tag{25}$$

Аналогічно, враховуючи (18) та (20), матимемо

$$\overrightarrow{e_2} \circ \overrightarrow{e_2} = \|\overrightarrow{e_2}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{u_{n-2}}{s^n}\right)^2. \tag{26}$$

Розглянемо числову послідовність $\left(u_{n-2}^2\right)$, $n \in N$. Генератриса цієї числової послідовності має вигляд

$$G_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n-2}^2 t^n = u_{-1}^2 t + u_0^2 t^2 + u_1^2 t^3 + \cdots = \frac{(G_1(t)-t)}{t} = \frac{t^3-t^2}{(1+t)(-t^2+3t-1)}.$$

Поклавши в останній рівності $t = 1/s^2$ одержимо

$$\overrightarrow{e_2} \circ \overrightarrow{e_2} = G_2\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{1-s^2}{(1+s^2)(-1+3s^2-s^4)}. \tag{27}$$

Враховуючи (18), маємо

$$\overrightarrow{e_1} \circ \overrightarrow{e_2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n-3}u_{n-2}}{s^{2n}}. \tag{28}$$

Генератриса послідовності $(u_{n-3}u_{n-2})$, $n \in N$, матиме вигляд

$$G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n-3}u_{n-2}t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_{n-2}^2 - u_{n-3}^2 - (-1)^n\right) t^n = G_2(t) - G_1(t) + \frac{t}{1+t} = \tag{29}$$

$$= \frac{-t^3}{(1+t)(-t^2+3t-1)}.$$

Поклавши в останній рівності $t = 1/s^2$, одержимо

$$\overrightarrow{e_1} \circ \overrightarrow{e_2} = G\left(\frac{1}{s^2}\right) = -\frac{1}{(1+s^2)(-1+3s^2-s^4)}. \tag{30}$$

Тоді

$$\overrightarrow{\varphi}_2 = \overrightarrow{e}_2 - \frac{1}{s^4-2s^2-1}\overrightarrow{e}_1 =$$

$$= \left(-\frac{1}{s^4-2s^2-1};\ u_0;\ u_1 - \frac{u_0}{s^4-2s^2-1};\ \ldots;\ u_n - \frac{u_{n-1}}{s^4-2s^2-1};\ \ldots\right)$$

і $\langle \overrightarrow{\varphi}_1, \overrightarrow{\varphi}_2 \rangle$ – ортогональна система векторів.

Поклавши $\overrightarrow{g}_1 = \dfrac{\overrightarrow{\varphi}_1}{\|\overrightarrow{\varphi}_1\|}$, $\overrightarrow{g}_2 = \dfrac{\overrightarrow{\varphi}_2}{\|\overrightarrow{\varphi}_2\|}$, одержимо $\langle \overrightarrow{g}_1, \overrightarrow{g}_2 \rangle$ – ортонормовану систему векторів, де

$$\|\overrightarrow{\varphi}_1\|^2 = \overrightarrow{\varphi_1} \circ \overrightarrow{\varphi_1} = \frac{1+2s^2-s^4}{(1+s^2)(-1+3s^2-s^4)},$$
$$\|\overrightarrow{\varphi}_1\|^2 = \overrightarrow{\varphi_2} \circ \overrightarrow{\varphi_2} = \frac{s^2}{(1+s^2)(-1-2s^2+s^4)}.$$

Теорема 7. *Якщо* $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ *— лінійно незалежні вектори, і скалярний добуток в просторі* $(\mathcal{F}, +, \lambda(\cdot), \circ)$ *визначений рівністю* (18), *а норма вектора — рівністю* (20), *то впорядкована пара векторів* $(\overrightarrow{g}_1, \overrightarrow{g}_2)$, *де* $\overrightarrow{g}_1 = \dfrac{\overrightarrow{\varphi}_1}{\|\overrightarrow{\varphi}_1\|}$, $\overrightarrow{g}_2 = \dfrac{\overrightarrow{\varphi}_2}{\|\overrightarrow{\varphi}_2\|}$, $\overrightarrow{\varphi_1} = \overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{\varphi_2} = \overrightarrow{e_2} - \left(\frac{\overrightarrow{\varphi_1} \circ \overrightarrow{e_2}}{\overrightarrow{\varphi_1} \circ \overrightarrow{\varphi_1}}\right) \overrightarrow{\varphi_1}$, *утворює ортонормований базис.*

6. Міра Хаусдорфа і розмірність Хаусдорфа-Безиковича

Нагадаємо [**5**] означення α-міри Хаусдорфа і розмірності Хаусдорфа-Безиковича в довільному повному метричному просторі (M, ρ). Нехай E — довільна обмежена множина метричного простору M, α — задане додатне число. Число

$$H^{\alpha}(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} m_{\varepsilon}^{\alpha}(E) = \sup_{\varepsilon > 0} m_{\varepsilon}^{\alpha}(E),$$

де $m_{\varepsilon}^{\alpha}(E) = \inf\limits_{d(E_j) \le \varepsilon} \left\{ \sum\limits_j d^{\alpha}(E_j) \right\}$, $d(E_j)$ — діаметр множини E_j і інфімум береться за всіма не більш ніж зліченними ε-покриттями $\{E_j\}$ множини E непорожніми підмножинами E_j простору M, називається *α-мірною мірою Хаусдорфа множини E.*

Означення 2. Невід'ємне число

$$\alpha_{\rho}(E) = \sup\{\alpha : \ H^{\alpha}(E) = +\infty\} = \inf\{\alpha : \ H^{\alpha}(E) = 0\}$$

називається *розмірністю Хаусдорфа-Безиковича множини E.*

Нагадаємо, що *перетворенням подібності з коефіцієнтом* $k > 0$ метричного простору (M, ρ) називається бієктивне відображення g множини M на себе, при якому відстані між точками змінюються в одному і тому ж відношенні, тобто

$$\frac{\rho(g(x_1), g(x_2))}{\rho(x_1, x_2)} = k \quad \text{для довільних} \quad x_1, x_2 \in M.$$

Кажуть, що множина $E' \subset M$ *подібна* множині $E \subset M$ з *коефіцієнтом подібності* k, якщо існує перетворення подібності g з коефіцієнтом k, яке переводить множину E в E'.

Символічно це записується: $E \overset{k}{\sim} E'$.

Означення 3. Непорожня обмежена множина E метричного простору (M, ρ) називається *самоподібною*, якщо

$$\begin{array}{lll} 1) & E = E_1 \bigcup \ldots \bigcup E_n, & n > 1; \\ 2) & E_i \overset{k_i}{\sim} E, & i = \overline{1, n}; \\ 3) & \alpha_\rho \left(E_i \bigcap E_j\right) < \alpha_\rho\left(E\right), & \forall\, i \neq j. \end{array} \tag{31}$$

Означення 4. *Самоподібною розмірністю* самоподібної множини E (для якої виконуються умови (31)) називається число $\alpha_0 = \alpha_0(E)$, яке є розв'язком рівняння

$$k_1^x + k_2^x + \ldots + k_n^x = 1.$$

Відомо, що розмірність Хаусдорфа-Безиковича досконалої самоподібної множини евклідового простору співпадає з її самоподібною розмірністю.

Лема 6. *Евклідова метрика ρ, яка визначається рівністю* (17)*, і s-метрика ρ_s, яка визначається рівністю* (21)*, у просторі $\mathcal{F}$ є еквівалентними, причому*

$$\lambda_1 \leq \frac{\rho_s}{\rho} \leq \lambda_2, \tag{32}$$

де $\lambda_1 = \sqrt{\dfrac{s^4 - s^2 - 2 - \sqrt{(3s^2 - s^4)^2 + 4}}{2(1 + s^2)(s^4 - 3s^2 + 1)}}$, $\lambda_2 = \sqrt{\dfrac{s^4 - s^2 - 2 + \sqrt{(3s^2 - s^4)^2 + 4}}{2(1 + s^2)(s^4 - 3s^2 + 1)}}$.

Доведення. Використовуючи співвідношення (4), перепишемо рівність (21) у вигляді

$$\rho_s = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(x_1 u_{n-3} + x_2 u_{n-2} - y_1 u_{n-3} - y_2 u_{n-2}\right)^2}{s^{2n}}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left((x_1 - y_1) u_{n-3} + (x_2 - y_2) u_{n-2}\right)^2}{s^{2n}}} =$$

$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n-3}^2}{s^{2n}} + (x_2 - y_2)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n-2}^2}{s^{2n}} + 2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n-3} u_{n-2}}{s^{2n}}}.$$

Врахувавши рівності (22) і (25), (26) і (27), (28) і (30), остання рівність набуде вигляду

$$\rho_s = \sqrt{\frac{(x_1 - y_1)^2 (1 + 2s^2 - s^4) + (x_2 - y_2)^2 (1 - s^2) - 2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)}{(1 + s^2)(-1 + 3s^2 - s^4)}} =$$

$$= \lambda \cdot \sqrt{(s^4 - 2s^2 - 1)(x_1 - y_1)^2 + 2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + (s^2 - 1)(x_2 - y_2)^2},$$

де $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{(1 + s^2)(s^4 - 3s^2 + 1)}}$. Тоді

$$\frac{\rho_s}{\rho} = \lambda \cdot \sqrt{\frac{(s^4 - 2s^2 - 1)(x_1 - y_1)^2 + 2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + (s^2 - 1)(x_2 - y_2)^2}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}}. \tag{33}$$

Оскільки $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{y}$, то $x_1 \neq y_1$ або $x_2 \neq y_2$.

Розглянемо випадок, коли $x_1 \neq y_1$. Тоді рівність (33) можна переписати у вигляді

$$\frac{\rho_s}{\rho} = \lambda f(u), \quad \text{де} \quad f(u) = \sqrt{\frac{(s^2-1)u^2+2u+s^4-2s^2-1}{1+u^2}}, \quad u = \frac{x_2-y_2}{x_1-y_1}.$$

Знайдемо найбільше і найменше значення функції $f(u)$.

Оскільки $(s^2-1)u^2+2u+s^4-2s^2-1 > 0$ для довільного $u \in \mathbb{R}$, то функція $f(u)$ визначена на множині дійсних чисел. Продиференціювавши $f(u)$, одержимо

$$f'(u) = \frac{-u^2+(3s^2-s^4)u+1}{\sqrt{(s^2-1)u^2+2u+s^4-2s^2-1}\cdot(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Рівність $f'(u) = 0$ рівносильна рівнянню $-u^2+(3s^2-s^4)u+1 = 0$, яке має два дійсних корені —

$$u_1 = \frac{3s^2-s^4+\sqrt{(3s^2-s^4)^2+4}}{2} > 0, \quad u_2 = \frac{3s^2-s^4-\sqrt{(3s^2-s^4)^2+4}}{2} < 0.$$

З'ясувавши знак похідної на проміжках монотонності, встановлюємо, що в точці $u = u_1$ функція $f(u)$ набуває свого найбільшого, а в точці $u = u_2$ — найменшого значень. Отже, для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathcal{F}$ таких, що $x_1 \neq y_1$, виконуються нерівності

$$\lambda f(u_2) \leq \lambda f(u) = \frac{\rho_s}{\rho} \leq \lambda f(u_1). \tag{34}$$

Аналогічно, для випадку, коли $x_2 \neq y_2$, рівність (33) може бути переписана у вигляді

$$\frac{\rho_s}{\rho} = \lambda g(v), \quad \text{де} \quad g(v) = \sqrt{\frac{(s^4-2s^2-1)v^2+2v+s^2-1}{1+v^2}}, \quad v = \frac{x_1-y_1}{x_2-y_2}.$$

Знайдемо найбільше і найменше значення функції $g(v)$.

Оскільки $(s^4-2s^2-1)v^2+2v+s^2-1 > 0$ для довільного $v \in \mathbb{R}$, то функція $g(v)$ визначена на множині дійсних чисел. Продиференціювавши $g(v)$, одержимо

$$g'(v) = \frac{-v^2+(s^4-3s^2)v+1}{\sqrt{(s^4-2s^2-1)v^2+2v+s^2-1}\cdot(1+v^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Рівність $g'(v) = 0$ рівносильна рівнянню $-v^2+(s^4-3s^2)v+1 = 0$, яке має два дійсних корені —

$$v_1 = \frac{s^4-3s^2+\sqrt{(s^4-3s^2)^2+4}}{2} > 0,$$
$$v_2 = \frac{s^4-3s^2-\sqrt{(s^4-3s^2)^2+4}}{2} < 0.$$

З'ясувавши знак похідної $g'(v)$ на проміжках монотонності, встановлюємо, що в точці $v = v_1$ функція $g(v)$ набуває свого найбільшого, а в точці $v = v_2$ — найменшого значень. Тобто, для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathcal{F}$ таких, що $x_2 \neq y_2$, виконуються нерівності

$$\lambda g(v_2) \leq \lambda g(v) = \frac{\rho_s}{\rho} \leq \lambda g(v_1). \tag{35}$$

З нерівностей (34) і (35) випливає, що для довільних $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathcal{F}$ таких, що $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{y}$, мають місце нерівності

$$\lambda \cdot \min\{f(u_2), g(v_2)\} \leq \frac{\rho_s}{\rho} \leq \lambda \cdot \max\{f(u_1), g(v_1)\}. \tag{36}$$

Знайдемо $\min\{f(u_2), g(v_2)\}$ і $\max\{f(u_1), g(v_1)\}$. Шляхом безпосередньої підстановки одержуємо

$$f(u_1) = \sqrt{s^2 - 1 + \frac{4\sqrt{(3s^2 - s^4)^2 + 4}}{4 + \left(3s^2 - s^4 + \sqrt{(3s^2 - s^4)^2 + 4}\right)^2}}, \tag{37}$$

$$f(u_2) = \sqrt{s^2 - 1 - \frac{4\sqrt{(3s^2 - s^4)^2 + 4}}{4 + \left(3s^2 - s^4 - \sqrt{(3s^2 - s^4)^2 + 4}\right)^2}}, \tag{38}$$

$$g(v_1) = \sqrt{s^4 - 2s^2 - 1 + \frac{4\sqrt{(3s^2 - s^4)^2 + 4}}{4 + \left(s^4 - 3s^2 + \sqrt{(3s^2 - s^4)^2 + 4}\right)^2}}, \tag{39}$$

$$g(v_2) = \sqrt{s^4 - 2s^2 - 1 - \frac{4\sqrt{(3s^2 - s^4)^2 + 4}}{4 + \left(s^4 - 3s^2 - \sqrt{(3s^2 - s^4)^2 + 4}\right)^2}}. \tag{40}$$

Поклавши $3s^2 - s^4 = t$ та виконавши деякі спрощення, рівності (37) — (40) перепишемо у вигляді

$$f(u_1) = \sqrt{s^2 - 1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{(3s^2 - s^4)^2 + 4} - 3s^2 + s^4\right)} = \sqrt{\frac{s^4 - s^2 - 2 + \sqrt{(3s^2 - s^4)^2 + 4}}{2}},$$

$$f(u_2) = \sqrt{s^2 - 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{(3s^2 - s^4)^2 + 4} + 3s^2 - s^4\right)} = \sqrt{\frac{s^4 - s^2 - 2 - \sqrt{(3s^2 - s^4)^2 + 4}}{2}},$$

$$g(v_1) = \sqrt{s^4 - 2s^2 - 1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{(3s^2 - s^4)^2 + 4} + 3s^2 - s^4\right)} = f(u_1),$$

$$g(v_2) = \sqrt{s^4 - 2s^2 - 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{(3s^2 - s^4)^2 + 4} - 3s^2 + s^4\right)} = f(u_2).$$

З останніх міркувань зрозуміло, що нерівність (36) рівносильна кожній з нерівностей (34) або (35). Тобто має місце нерівність (32), де

$$\lambda_1 = \lambda f(u_2) = \lambda g(v_2) = \sqrt{\frac{s^4 - s^2 - 2 - \sqrt{(3s^2 - s^4)^2 + 4}}{2(1 + s^2)(s^4 - 3s^2 + 1)}},$$

$$\lambda_2 = \lambda f(u_1) = \lambda g(v_1) = \sqrt{\frac{s^4 - s^2 - 2 + \sqrt{(3s^2 - s^4)^2 + 4}}{2(1 + s^2)(s^4 - 3s^2 + 1)}}.$$

$\square$

Теорема 8. *Якщо* $\overrightarrow{0} \neq \overrightarrow{a} = (a_n)$ — *фіксований елемент простору* $\mathcal{F}$, r *і* m — *натуральні числа, причому* $1 < m < r$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset \{0, 1, \dots, r-1\}$, $v_i < v_{i+1}$, $i = \overline{1, m-1}$,

$$C\,[r, V] = \left\{\lambda : \ \lambda = \frac{\alpha_1}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{r^n} + \cdots, \ \alpha_n \in V\right\},$$

то множина

$$H = \{\overrightarrow{x} : \ \overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{a}, \ \lambda \in C\,[r, V]\}$$

в метричному просторі $(\mathcal{F}, \rho_s)$ *є самоподібною і її самоподібна розмірність*

$$\alpha_0 = \log_r |V|$$

співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_{\rho_s}(H)$.

Доведення. Оскільки

$$\overrightarrow{x} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{r^n}\right) \overrightarrow{a} = \left(\frac{\alpha_1}{r} + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{r^n}\right) \overrightarrow{a} = \frac{1}{r}\left(\alpha_1 \overrightarrow{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{r^n} \overrightarrow{a}\right),$$

то

$$H = \bigcup_{i=1}^{m} \frac{1}{r}\left(v_i \overrightarrow{a} \oplus H\right),$$

де

$$H \overset{\frac{1}{r}}{\sim} \frac{1}{r}\left(v_i \overrightarrow{a} \oplus H\right), \quad i = \overline{1, m},$$

причому множини $\frac{1}{r}\left(v_i \overrightarrow{a} \oplus H\right)$ і $\frac{1}{r}\left(v_j \overrightarrow{a} \oplus H\right)$, при $i \neq j$, мають не більше однієї спільної точки. Отже, H є самоподібною множиною. Тоді її самоподібна розмірність α_0, згідно з означенням, є розв'язком рівняння

$$m \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^x = 1, \quad \text{тобто} \quad \alpha_0 = \log_r m.$$

Розглянемо H як множину одновимірного підпростору $\mathcal{F}_{\overrightarrow{a}}$ з твірним вектором $\overrightarrow{a}$ і рівномірною метрикою

$$\rho\left(\gamma_1 \overrightarrow{a}, \gamma_2 \overrightarrow{a}\right) = |\gamma_1 - \gamma_2|.$$

У повному метричному просторі $(\mathcal{F}_{\overrightarrow{a}}, \rho)$ множина H є досконалою множиною (замкненою і без ізольованих точок). Тому її розмірність Хаусдорфа-Безиковича співпадає з самоподібною розмірністю [**5**, ст. 61].

Використовуючи лему 6, легко довести (по аналогії з доведенням леми 1 [**1**, ст. 7]), що відображення

$$(\mathcal{F}_{\overrightarrow{a}}, \rho) \overset{g}{\sim} (\mathcal{F}_{\overrightarrow{a}}, \rho_s)$$

таке, що $g\left(\lambda \overrightarrow{a}\right) = \lambda \overrightarrow{a}$, зберігає самоподібну структуру і розмірність Хаусдорфа-Безиковича, тобто $\alpha_\rho(E) = \alpha_{\rho_s}(g(E))$ для довільної множини $E \subset (\mathcal{F}_{\overrightarrow{a}}, \rho_s)$. Отже, має місце твердження теореми 8. $\square$

Література

[1] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // Ergod. Th. & Dynam. Sys. — 2004, **24**. — P. 1-16.

[2] *Allouche J.-P., Shallit J.* Automatic sequences: theory, applications, generalizations. — Cambridge, England: Cambridge University Press, 2003. — 588 p.

[3] *Bundschuh P., Darvasi Gy.* On the Distribution of a Certain Family of Fibonacci Type Sequences // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis, 1998. — **14**. — P. 41-47.

[4] *Homer W. Austin, Jathan W. Austin,* Binet formulas for recursive integer sequences // Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education, 2009. — **4**, № 1. — P. 1-8.

[5] *Kalman D., Mena R.* The Fibonacci Numbers – Exposed // Mathematics magazine. — 2003. — **76**, no. 3. — P. 167-181.

[6] *Kiliç E., Taşci D.* On the Generalized Order-k Fibonacci and Lucas Numbers // Rocky Mountain J. Math., 2006. — **36**, № 6. — P. 1915-1926.

[7] *Miller M. D.* On generalized Fibonacci numbers // Amer. Math. Monthly, 1971. — **78**. — P. 1108-1109.

[8] *Mouline M., Rachidi M.* Suites de Fibonacci généralisées et chaînes de Markov // Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. Revista 89, 1995. — no. 1-2. — P.61–77.

[9] *Rachidi M., Saeki O.* Extending generalized Fibonacci sequences and their Binet-type formula // Advances in Difference Equations, 2006. — **2006**, № 5. — P. 1-11. (Article ID 23849)

[10] *Ribenboim P.* My numbers, my friends: popular lectures on number theory. — New York: Springer-Verlag, 2000. — 384 p.

[11] *Воеводин В. В.* Линейная алгебра. — М.: Наука, 1980. — 400 с.

[12] *Воробьев Н. Н.* Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1969. — 112 с.

[13] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц, 2-ое изд. — М.: Наука, 1966. — 576 с.

[14] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия, 3-е изд. — М.:Физматлит, 2004. — 464 с.

[15] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. — 496 с.

[16] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[17] *Тыртышников Е. Е.* Матричный анализ и линейная алгебра. — М., 2005. — 372 с.

[18] *Фещенко О. Ю.* Властивості розподілів випадкових величин з незалежними символами своїх G^2_∞-кодів // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова, 2005. — 6. — С. 225-234. (312 с.)

[19] *Шилов Г. Е.* Математический анализ (конечномерные линейные пространства). — М.: Наука, 1969. — 432 с.

[20] *Ядренко М. Й.* Дискретна математика: навчальний посібник. — К.: МП "ТВіМС", 2004. — 245 с.