Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2008, № 9. — С. 104–111.

УДК 517.51

Фрактальна розмірність графіків неперервних канторівських проекторів

О. Б. Панасенко
(Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського)

Анотація. Неперервні канторівські проектори — це специфічний клас неперервних ніде не диференційовних функцій, що був введений у розгляд в роботах [**1, 2**]. Дана стаття присвячена обчисленню фрактальної клітинкової розмірності їх графіків.

Abstract. Continuous Cantor projectors are a specific class of continuous nowhere differentiable functions that was considered in [**1, 2**]. This paper is devoted to the calculation of box-counting dimension of its graphs.

1. Вступ

В останні роки зріс науковий інтерес до фрактальних неперервних функцій, оскільки вони мисляться як можливі моделі певних складних явищ, таких як броунівський рух. Такі функції вже зараз знаходять застосування в різноманітних галузях людських знань, зокрема вони використовуються при синтезі та аналізі мовних сигналів [**3**], коливанні цін на фондовому ринку [**4**], моделюванні антен [**5**]. Важливою характеристикою таких функцій є фрактальна розмірність їх графіків.

Відносно простим прикладом фрактальних функцій є канторівські проектори [**2**] — функції дійсної змінної, означені за допомогою певного перетворення цифр аргументу в цифри відповідних значень.

Нехай $s > 2$ і дано вектор $Q = \{a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}\}$, причому $a_i > 0$, $\sum\limits_{i=0}^{s-1} a_i = 1$. Нагадаємо [**2, 7**], що *Q-представленням* дійсного числа $x \in [0,1]$ називається його подання у вигляді

$$x = \gamma_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\gamma_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} a_{\alpha_j} \right] \equiv \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

де $\alpha_k \in N^0_{s-1} \equiv \{0, 1, \ldots, s-1\}$ — цифри числа x, $\gamma_m = \sum\limits_{i=0}^{m-1} a_i$. Таке представлення існує для всіх чисел з $[0,1]$, причому деякі мають єдине зображення у вигляді

$\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ (тоді такі числа називають Q-ірраціональними), а решта мають два різних зображення: $\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}$ з періодом 0 та $\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_n-1](s-1)}$ з періодом $s-1$ (такі числа називаються Q-раціональними). Усі числа $x \in [0,1]$, перша цифра в Q-зображенні яких рівна c, утворюють відрізок, який називається циліндричним відрізком першого рангу, і позначається Δ^Q_c.

Означення 1. *Неперервним канторівським проектором* називається функція виду

$$f_{p,r}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k} \equiv \Delta^2_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots}, \tag{1}$$

де

$$\beta_1 = \begin{cases} p, & \text{якщо } \alpha_1(x) = r \\ 1-p, & \text{якщо } \alpha_1(x) \neq r, \end{cases}$$

$$\beta_k = \begin{cases} \beta_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_k(x) = \alpha_{k-1}(x) \\ 1-\beta_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_k(x) \neq \alpha_{k-1}(x), \quad k > 1, \end{cases} \tag{2}$$

$\alpha_k(x)$ — k-та цифра в Q-зображенні x, r — фіксований елемент з множини $\mathbb{N}^0_{s-1}$, $p \in \{0,1\}$.

Доведено [**1, 2**], що: 1) означення 1 коректне в тому смислі, що різним Q-зображенням Q-раціональних чисел відповідає одне і теж саме значення функції; 2) означена функція є неперервною і ніде не диференційовною.

Деякі роботи присвячені дослідженню фрактальних властивостей неперервних канторівських проекторів [**7, 8**], а особливо того випадку, коли вектор Q складається з однакових елементів (тобто коли аргумент подається s-адичним дробом). Саме для цього типу канторівських проекторів доведено [**8**], що їх графіками є фрактальні множини з клітинковою розмірністю $\alpha^K(\Gamma_f) = 2 - \log_s 2$ і розмірністю Хаусдорфа–Безиковича $\alpha_0(\Gamma_f) = \log_2\left(1 + (s-1)^{\log_s 2}\right)$.

Нагадаємо означення клітинкової розмірності множини [**10**, стор. 43].

Означення 2. *Нижньою і верхньою клітинковими розмірностями* множини $E \subset \mathbb{R}^n$ називаються відповідно:

$$\underline{\alpha}^K(E) = \varliminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\lg N(\varepsilon)}{-\lg\varepsilon}, \quad \overline{\alpha}^K(E) = \varlimsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\lg N(\varepsilon)}{-\lg\varepsilon},$$

а *клітинковою розмірністю* множини E

$$\alpha^K(E) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\lg N(\varepsilon)}{-\lg\varepsilon}, \tag{3}$$

(якщо остання границя існує), де $N(\varepsilon)$ — найменша кількість замкнених куль радіусу ε, які покривають E.

В даній роботі досліджується питання про клітинкову розмірність означених вище функцій. Основним результатом роботи є наступне твердження.

Теорема 1. *Фрактальна клітинкова розмірність графіків неперервних канторівських проекторів дорівнює* d*, де* d *— єдиний додатній корінь рівняння* $\sum\limits_{k=0}^{s-1} a_k^{d-1} = 2$.

2. Доведення теореми 1

Для спрощення записів обмежимось розглядом випадку при $s = 3$; для $s > 3$ доведення проводиться аналогічно. В цьому випадку розглядається шість функцій $f_{p,r}(x)$, $p \in \{0,1\}$, $r \in \{0,1,2\}$.

Співвідношення (2) в означенні неперервних канторівських проекторів зумовлює певну самоафінність їх графіків, що схематично зображена на рисунку 1 (через X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 позначено графіки функцій $f_{0,0}(x)$, $f_{0,1}(x)$, $f_{0,2}(x)$, $f_{1,0}(x)$, $f_{1,1}(x)$, $f_{1,2}(x)$ відповідно). Наприклад, графік функції $f_{0,0}(x)$ на відрізку $[0, a_0]$ є образом самого себе при афінному перетворенні $T_0(x,y) = \big(a_0 x, \frac{y}{2}\big)$; на відрізку $[a_0, a_0 + a_1]$ є образом графіка функції $f_{1,1}(x)$ при перетворенні $T_1(x,y) = \big(a_1 x + a_0, \frac{y+1}{2}\big)$; на відрізку $[a_1, 1]$ є образом графіка функції $f_{1,2}(x)$ при перетворенні $T_2(x,y) = \big(a_2 x + a_0 + a_1, \frac{y+1}{2}\big)$.

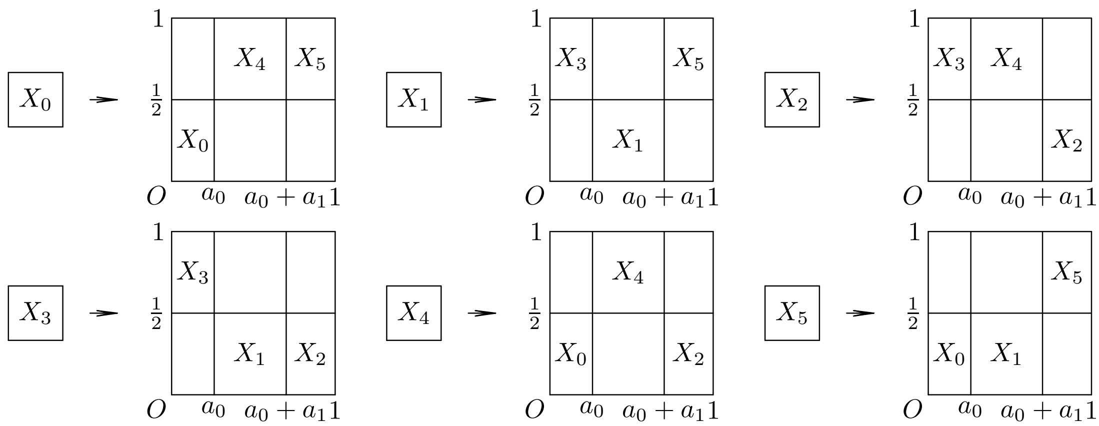

Рис. 1. Самоафінність графіків неперервних канторівських проекторів.

Для обчислення фрактальної клітинкової розмірності множин X_i скористаємось таким твердженням.

Лема 1 (**[9, 10]**). *Нехай* $E \subset \mathbb{R}^2$, $N^E(\varepsilon)$ *— кількість квадратів виду* $[(k-1)\varepsilon, k\varepsilon] \times [(l-1)\varepsilon, l\varepsilon]$, $k, l \in \mathbb{Z}$*, які перетинає множина* E*. Якщо існує границя:*

$$d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N^E(\varepsilon)}{-\log \varepsilon},$$

то фрактальна клітинкова розмірність множини E дорівнює d.

Отже, нехай $N^{X_i}(\varepsilon)$ — кількість квадратів зі стороною ε^2, які перетинає графік X_i, а також $N_j^{X_i}(\varepsilon)$ — кількість квадратів зі стороною ε, які перетинає множина X_i на циліндричному відрізку першого рангу Δ_j^Q.

Лема 2. *Для кожного $\varepsilon > 0$ має місце співвідношення:*

$$\left|N^{X_i}(\varepsilon) - N^{X_j}(\varepsilon)\right| < \frac{3}{\varepsilon}. \tag{4}$$

Доведення. Передусім зазначимо, що графіки X_0 та X_3, X_1 та X_4, X_2 та X_5 симетричні відносно прямої $y = \frac{1}{2}$, тому спочатку доведемо, що нерівність (4) має місце для випадків $i = 0$, $j = 3$; $i = 1$, $j = 4$; $i = 2$, $j = 5$. З цією метою розглянемо покриття графіків квадратами зі стороною ε вказаного виду. В силу неперервності графіків функцій, їх можна виділити в $K(\varepsilon) = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ колонок (тут і далі під $\lceil x \rceil$ розуміється «округлення зверху», тобто найменше число, яке не менше за x). Занумеруємо ці колонки числами від 1 до $K(\varepsilon)$ і нехай $n_l^{X_i}(\varepsilon)$, $l = \overline{1, K(\varepsilon)}$ — кількість квадратів зі стороною ε, які містяться в l-ій колонці. Тоді в силу симетричності графіків для кожного l величина $\left|n_l^{X_i}(\varepsilon) - n_l^{X_j}(\varepsilon)\right|$ може набувати значення або 0, або 1, а це і означає що:

$$\left|N^{X_i}(\varepsilon) - N^{X_j}(\varepsilon)\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} + 1 < \frac{3}{\varepsilon}.$$

Розглянемо тепер випадок при $i = 0$, $j = 5$ (для решти випадків проводяться аналогічні міркування). Розглянемо графіки множин X_0 та X_5 на основі схематичного рисунку 1. На відрізках $[0, a_0]$ та $[a_0 + a_1, 1]$ графіки цих функцій повністю співпадають, і, отже, для їх покриття на цих відрізках необхідна однакова кількість квадратів. На відрізку $[a_0, a_0 + a_1]$ графіки відрізняються, але вони симетричні відносно прямої $y = \frac{1}{2}$, тому в силу доведеного раніше кількість квадратів, необхідних для покриття на цьому відрізку не може відрізнятись більше ніж на $\frac{a_1}{\varepsilon} + 1$. Крім цього, суттєво може відрізнятись кількість квадратів, що перетинають прямі $x = a_0$ та $x = a_0 + a_1$. Але їх кількість не може перевищувати $2 \cdot \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$. Тоді:

$$\left|N^{X_i}(\varepsilon) - N^{X_j}(\varepsilon)\right| \leqslant \frac{a_1}{\varepsilon} + 1 + \frac{1}{\varepsilon} < \frac{3}{\varepsilon}.$$

$\square$

Зауваження 1. *Вказана оцінка не є найефективнішою і може бути покращена. Для нас суттєвим є той факт, що існує $A > 0$ таке, що для всіх $\varepsilon > 0$: $\left|N^{X_i}(\varepsilon) - N^{X_j}(\varepsilon)\right| < \frac{A}{\varepsilon}$.*

Аналогічними міркуваннями одержуємо таке твердження:

[2]Тут і далі під квадратами зі стороною ε розуміються квадрати виду $[(k-1)\varepsilon, k\varepsilon] \times [(l-1)\varepsilon, l\varepsilon]$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

Лема 3. *Для кожного* $\varepsilon > 0$, *має місце співвідношення:*

$$N_0^{X_i}(\varepsilon) + N_1^{X_i}(\varepsilon) + N_2^{X_i}(\varepsilon) - N^{X_i}(\varepsilon) < \frac{1}{\varepsilon}, \quad i = \overline{0,5}.$$

Нехай множина X_0 перетинає рівно $N^{X_0}(\varepsilon)$ квадратів зі стороною ε. Виділимо їх в $K(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ колонок і знову занумеруємо ці колонки числами від 1 до $K(\varepsilon)$. Нехай $n_j(\varepsilon)$, $j = \overline{1, K(\varepsilon)}$ — кількість квадратів зі стороною ε, які містяться в j-ій колонці. Подіємо на це покриття таким перетворенням: здійснимо стиск з коефіцієнтом a_0 по горизонталі і $\frac{1}{2}$ по вертикалі. При цьому перетворенні квадрати зі стороною ε переходять в прямокутники з шириною $a_0\varepsilon$ та висотою $\frac{\varepsilon}{2}$, а j-а колонка (прямокутник з шириною ε і висотою $n_j(\varepsilon) \cdot \varepsilon$) — в прямокутник з шириною $a_0\varepsilon$ і висотою $\frac{n_j(\varepsilon)\varepsilon}{2}$. Перейдемо тепер до квадратів зі стороною $a_0\varepsilon$. Для того, щоб покрити j-у колонку, їх необхідно мінімум $\left\lceil \frac{(n_j-1)\varepsilon}{2a_0} \right\rceil$ і максимум $\left\lceil \frac{n_j\varepsilon}{2a_0} \right\rceil$. Таким чином, можемо зробити таку оцінку величини $N_0^{X_0}(a_0\varepsilon)$:

$$\sum_{j=1}^{K(\varepsilon)} \frac{n_j(\varepsilon) - 1}{2a_0} \leqslant \sum_{j=1}^{K(\varepsilon)} \left\lceil \frac{(n_j(\varepsilon) - 1)\,\varepsilon}{2a_0\varepsilon} \right\rceil \leqslant N_0^{X_0}(a_0\varepsilon) \leqslant \sum_{j=1}^{K(\varepsilon)} \left\lceil \frac{n_j(\varepsilon)\varepsilon}{2a_0\varepsilon} \right\rceil \leqslant \sum_{j=1}^{K(\varepsilon)} \frac{n_j(\varepsilon) + 1}{2a_0},$$

звідки

$$\frac{1}{2a_0}N^{X_0}(\varepsilon) - \frac{K(\varepsilon)}{2a_0} = \sum_{j=1}^{K(\varepsilon)} \frac{n_j(\varepsilon) - 1}{2a_0} \leqslant N_0^{X_0}(a_0\varepsilon) \leqslant \sum_{j=1}^{K(\varepsilon)} \frac{n_j(\varepsilon) + 1}{2a_0} = \frac{1}{2a_0}N^{X_0}(\varepsilon) + \frac{K(\varepsilon)}{2a_0}.$$

Нарешті здійснимо останню оцінку:

$$\frac{1}{2a_0}N^{X_0}(\varepsilon) - \frac{A}{\varepsilon} \leqslant N_0^{X_0}(a_0\varepsilon) \leqslant \frac{1}{2a_0}N^{X_0}(\varepsilon) + \frac{B}{\varepsilon},$$

де A, B — деякі додатні константи. Перепишемо останню нерівність у такому вигляді:

$$\frac{1}{2a_0}N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_0}\right) - \frac{A_0}{\varepsilon} \leqslant N_0^{X_0}(\varepsilon) \leqslant \frac{1}{2a_0}N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_0}\right) + \frac{B_0}{\varepsilon}.$$

Аналогічними міркуваннями одержуємо наступні нерівності:

$$\frac{1}{2a_1}N^{X_4}\left(\frac{\varepsilon}{a_1}\right) - \frac{A_1}{\varepsilon} \leqslant N_1^{X_0}(\varepsilon) \leqslant \frac{1}{2a_1}N^{X_4}\left(\frac{\varepsilon}{a_1}\right) + \frac{B_1}{\varepsilon},$$

$$\frac{1}{2a_2}N^{X_5}\left(\frac{\varepsilon}{a_2}\right) - \frac{A_2}{\varepsilon} \leqslant N_2^{X_0}(\varepsilon) \leqslant \frac{1}{2a_2}N^{X_5}\left(\frac{\varepsilon}{a_2}\right) + \frac{B_2}{\varepsilon},$$

де A_i, $B_i > 0$.

Додамо останні три подвійні нерівності і, враховуючи леми 2 і 3, одержуємо:

$$\frac{1}{2a_0}N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_0}\right) + \frac{1}{2a_1}N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_1}\right) + \frac{1}{2a_2}N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_2}\right) - \frac{A}{\varepsilon} \leqslant N^{X_0}(\varepsilon),$$

$$N^{X_0}(\varepsilon) \leqslant \frac{1}{2a_0}N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_0}\right) + \frac{1}{2a_1}N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_1}\right) + \frac{1}{2a_2}N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_2}\right) + \frac{B}{\varepsilon},$$

де A, B — деякі скінченні додатні константи. Аналогічно:

$$\frac{1}{2a_0}N^{X_i}\left(\frac{\varepsilon}{a_0}\right)+\frac{1}{2a_1}N^{X_i}\left(\frac{\varepsilon}{a_1}\right)+\frac{1}{2a_2}N^{X_i}\left(\frac{\varepsilon}{a_2}\right)-\frac{A}{\varepsilon}\leqslant N^{X_i}\left(\varepsilon\right), \tag{5}$$

$$N^{X_i}\left(\varepsilon\right)\leqslant\frac{1}{2a_0}N^{X_i}\left(\frac{\varepsilon}{a_0}\right)+\frac{1}{2a_1}N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_1}\right)+\frac{1}{2a_2}N^{X_i}\left(\frac{\varepsilon}{a_2}\right)+\frac{B}{\varepsilon} \tag{6}$$

для $i=\overline{0,5}$; $A,B>0$.

Лема 4. *Існують такі додатні C_1, C_2, ε^*, що для будь-якого $0<\varepsilon<\varepsilon^*$ виконується нерівність*

$$C_2\varepsilon^{-d}\leqslant N^{X_j}(\varepsilon)\leqslant C_1\varepsilon^{-d}, \tag{7}$$

де d — єдиний додатній корінь рівняння $\sum\limits_{i=0}^{s-1}a_i^{d-1}=2$.

Доведення. Доведення леми складатиметься з двох частин. Спочатку доведемо праву, а потім ліву нерівності в (7).

В доведенні леми ми будемо використовувати такі додаткові позначення: $a_{\min}=\min\{a_0,a_1,\ldots,a_{s-1}\}$, $a_{\max}=\max\{a_0,a_1,\ldots,a_{s-1}\}$.

1. Оберемо $\varepsilon_0>0$ і $C_1>0$ такими, що нерівність

$$N^{X_j}(\varepsilon)\leqslant C_1\varepsilon^{-d}-\frac{2B}{\varepsilon} \tag{8}$$

виконується для всіх $\varepsilon_0\leqslant\varepsilon\leqslant\frac{\varepsilon_0}{a_{\min}}$. Тоді для $a_{\max}\varepsilon_0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$:

$$\varepsilon_0\leqslant\frac{a_{\max}}{a_i}\varepsilon_0\leqslant\frac{\varepsilon}{a_i}\leqslant\frac{\varepsilon_0}{a_i}\leqslant\frac{\varepsilon_0}{a_{\min}},$$

тобто $\varepsilon_0\leqslant\frac{\varepsilon}{a_i}\leqslant\frac{\varepsilon_0}{a_{\min}}$, і, отже, для таких значень ε нерівність (8) можна переписати у вигляді:

$$N^{X_j}\left(\frac{\varepsilon}{a_i}\right)\leqslant C_1\left(\frac{\varepsilon}{a_i}\right)^{-d}-\frac{2B\cdot a_i}{\varepsilon}.$$

Повернемось до нерівності (6) для $a_{\max}\varepsilon_0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$:

$$\begin{aligned}N^{X_j}\left(\varepsilon\right)&\leqslant\frac{1}{2a_0}N^{X_j}\left(\frac{\varepsilon}{a_0}\right)+\frac{1}{2a_1}N^{X_j}\left(\frac{\varepsilon}{a_1}\right)+\frac{1}{2a_2}N^{X_j}\left(\frac{\varepsilon}{a_2}\right)+\frac{B}{\varepsilon}\leqslant\\&\leqslant\frac{1}{2a_0}\left(C_1\varepsilon^{-d}a_0^d-\frac{2Ba_0}{\varepsilon}\right)+\frac{1}{2a_1}\left(C_1\varepsilon^{-d}a_1^d-\frac{2Ba_1}{\varepsilon}\right)+\\&+\frac{1}{2a_2}\left(C_1\varepsilon^{-d}a_2^d-\frac{2Ba_2}{\varepsilon}\right)+\frac{B}{\varepsilon}=\\&=C_1\varepsilon^{-d}\left(\frac{1}{2}a_0^{d-1}+\frac{1}{2}a_1^{d-1}+\frac{1}{2}a_2^{d-1}\right)-\frac{2B}{\varepsilon}=C_1\varepsilon^{-d}-\frac{2B}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Таким чином, ми показали, що з того, що нерівність (8) виконується для $\varepsilon_0\leqslant\varepsilon\leqslant\frac{\varepsilon_0}{a_{\min}}$, випливає, що вона виконується і для $a_{\max}\varepsilon_0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$. Позначимо тепер $\varepsilon_1=a_{\max}\varepsilon_0$, тоді нерівність $a_{\max}\varepsilon_0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ можна переписати у вигляді $\varepsilon_1\leqslant\varepsilon\leqslant\frac{\varepsilon_1}{a_{\max}}\leqslant\frac{\varepsilon_1}{a_{\min}}$ і для

ε_1 повторити міркування, які проводились для ε_0. Продовжимо такі ж міркування далі, врешті-решт знаходимо, що нерівність (8) виконується для всіх ε таких, що $(a_{\max})^k \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{\varepsilon_0}{a_{\min}}$, $k \in \mathbb{N}$. Оскільки при $k \to \infty$: $(a_{\max})^k \varepsilon_0 \to 0$, то стверджуємо, що для всіх $\varepsilon \in \left(0, \frac{\varepsilon_0}{a_{\min}}\right]$ має місце:

$$N^{X_j}(\varepsilon) \leqslant C_1\varepsilon^{-d} - \frac{2B}{\varepsilon} < C_1\varepsilon^{-d},$$

що і доводить праву частину нерівності (7).

2. Оскільки функції $f_{p,q}(x)$ ніде не диференційовні **[2]**, то вони є функціями необмеженої варіації і їх 1-мірна міра Хаусдорфа дорівнює нескінченності. Це означає, що $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} N^{X_j}(\varepsilon)\varepsilon = \infty$, а значить існує таке $\delta_0 > 0$, що для всіх $\varepsilon \in \left(0, \frac{\delta_0}{a_{\min}}\right]$:

$$N^{X_j}(\varepsilon) \cdot \varepsilon \geqslant 4A,$$

де A — константа з (5). Тоді для всіх $0 < C_2 \leqslant 2Aa_{\min}\delta_0^{d-1}$ і всіх $\delta_0 \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{\delta_0}{a_{\min}}$ виконується нерівність

$$N^{X_j}(\varepsilon) \geqslant \frac{2A}{\varepsilon} + \frac{2A}{\varepsilon} \geqslant \frac{2Aa_{\min}}{\delta_0} + \frac{2A}{\varepsilon} \geqslant C_2\varepsilon^{-d} + \frac{2A}{\varepsilon}. \tag{9}$$

Повторимо ті ж самі міркування, які використовувались при доведенні правої частини нерівності (7), а саме перейдемо до $\varepsilon \in [a_{\max}\delta_0, \delta_0]$. Тоді $\delta_0 \leqslant \frac{\varepsilon}{a_i} \leqslant \frac{\delta_0}{a_{\min}}$ і перепишемо нерівність (9) у вигляді

$$N^{X_j}\left(\frac{\varepsilon}{a_i}\right) \geqslant C_2\varepsilon^{-d}a_i^d + \frac{2A \cdot a_i}{\varepsilon}.$$

Знову розглянемо нерівність (5) для $\delta_0 \leqslant \frac{\varepsilon}{a_i} \leqslant \frac{\delta_0}{a_{\min}}$:

$$\begin{aligned}
N^{X_j}(\varepsilon) &\geqslant \frac{1}{2a_0}N^{X_j}\left(\frac{\varepsilon}{a_0}\right) + \frac{1}{2a_1}N^{X_j}\left(\frac{\varepsilon}{a_1}\right) + \frac{1}{2a_2}N^{X_j}\left(\frac{\varepsilon}{a_2}\right) - \frac{A}{\varepsilon} \geqslant \\
&\geqslant \frac{1}{2a_0}\left(C_2\varepsilon^{-d}a_0^d + \frac{2Aa_0}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{2a_1}\left(C_2\varepsilon^{-d}a_1^d + \frac{2Aa_1}{\varepsilon}\right) + \\
&+ \frac{1}{2a_2}\left(C_2\varepsilon^{-d}a_2^d + \frac{2Aa_2}{\varepsilon}\right) - \frac{A}{\varepsilon} = C_2\varepsilon^{-d}\left(\frac{1}{2}a_0^{d-1} + \frac{1}{2}a_1^{d-1} + \frac{1}{2}a_2^{d-1}\right) + \frac{2A}{\varepsilon} = \\
&= C_2\varepsilon^{-d} + \frac{2A}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Отже, ми показали, що існують такі $\delta_0 > 0$ і $C_2 > 0$, що виконується нерівність (9) для $\varepsilon \in \left[a_{\max}\delta_0, \frac{\delta_0}{a_{\min}}\right]$. Позначивши $\delta_1 = a_{\max}\delta_0$ знаходимо, що аналогічні міркування можна повторити замінивши δ_0 на δ_1. Таким чином, нерівність (9) має місце для $\varepsilon \in \left[a_{\max}^k\delta_0, \frac{\delta_0}{a_{\min}}\right]$, $k \in \mathbb{N}$, а оскільки $a_{\max}^k \to 0$ (при $k \to \infty$), то і для всіх $\varepsilon \in \left(0, \frac{\delta_0}{a_{\min}}\right]$:

$$N^{X_j}(\varepsilon) \geqslant C_2\varepsilon^{-d} + \frac{2A}{\varepsilon} > C_2\varepsilon^{-d}.$$

Отже, при $\varepsilon^* = \min\left\{\frac{\varepsilon_0}{a_{\min}}, \frac{\delta_0}{a_{\min}}\right\}$ має місце (7) для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$. □

З лем 1 та 4 випливає твердження теореми 1 для випадку $s = 3$, оскільки:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\lg N^{X_j}(\varepsilon)}{-\lg \varepsilon} \leqslant \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\lg C_1 \varepsilon^{-d}}{-\lg \varepsilon} = d,$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\lg N^{X_j}(\varepsilon)}{-\lg \varepsilon} \geqslant \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\lg C_2 \varepsilon^{-d}}{-\lg \varepsilon} = d,$$

тобто $\alpha^K(X_0) = \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\lg N^{X_j}(\varepsilon)}{-\lg \varepsilon} = d$.

При $s > 3$ доведення проводиться аналогічно. Теорему доведено.

Література

[1] *Працевитый Н. В.* Непрерывные канторовские проекторы // Методы исследования алгебраических и топологических структур. – К.: КГПИ, 1989. — С. 78–90.

[2] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — К.: Наукова думка, 1992. — 208 с.

[3] *Lévy Véhel J., Daoudi Kh., Lutton E.* Fractal modeling of speech signals // Fractals. — 1994. — Vol. 2, № 3 — С. 379–382.

[4] *Петерс Э.* Фрактальный аналих финансовых рынков: Применение теории Хаоса в инвестициях и экономике. — М.: Интернет-трейдинг, 2004. —304 с.

[5] *Кравченко В. Ф., Масюк В. М.* Новый класс фрактальных функций в задачах анализа и синтеза антенн. — М.: Радиотехника, 2002. — 80 с.

[6] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

[7] *Працьовитий М. В.* Фрактальні властивості однієї неперервної, ніде не диференційовної функції // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — № 3, 2002. — С. 327–338.

[8] *Панасенко О. Б.* Розмірність Хаусдорфа–Безиковича ніде не диференційовної функції Працьовитого (готується до публікації).

[9] *Barnsley M. F.* Fractals everywhere. — San Diego, 1988.— 396 p.

[10] *Falconer K.J.* Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. Second edition.— Chichester, Wiley, 2003.— 338 p.