*Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2008, № 9. — С. 192–199.

УДК 517.51 + 519.21

# Деякі функціональні співвідношення, які задовольняє сингулярна функція Салема

А. В. Калашніков
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. Досліджуються самоафінні властивості строго зростаючої сингулярної функції, яка є функцією розподілу випадкової величини з незалежними однаково розподіленими двійковими цифрами.

Abstract. Research the self-affine properties of strictly increasing singular function which is a function of distributing random values with independent identically distributed of binary digit.

## 1. Вступ

Відмінна від сталої неперервна функція, похідна якої рівна нулю майже скрізь (у розумінні міри Лебега) називається *сингулярною.* Найпростішим прикладом сингулярної функції є класична функція Кантора – неперервна функція, яка росте на множині Кантора і є сталою на інтервалах, суміжних з нею.

Перший приклад строго зростаючої сингулярної функції належить Хелінгеру. Інші приклади таких функцій ще на початку попереднього століття фігурували в роботах Мінковського [**1**] та Серпінського [**2**]. Одним з найпростіших прикладів [**3**] строго зростаючої сингулярної функції є функція Салема, що досліджувалась в роботах [**4, 5, 6**]. Частковим випадком функції Салема є функція Такача, яка досліджувалась в [**7**], названа пізніше функцією Салема-Такача [**7**].

В останній час сингулярні функції інтенсивно вивчаються [**7, 8, 9, 10, 11**]. Підвищений інтерес до них пов'язаний з їх тісним зв'язком з одновимірними фракталими [**7**]. Існує ряд цікавих задач та проблем, які стосуються сингулярних функцій. Це задачі пов'язані з їх суперпозиціями [**12**], згортками [**9**], локальними та фрактальними властивостями. Розв'язанню цих задач мали б сприяти відомості про рекурентні та самоафінні властивості досліджуваних функцій. В даній роботі ми розпочинаємо розробку методології дослідження сингулярних функцій в цьому аспекті, на прикладі функції Салема. Ми наводимо різні її означення, цікавимось функціональними рівняннями, які задовольняє ця функція, а також самоафінними властивостями її графіка. В однопараметричній сім'ї функцій Салема легко ввести алгебраїчні структури, дослідження яких теж сприятимуть вирішенню проблем, пов'язаних з сингулярними неперервними розподілами ймовірностей.

## 2. Різні означення функції Салема

Нехай маємо наперед задане фіксоване дійсне число $p_0$, причому $0 < p_0 < 1$, $\bar{\times}\, p_1 = 1 - p_0$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = p_0$.

**Конструкція Салема.** Розглянемо на площині в прямокутній системі координат відрізок прямої $[RQ]$, що з'єднує точки $R(x, y)$ і $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$, причому $\Delta x > 0$, $\Delta y > 0$. Якщо $[RQ]$ замінити ламаною $[RKQ]$, де $\bar{\times}\, K\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + p_0 \cdot \Delta y\right)$, то будемо говорити, що на відрізку $[RQ]$ діє перетворення $T(p_0)$.

Нехай $F_0(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$. Діючи на $[OA]$, $O(0, 0)$, $A(1, 1)$ перетворенням $T(p_0)$ отримуємо ламану, яка складається з двох відрізків і є графіком деякої зростаючої функції $F_1(x)$. Діючи на кожний відрізок ламаної тим же перетворенням, отримуємо ламану з чотирьох відрізків, яка є графіком функції $F_2(x)$ і так далі. Після $m$-кратного застосування $T(p_0)$ отримаємо ламану $F_m(x)$ – неперервну і строго зростаючу на відрізку $[0; 1]$ (причому $F_m(0) = 0, F_m(1) = 1$), графіком якої є ламана з $2^m$ відрізків з абсцисами вершин $\bar{\times}\, \frac{k}{2^m}$, $\bar{\times}\, k = \overline{1, 2^m - 1}$.

Очевидно, що

$$\left|F_{m+1}(x) - F_m(x)\right| \leq c^m \text{ для всіх } x \in [0, 1],$$

де $c = max\{p_0, p_1\} < 1$. Отже, послідовність функцій $F_m(x)$ збігається рівномірно до деякої неперервної функції $F(x)$, яка називається *функцією Салема*. Очевидно, що функція $F(x)$ однозначно визначається параметром $p_0$ і задовольняє: $F(0) = 0, F(1) = 1$. Вона строго зростає, оскільки для кожного $m \in N$ вершини ламаної $F_m(x)$ належать графіку функції $F(x)$: $\bar{\times}\, F\left(\frac{k}{2^m}\right) = F_m\left(\frac{k}{2^m}\right)$, де $k = \overline{0, 2^m}$.

**Аналітичне задання функції Салема.** Ордината вершини ламаної $F_m(x)$ з абсцисою

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + ... + \frac{\alpha_m}{2^m},$$

де $\alpha_i = \alpha_i(x)$ – двійкові цифри $x$, тобто $\alpha_i \in \{0, 1\}$, обчислюється за формулою

$$F_m(x) = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{m}\left(\beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j(x)}\right),$$

Враховуючи неперервність $F(x)$, для

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i(x)}{2^i}$$

отримаємо

$$F(x) = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j(x)} \right). \tag{1}$$

Зазначимо, що для двох різних зображень двійково-раціональних точок формула (1) дає одне й те саме значення.

Справді, якщо $x$ і $x'$ мають однакові перші $k$ двійкові цифри $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ відпвідно, то виконується нерівність

$$|F(x') - F(x)| \leq \prod_{j=1}^{k} p_{\alpha_j(x)},$$

з якої випливає рівність (1).

**Функція Салема як проектор двійкових цифр.** Нехай $A = \{0, 1\}$ – двосимвольний алфавіт, $q_0 > 0$ – фіксоване дійсне число менше одиниці, $Q_2 = \{q_0, q_1\}$, $q_1 = 1 - q_0$. Розглядається система подрібнюючих розбиттів відрізка $[0, 1]$ з наступними властивостями.

Відрізок $[0, 1]$ є об'єднанням двох неперекривних відрізків 1-го рангу

$$\bar{\times}[0,1] = \Delta_0 \cup \Delta_1, \bar{\times}\, \Delta_0 = [0, q_0]\,, \bar{\times}\, \Delta_1 = [q_0, 1]\,.$$

Кожний відрізок 1-го рангу $\Delta_{i_1}$ теж є об'єднанням двох неперекривних відрізків другого рангу:

$$\Delta_{i_1} = \Delta_{i_1 0} \cup \Delta_{i_1 1}, \;\; min\Delta_{i_1} = min\Delta_{i_1 0}, \;\; max\Delta_{i_1} = max\Delta_{i_1 1}$$

і т.д. Таким чином ми отримуємо систему відрізків довільного натурального рангу, які попарно неперекриваються або співпадають і в об'єднанні дають відрізок $[0, 1]$.

Відрізок $\Delta_{i_1 \ldots i_m}$, де $i_k \in A$, називається циліндром рангу $m$ з основою $i_1 ... i_m$. Циліндри мають наступні властивості:

(1) $\Delta_{i_1 \ldots i_m} = \Delta_{i_1 \ldots i_m 0} \cup \Delta_{i_1 \ldots i_m 1}$,

(2) $sup\Delta_{i_1 \ldots i_k 0} = inf\Delta_{i_1 \ldots i_k 1}$,

(3) $|\Delta_{i_1 \ldots i_m}| = \prod\limits_{j=1}^{m} q_{i_j} \to 0 (m \to \infty)$.

**1)** Для довільної послідовності $(i_n)$, $i_n \in A$, існує єдина точка $x \in [0, 1]$ така, що

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{i_1 \ldots i_m} = x.$$

**2)** Для довільного $x \in [0,1]$ існує послідовність $(i_n)$, $i_n \in A$, така, що

$$x = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{i_1 \ldots i_m} \equiv \Delta_{i_1 \ldots i_m \ldots}.$$

Доведення. Перше твердження випливає з аксіоми Кантора і властивостей циліндрів. Друге випливає з того, що для довільного $m \in N$ існує відрізок $\Delta_{i_1 \ldots i_m}$, який містить $x$, причому ці відрізки вкладені. $\square$

Нехай $Q_2 = \{q_0, q_1\}$ – фіксована множина, $0 < q_0 < 1$, $q_1 = 1 - q_0$. Нагадаємо [**7**], що $Q_2$-*представленням* (зображенням) дійсного числа $x \in [0,1]$ називається його подання у вигляді

$$x = \gamma_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[ \gamma_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right] \equiv \Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots},$$

де $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = q_0$, $\alpha_k \in A$. Деякі точки мають по два різних представлення та зображення (одне з періодом (0) інше з періодом (1), решта – єдине) – називаються $Q_2$-*раціональними*, решта точок мають єдине зображення і називаються $Q_2$-*ірраціональними*. Якщо $q_0$ – число раціональне, то кожне $Q_2$-*раціональне* число є числом раціональним, а кожне $Q_2$-*ірраціональне* число є числом ірраціональним.

Тоді функція Салема визначається наступним чином:

$$\begin{array}{rl} & x = \Delta^2_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots} \equiv \dfrac{\alpha_1}{2} + \dfrac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \dfrac{\alpha_m}{2^m} + \ldots \\ F(x) & \downarrow \\ & y = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}, Q_2 = \{p_0, p_1\} \end{array}$$

Отже, функція Салема є функцією, у якої аргумент і значення записуються тими ж цифрами, але в різних системах зображення: аргумент у двійковій, а значення функції у $Q_2$-зображенні.

**Функція Салема як функція розподілу випадкової величини з незалежними однаково розподілиними двійковими цифрами.** Розглянемо випадкову величину

$$\barwedge\, \xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{2^k} = \frac{\eta_1}{2} + \frac{\eta_2}{2^2} + \ldots + \frac{\eta_k}{2^k} + \ldots,$$

де $\eta_k$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень 0 і 1 з ймовірностями $p_0$ і $p_1$ відповідно.

Функція Салема є функцією розподілу випадкової величини $\xi$.

Доведення. Дане твердження випливає з того, що $F(x) = P\{\xi < x\}$ і

$$\barwedge \{\xi < x\} = \{\eta_1 < \alpha_1(x)\} \cup \{\eta_1 = \alpha_1(x), \eta_2 < \alpha_2(x)\} \cup \ldots \cup \{\eta_1 = \alpha_1(x),$$

$$\eta_2 = \alpha_2(x), \ldots, \eta_{k-1} = \alpha_{k-1}(x), \eta_k < \alpha_k(x)\} \cup \ldots,$$

причому події, що входять до об'єднання несумісні, оскільки враховуючи незалежність $\eta_k$, маємо

$$\bar{\times}\, P\{\eta_1 = \alpha_1(x), \eta_2 = \alpha_2(x), ..., \eta_{k-1} = \alpha_{k-1}(x), \eta_k < \alpha_k(x)\} = \beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j(x)}.$$

□

Якщо $\bar{\times}\, p_0 = \frac{1}{2}$, то $F(x) = x$. Якщо $\bar{\times}\, p_0 \neq \frac{1}{2}$, то функція Салема $F(x)$ є строго зростаючою сингулярною функцією розподілу [**4**].

**Функція Салема-Такача.** Нехай $\rho$ – задане дійсне додатне число, $a_k = a_k\,(x)$ – номер $(k+1)$-ої відмінної від нуля двійкової цифри $x \in (0,1]$, тобто $a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_k < ...$ – натуральні числа такі, що

$$x = \frac{1}{2^{a_0}} + \frac{1}{2^{a_1}} + ... + \frac{1}{2^{a_k}} + ... = \sum_k 2^{-a_k}.$$

Функція Салема-Такача $T\,(x)$ означується [**7, 13**] рівністю:

$$T\,(x) = \frac{1}{(1+\rho)^{\alpha_0}} + \frac{\rho}{(1+\rho)^{\alpha_1}} + \frac{\rho^2}{(1+\rho)^{\alpha_2}} + ... + \frac{\rho^k}{(1+\rho)^{\alpha_k}} + ... = \sum_k \rho^k\,(1+\rho)^{-a_k(x)} \quad (2)$$

і $T\,(0) = 0$.

[**7**]. Функція Салема-Такача є функцією Салема при $\bar{\times}\, p_0 = \frac{1}{1+\rho}$.

### 3. Функціональні співвідношення, які задовольняє функція Салема

Функція Салема задовольняє функціональне рівняння

$$F(x) = p_{\alpha_1(x)} F(\{2x\}) + \beta_{\alpha_1(x)}, \quad (3)$$

де $\{u\}$ – дробова частина числа $u$.

Доведення. Справді,

$$F(x) = \beta_{\alpha_1(x)} + \beta_{\alpha_2(x)} p_{\alpha_1(x)} + \beta_{\alpha_3(x)} p_{\alpha_1(x)} p_{\alpha_2(x)} + ... = \quad (4)$$

$$= \beta_{\alpha_1(x)} + p_{\alpha_1(x)} \left(\beta_{\alpha_2(x)} + \beta_{\alpha_3(x)} p_{\alpha_2(x)} + ...\right) = \beta_{\alpha_1(x)} + p_{\alpha_1(x)} F(\{2x\}),$$

оскільки $\bar{\times}\{2x\} = \Delta^2_{\alpha_2...\alpha_k...} = \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_3}{2^2} + ... + \frac{\alpha_{k+1}}{2^k} + ...$ .

Отже, функція Салема задовольняє рівність (3), що й потрібно було довести. □

Якщо $\alpha_1(x) = i \in \{0,1\}$, то $\bar{\times}\, F(x) = p_i \left(\frac{p_0}{p_1} \cdot i + F\left(\{2x\}\right)\right)$.

Функція Салема задовольняє функціональне рівняння

$$F\left(\frac{x}{2}\right) = p_0 F(x).$$

Доведення. Для $x = \Delta^2_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots} = \dfrac{\alpha_1}{2} + \dfrac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \dfrac{\alpha_k}{2^k} + \ldots$ значення функції Салема в розгорнутому вигляді записується у формі (4) .

Оскільки $\dfrac{x}{2} = \dfrac{0}{2} + \dfrac{\alpha_1(x)}{2^2} + \dfrac{\alpha_2(x)}{2^3} + \ldots + \dfrac{\alpha_k(x)}{2^{k+1}} + \ldots = \Delta^2_{0\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}$, то

$$F\left(\frac{x}{2}\right) = \beta_0 + \beta_{\alpha_1(x)}p_0 + \beta_{\alpha_2(x)}p_0p_{\alpha_1(x)} + \beta_{\alpha_3(x)}p_0p_{\alpha_1(x)}p_{\alpha_2(x)} + \ldots =$$

$$= p_0(\beta_{\alpha_1(x)} + \beta_{\alpha_2(x)}p_{\alpha_1(x)} + \beta_{\alpha_3(x)}p_{\alpha_1(x)}p_{\alpha_2(x)} + \ldots) = p_0F(x).$$

Лему доведено. $\square$

Для довільних $x \in [0,1]$ і $k \in N$ має місце наступна рівність

$$\bar{\times}\, F\left(\frac{x}{2^k}\right) = p_0^kF(x).$$

Функція Салема-Такача задовольняє систему функціональних рівнянь

$$T\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{(1+\rho)^k}T(x),$$

де $k \in N$.

## 4. Самоафінність графіка

Графік функції Салема $\Gamma$ є самоафінною множиною простору $R^2$, причому

$$\Gamma = f_1(\Gamma) \cup f_2(\Gamma),$$

де $f_1$ і $f_2$ – афінні перетворення

$$f_1 : \begin{cases} \bar{\times}\, x' = \frac{1}{2}x, \\ y' = p_0y. \end{cases} \quad f_2 : \begin{cases} \bar{\times}\, x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \\ y' = p_1y + p_0. \end{cases}$$

Самоафінна розмірність графіка функції Салема є розв'язком рівняння

$$\bar{\times}\left(\frac{p_0}{2}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(\frac{p_1}{2}\right)^{\frac{x}{2}} = 1. \qquad (5)$$

Доведення. Можна легко переконатись, що для перетворення $f_1$ виконується наступне:

$$\bar{\times}\, O\,(0;0) \xrightarrow{f_1} O'\,(0;0)$$
$$\bar{\times}\, B\,(1;1) \xrightarrow{f_1} B'\left(\tfrac{1}{2}, p_0\right)$$

аналогічно для перетворення $f_2$

$$\bar{\times}\, B\,(1;1) \xrightarrow{f_2} B'\,(1;1)$$
$$\bar{\times}\, C\left(\tfrac{1}{2}; p_0\right) \xrightarrow{f_2} C'\left(\tfrac{3}{4}; p_1p_0 + p_0\right).$$

Якщо $\Gamma$ – графік функції Салема, то $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, де $\Gamma_i = \square_i \cap \Gamma$, $i = \overline{0,1}$, а $\square_0$ і $\square_1$ – це прямокутники зі сторонами паралельними координатним осям і суміжними вершинами у точках $(0;0)$ і $\bar{\times}\left(\frac{1}{2};p_0\right)$ та $\bar{\times}\left(\frac{1}{2};p_0\right)$ і $(1;1)$ відповідно.

Якщо $\square_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n} = \left\{(x,y) : x = \Delta^2_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}, y = \Delta^{Q_2}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}\right\}$, то $\Gamma_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n} = \square_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n} \cap \Gamma$, для довільного $n \in N$.

Нехай $M(x,y) \in \Gamma$, причому $\bar{\times}\, F(x) = F(\Delta^2_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}) = \Delta^{Q_2}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}$. Тоді подіявши афінним перетворенням $f_1$ на точку $M$, отримаємо $f_1(M) = M'(x',y') \in \Gamma_0$, де $x' = \Delta^2_{0\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}$, $y' = \Delta^{Q_2}_{0\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}$. Отже, $\Gamma$ і $\Gamma_0$ афінно еквівалентні і $f_1(\Gamma) = \Gamma_0$, аналогічно доводиться, що $\Gamma$ і $\Gamma_1$ афінно еквівалентні і $f_2(\Gamma) = \Gamma_1$, тобто, графік функції Салема є самоафінною множиною.

Згідно з означенням самоафінної розмірності самоафінної множини і з використанням виразів афінних перетворень $f_1$ і $f_2$ отримаємо рівняння

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & p_0 \end{vmatrix}^{\frac{x}{2}} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & p_1 \end{vmatrix}^{\frac{x}{2}} = 1$$

для визначення розмірності. Воно після обчислення визначників набуде вигляду (5). Теорему доведено. $\square$

Якщо додатне число $p_0$ задовольняє рівність

$$\sqrt{\frac{1-p_0}{2}} = \left(\sqrt{\frac{p_0}{2}}\right)^2,$$

тобто $p_0 = \sqrt{3} - 1$, то самоафінна розмірність графіка функції Салема дорівнює

$$\frac{\ln(\sqrt{5}-1)-1}{\ln(\sqrt{3}-1)-1}.$$

Якщо самоафінна розмірність графіка функції Салема дорівнює $\bar{\times}\,\frac{2}{3}$, то параметр $\bar{\times}\, p_0 = \frac{27 \pm 5\cdot\sqrt{27}}{54}$.

## Література


[1] *Minkowski H.* Gesammeine Abhandlungen. – Berlin // 1911. – Bd 2. – P.50-51.

[2] *Серпинскій В.* Элементарный примъръ возрастающей функціи имъющей пости всюду производную равную нулю. // Математическій сборникъ, т. XXX, вып. 3, 1916.

[3] *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967. – 256 с.

[4] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – К.: Наукова думка, 1992. – 208 с.

[5] *Salem R.* On some singular monotonic functions which are stricly increasing. // Trans. Amer. Math. Soc., 1943. P. 423-439.

[6] *Marsalia G.* Random variables with independent binary digits // Ann. Math. Statist. – 1971. – 42. №2 – P. 1922-1929. Те ж саме. Случайные величины с независимыми двоичными цифрами. // Дж. Марсалья. // Кибернет. сб. – 1983. – 20. – С. 216-224.

[7] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

[8] *Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Про класифікацію одновимірних сингулярно неперервніх ймовірнісних мір за їх спектральними властивостями. – К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2006., №7. – С. 95-104.

[9] *Albeverio S., Gontcharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Jessen-Wintner type random variables and fractal properties of their distributions // Mathematische Nachrichten, Vol.279 (2006), No.15, 1619-1633.

[10] *Jorgensen E.T., Kornelson A., Shuman L.* Affine systems: asymptotics at infinity for fractal measures. // Acta Appl Math, 2007, No.98, 181-222.

[11] *Albeverio S., Gontcharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits // Random Oper. Stochastic Equations, 2007, Vol. 15., No.1, – P.89-97.

[12] *Працьовитий М.В., Косопльоткіна О.В.* Фрактальні властивості, суперпозиції сингулярних функцій розподілу // Теор. ймов. і мат. стат. – 2002. – Вип. 67. – С.61-69.

[13] *Takacs L.* An increasing continuous singular function // The American Math. Monthly. – 1978. – 85. – P.35-37

[14] *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Spectral properties of image measures under the infinite conflict interactions // Positivity, 10, 2006, No.1, 39-49.