Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2008, № 9. — С. 212–224.

УДК 511.72

Зображення чисел s-адичними рядами Енгеля

Б. І. Гетьман
(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. У даній роботі продовжується вивчення геометрії зображення дійсних чисел рядами Енгеля (знакододатними рядами спеціального виду, члени яких є числами, оберненими до натуральних), обгрунтовується критерій раціональності (ірраціональності) зображення числа. Ми досліджуємо один підклас рядів Енгеля (s-адичні ряди), тополого-метричні та фрактальні властивості множини сум таких рядів.

Abstract. In this paper we continue to study the geometry of representation of real numbers by Engel series (special series such that their terms are reciprocal positive integers), prove the criterion of rationality (irrationality) of representation of number. We examine one subclass of Engel series (s-adic series), topological, metric and fractal properties of the set of all sums of such series.

Вступ

Рядом Енгеля називається знакододатний числовий ряд виду

$$\frac{1}{q_1+1}+\frac{1}{(q_1+1)(q_2+1)}+...+\frac{1}{(q_1+1)(q_2+1)...(q_n+1)}+...., \tag{1}$$

де q_n — натуральні числа, причому

$$q_{n+1}\geq q_n. \tag{2}$$

З даного означення зрозуміло, що існує континуальна множина рядів Енгеля і кожен з них визначається неспадною послідовністю натуральних чисел (q_n).

Прикладом ряду Енгеля є наступний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_1a_2...a_n}, \tag{3}$$

де (a_n) — арифметична прогресія, перший член a_1 $(a_1>1)$ і різниця d якої є натуральними: $a_n=a_1+d\,(n-1)$. Зрозуміло, що існує лише зліченна множина рядів

Енгеля даного виду, оскільки такою є множина пар натуральних чисел. Несуттєво її розширюють прогресії з різницею $d = 0$. Але розгляд підпослідовностей арифметичних прогресій уже приводить до континуальної множини рядів. Класична послідовність Фібоначчі (u_n) (тобто $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$) задовольняє умови (2), тому при $q_n = u_n$ отримаємо відповідний ряд Енгеля. Цікавою є задача про суму цього ряду.

Зазначимо, що кожен ряд Енгеля є збіжним і його сума належить $(0, 1]$. З іншого боку, довільне дійсне число $x \in (0, 1]$ розгортається в ряд Енгеля, причому єдиним чином, незважаючи на те, є воно числом раціональним чи ірраціональним. Точніше: має місце наступне твердження.

Лема 1 ([**4**]). *Для довільного дійсного числа $x \in (0, 1]$ існує єдина послідовність натуральних чисел (a_n) така, що $a_{n+1} \geq a_n \geq 2$ і*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} \equiv \Delta_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}. \tag{4}$$

Числа $a_n = a_n(x)$, які фігурують в розкладі числа x в ряд Енгеля, називаються його *елементами*. При цьому останній запис, що є скороченим записом ряду (4), називається *зображенням числа рядом Енгеля*, а число $a_k = a_k(x)$ називається *k-ою цифрою даного зображення*. Оскільки кожне число $x \in (0, 1]$ має єдиний розклад в ряд Енгеля (при цьому алфавітом для зображення є множина всіх натуральних чисел, більших 1), то поняття k-ої цифри зображення є коректно визначеним. Якщо $a_n = const = p$ при $n > n_0$, то кажуть, що зображення числа рядом Енгеля є періодичним з періодом (p). З умови (2) випливає, що зображення числа рядом Енгеля може мати лише простий період (тобто складається з одного елемента).

Частково історія розвитку теорії зображень чисел рядами Енгеля висвітлена в [**4**]. Зазначимо лише, шо вперше в загальному вигляді вони були обґрунтовані в роботі Серпінського [**9**], і природно їх було б називати розкладами чисел в ряди Серпінського. Зауважимо, що розклади чисел в ряди Енгеля вивчалися в ряді робіт [**12**] і використовувалися в різних цілях, зокрема, для дослідження розподілів випадкових величин.

У даній роботі ми в п. 1 наводимо своє доведення критерія раціональності числа, який відомий ще з роботи [**9**], і цікавимось лише одним простим підкласом рядів Енгеля, а саме — множиною тих, що мають двосимвольні зображення в системі числення з основою s і алфавітом $\{0, 1\}$. Ми досліджуємо масивність, тополого-метричні і фрактальні властивості множини E сум всіх s-адичних рядів Енгеля. Теорема 5 (основний результат цієї статті) стверджує, що множина E є континуальною, ніде не щільною, аномально фрактальною множиною (має нульову розмірність Хаусдорфа-Безиковича [**5**]). Це є свідченням того, що множина всіх чисел $x \in [0,1]$, які розгортаються в s-адичний ряд Енгеля не досить бідна в тополого-метричному відношенні.

1. Необхідні і достатні умови раціональності числа

Очевидним є твердження: число, що має періодичне зображення рядом Енгеля, є числом раціональним. Доведемо, що правильне обернене твердження.

Лема 2. *Якщо для ряду* (4) *числова послідовність визначена рівністю*

$$x_n := (a_1 a_2 ... a_n) r_n = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}} + ..., \tag{5}$$

де $r_n = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 ... a_n a_{n+j}}$ *- залишок ряду Енгеля* (4), *то мають місце наступні співвідношення:*

$$x_{n+1} \leq x_n; \tag{6}$$

$$x_{n+1} = a_{n+1} x_n - 1; \tag{7}$$

$$a_{n+1} = \left[\frac{1}{x_n}\right] + 1. \tag{8}$$

Доведення. 1. Оскільки для елементів a_n ряду Енгеля виконуються нерівності

$$a_{k+1} \geq a_k \text{ для всіх } k \in N,$$

то $x_{n+1} \leq x_n$ згідно з означенням (5) чисел x_n і властивостями збіжних рядів.

2. З означення числа x_n

$$x_n = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}} + ... = \frac{1}{a_{n+1}} \left(1 + \frac{1}{a_{n+2}} + \frac{1}{a_{n+2}a_{n+3}} + ...\right)$$

випливає рівність

$$x_n = \frac{1}{a_{n+1}} \left(1 + x_{n+1}\right),$$

яка рівносильна рівності (7).

3. Враховуючи знакододатність ряду Енгеля і те, що $a_{n+1} \geq a_n$, отримуємо

$$\frac{1}{a_{n+1}} < x_n \leq \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+1}^2} + \frac{1}{a_{n+1}^3} + ... = \frac{1}{a_{n+1} - 1}.$$

Тоді

$$a_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{x_n} < a_{n+1}.$$

Згідно з означенням цілої частини числа x_n^{-1}

$$\left[\frac{1}{x_n}\right] = a_{n+1} - 1,$$

що рівносильно рівності (8). $\square$

НАСЛІДОК 1. *Якщо* $x_{k+1} \neq x_k$ *для послідовності* (x_n)*, визначеною рівністю* (5)*, то* $x_{k+1} < x_k$*.*

Лема 3. *Якщо для двох послідовних членів послідовності* (x_n) *зображення числа* x *рядом Енгеля* (4) *виконується рівність*

$$x_{k+1} = x_k,$$

то для всіх $i \in \mathbb{N}$ *мають місце рівності*

$$a_{k+1+i} = a_{k+1} \ \text{ і } \ x_{k+1+i} = x_k.$$

ДОВЕДЕННЯ. Проведемо доведення методом математичної індукції.

1. Нехай $i = 1$. Тоді з леми 2, а саме: рівності (8), маємо

$$a_{k+2} = \left[\frac{1}{x_{k+1}}\right] + 1 = \left[\frac{1}{x_k}\right] + 1 = a_{k+1}.$$

Тоді, використовуючи рівність (7), одержимо

$$x_{k+2} = a_{k+2}x_{k+1} - 1 = a_{k+1}x_k - 1 = x_{k+1} = x_k.$$

2. Припустимо, що

$$\begin{cases} x_{k+1+i} = x_k, \\ a_{k+1+i} = a_k; \end{cases}$$

при всіх $i \leq m$.

3. Розглянемо $i = m + 1$. Оскільки за припущенням $x_{k+1+m} = x_k$, то

$$a_{k+1+m+1} = \left[\frac{1}{x_{k+1+m}}\right] + 1 = \left[\frac{1}{x_k}\right] + 1 = a_{k+1}.$$

Тоді, використовуючи припущення, отримаємо:

$$x_{k+1+m+1} = a_{k+2+m}x_{k+1+m} - 1 = a_{k+1}x_k - 1 = x_{k+1}.$$

Згідно з принципом математичної індукції твердження істинне для довільного натурального i. □

Теорема 1. *Для того щоб число* $x \in (0, 1]$ *було раціональним, необхідно і достатньо, щоб його зображення рядом Енгеля було періодичним, тобто* $x_k = const$ *і* $a_k = const$ *і для всіх* k*, більших деякого* k_0*.*

ДОВЕДЕННЯ. *Необхідність.* Нехай x є числом раціональним. Тоді всі числа x_k, визначені в лемі 2, теж є раціональними. Позначимо через $\frac{c_k}{d_k}$ нескоротний дріб, рівний x_k. Доведемо, що існує k_0 таке, що $x_k = const$ для всіх $k > k_0$. Згідно з лемою 3 досить показати існування одного такого k, що $x_{k+1} = x_k$.

Скористаємось методом від супротивного. Припустимо, що $x_{k+1} \neq x_k$ для всіх достатньо великих $k \in N$. Розглянемо x_{k+1} і скористаємось рівністю (7):

$$x_{k+1} = \frac{c_{k+1}}{d_{k+1}} = a_{k+1}x_k - 1 = a_{k+1}\frac{c_k}{d_k} - 1 = \frac{a_{k+1}c_k - d_k}{d_k}.$$

Оскільки дроби

$$\frac{c_{k+1}}{d_{k+1}} \text{ і } \frac{a_{k+1}c_k - d_k}{d_k}$$

рівні і перший дріб є нескоротним, то

$$\begin{cases} d_{k+1} \leq d_k, \\ c_{k+1} \leq a_{k+1}c_k - d_k. \end{cases}$$

Оскільки ж, враховуючи лему 2 і означення цілої частини числа,

$$a_{k+1}c_k - d_k = c_k\left(\left[\frac{d_k}{c_k}\right] + 1\right) - d_k \leq c_k\left(\frac{d_k}{c_k} + 1\right) - d_k = c_k,$$

то $c_{k+1} \leq c_k$.

Припустивши, що $c_{k+1} = c_k$, одержимо

$$\frac{c_{k+1}}{d_{k+1}} \geq \frac{c_k}{d_k}, x_{k+1} \geq x_k.$$

Але лема 2 стверджує, що $x_{k+1} \leq x_k$. Тому $x_{k+1} = x_k$ згідно з лемою 2, що суперечить припущенню і доводить необхідність.

Достатність умови $x_k = const$ при $k > k_0$ для раціональності числа x є очевидною. □

Наслідок 2. *Число $x \in (0, 1]$ є ірраціональним тоді і тільки тоді, коли його зображення рядом Енгеля є неперіодичним.*

2. s-адичні ряди Енгеля

Нехай s — фіксоване натуральне число, більше 1, $A = \{0, 1, \ldots, s-1\}$.

Подання числа $x \in [0, 1]$ у вигляді

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i(x)}{s^i} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{s^k} + \cdots,$$

де $\alpha_k \in A$, називається *s-адичним розкладом* (представленням) числа x, що скорочено зображається у вигляді

$$x = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}.$$

При цьому число $\alpha_k = \alpha_k(x)$ називається *k-ою s-адичною цифрою x.*

Числа, які мають s-адичне зображення з періодом (0), називаються *s-адично раціональними.* Вони мають два різні зображення:

$$\Delta^s_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(0)} = \Delta^s_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}(\alpha_n-1)(s-1)\ldots(s-1)\ldots}.$$

Числа, що не є s-адично раціональними, називаються *s-адично ірраціональними.* Вони мають єдине s-адичне зображення. Кожне ірраціональне число є s-адично ірраціональним. Кожне s-адично раціональне число є раціональним, але не кожне раціональне є s-адично раціональним.

Означення 1. Нехай $c_1, \dots, c_m$ — фіксований набір чисел з множини A. s-адичним циліндром рангу m з основою $c_1 \dots c_m$ називається множина $\Delta^s_{c_1 \dots c_m}$ всіх тих чисел x, які мають s-адичне зображення з першими цифрами відповідно рівними $c_1, c_2, \dots, c_m$.

Циліндр є відрізком. Інтервал з тими ж кінцями будемо позначати через $\nabla^s_{c_1 \dots c_m}$.

Означення 2. Якщо (n_k) — неспадна послідовність натуральних чисел, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s^{n_k}} = \frac{1}{s^{n_1}} + \frac{1}{s^{n_2}} + ... + \frac{1}{s^{n_k}} + ... \qquad (9)$$

називається *s-адичним рядом.*

Ряд (9) є представленням своєї суми в системі числення з основою s, тобто s-адичним представленням.

Означення 3. s-адичний ряд, який є одночасно рядом Енгеля, називається *s-адичним рядом Енгеля.*

Теорема 2. *Для того щоб s-адичний ряд* (9) *був рядом Енгеля, необхідно і достатньо, щоб*

$$\begin{cases} n_1 \le n_2 - n_1 & \Leftrightarrow \quad 2n_1 \le n_2; \\ n_{k+1} - n_k \le n_{k+2} - n_{k+1} & \Leftrightarrow \quad 2n_{k+1} \le n_k + n_{k+2}, \quad k = 1, 2, \dots \ . \end{cases} \qquad (10)$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай ряд (9) є рядом Енгеля. Оскільки

$$s^{n_2} = s^{n_1} \cdot s^{n_2 - n_1},$$

то з умови (2):

$$a_1 = q_1 + 1 = s^{n_1} < q_2 + 1 = a_2 = s^{n_2 - n_1}$$

маємо $n_1 \le n_2 - n_1$. Для довільного $k \in N$

$$s^{n_{k+2}} = s^{n_1} \cdot s^{n_2 - n_1} \cdot s^{n_3 - n_2} \cdot \ldots \cdot s^{n_{k+1} - n_k} s^{n_{k+2} - n_{k+1}}.$$

Тому з умови (2) на члени ряду Енгеля маємо

$$n_{k+1} - n_k \le n_{k+2} - n_{k+1},$$

що і вимагалось довести.

Достатність. Нехай мають місце співвідношення (10). Переписавши ряд (9) у вигляді

$$\frac{1}{s^{n_1}}+\frac{1}{s^{n_1}s^{n_2-n_1}}+\frac{1}{s^{n_1}s^{n_2-n_1}s^{n_3-n_2}}+\cdots+\frac{1}{s^{n_1}s^{n_2-n_1}\ldots s^{n_{k+1}-n_k}s^{n_{k+2}-n_{k+1}}}+\cdots,$$

бачимо, що він задовольняє означення ряду Енгеля. □

Наслідок 3. *Існує єдине s-адично раціональне число, яке є сумою s-адичного ряду Енгеля, це:*

$$x=\Delta^2_{(1)}=\Delta^2_{111\ldots}=1.$$

Наслідок 4. *Число x є сумою s-адичного ряду Енгеля тоді і тільки тоді, коли існує неспадна послідовність натуральних чисел (m_n) така, що*

$$x=\frac{1}{s^{m_1}}+\frac{1}{s^{m_1+m_2}}+...+\frac{1}{s^{m_1+m_2+...+m_n}}+\ldots. \tag{11}$$

3. Множина E_s сум всіх s-адичних рядів Енгеля

Нас цікавлять масивність і властивості множини E всіх чисел $(0,1]$, які можуть бути зображені s-адичним рядом Енгеля при спеціальному виборі s. Іншими словами, нас цікавлять властивості множини сум всіх s-адичних рядів Енгеля. Очевидно, що

$$E=E_2\cup E_3\cup\ldots\cup E_n\cup\ldots,$$

де E_s — множина тих чисел, які мають такі розклади при фіксованому s. З вивчення властивостей множини E_s і розпочнемо дослідження.

Теорема 3. *Для того, щоб число $x\neq\frac{s}{s-1}$ належало множині E_s, необхідно і достатньо, щоб існували натуральне число k і неспадна послідовність натуральних чисел (m_n) такі, що*

$$x=\Delta^s_{\underbrace{1\ldots1}_{k-1}\underbrace{0\ldots0}_{m_1}1\underbrace{0\ldots0}_{m_2}10\ldots01\underbrace{0\ldots0}_{m_n}10\ldots}. \tag{12}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай число $x\in E_s$, тоді воно розгортається в ряд (9).

Оскільки виконуються умови (10), то s-адичне зображення x може:

1) починатись цифрою 1;
2) починатись цифрою 0.

У випадку першої цифри 1 умови (10) допускають довільну довжину першої серії одиниць. Вони ж виключають можливість у всіх інших серіях одиниць мати їх більше 1. При цьому довжина серій нулів є неспадною.

Якщо ж s-адичне зображення числа починається цифрою 0, то згідно з умовами (10) воно не містить серед пар двох послідовних цифр пару 11, а послідовність довжин серій нулів знову ж таки є неспадною. Обидва випадки приводять до зображення (12).

Достатність. Якщо s-адичне зображення числа x має форму (12), то воно, очевидно, задовольняє означення s-адичного ряду (а саме: умови (9) — (10)).

Число $x = \frac{s}{s-1}$ розгортається в s-адичний ряд Енгеля

$$x = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \cdots + \frac{1}{s^k} + \cdots$$

і має зображення $\Delta^s_{(1)}$, яке відмінне від (12). □

Лема 4. *Множина* $C = C[s, \overline{11}]$ *чисел* $[0,1]$, *s-адичне зображення яких не містить пари послідовних цифр* 11 *є ніде не щільною самоподібною множиною нульової міри Лебега, самоподібна розмірність якої дорівнює* $\log_s \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Доведення. Оскільки для довільного інтервала $(\alpha,\ \beta) \subset [0,1]$ легко вказати циліндр $\Delta^s_{c_1\ldots c_k}$, який повністю належить $(\alpha,\ \beta)$ і

$$\nabla^s_{c_1\ldots c_k} \bigcap C = \emptyset,$$

то C є ніде не щільною множиною згідно з означенням.

Враховуючи, що

$$C \bigcap \nabla^s_{11} = \emptyset, \quad C = \overline{\Delta}^s_{00} \bigcup \overline{\Delta}^s_{10} \bigcup \overline{\Delta}^s_{010},$$

де

$$\overline{\Delta}^s_{00} = C \bigcap \Delta^s_{00}, \quad C \overset{\frac{1}{s^2}}{\sim} \overline{\Delta}^s_{00} \cong \Delta^s_{10} = C \bigcap \Delta^s_{10}, \quad C \overset{\frac{1}{s^3}}{\sim} \Delta^s_{010} = C \bigcap \Delta^s_{010},$$

то C є самоподібною множиною, самоподібна розмірність якої є розв'язком рівняння

$$2\left(\frac{1}{s^2}\right)^x + \left(\frac{1}{s^3}\right)^x = 1.$$

Підстановка $\frac{1}{s^x} = u$ приводить до рівняння

$$u^3 + 2u^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u+1)(u^2 + u - 1) = 0.$$

Оскільки $u > 0$, то

$$u = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Звідки

$$s^x = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \text{і} \quad x = \log_s \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

□

Зауваження 1. *При* $s = 2$ *самоподібна розмірність множини* $C = C[s, \overline{11}]$ *дорівнює* $\log_2\left(1+\sqrt{5}\right) - 1$.

Наслідок 5. *Оскільки $E_s \subset C$, то розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини E_s не перевищує $\log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.*

Лема 5. *Множина E_s має структуру*

$$E_s = E_s^0 \cup E_s^1 \cup \ldots \cup E_s^m \cup \ldots, \tag{13}$$

де

$$E_s^m = \left\{ x: \ x = \Delta_{\underbrace{1\ldots1}_{m}\underbrace{0\ldots0}_{m_1}1\underbrace{0\ldots0}_{m_2}10\ldots01\underbrace{0\ldots0}_{m_n}10\ldots} \right\},$$

m — фіксоване ціле невід'ємне число, (m_n) — довільна непадна послідовність натуральних чисел, причому

$$E_s^i \cap E_s^j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j, \tag{14}$$

і E_s^0 подібна множині E_s^m з коефіцієнтом s^{-m}.

Доведення. Враховуючи теорему 3, рівності (13) і (14) є очевидними.

Подібність множин E_s^0 і E_s^m випливає з "незалежності" елементів пари $(m, (m_n))$, що однозначно визначають точку множини E_s (дописавши до s-адичного зображення числа $x \in E_s^0$ "префікс" $\underbrace{1\ldots1}_{m}$ отримаємо зображення деякої точки множини E_s^m). Справді, перетворення простору $\mathbb{R}^1$ $f(x) = kx+b$, де $b = \frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\cdots+\frac{1}{s^m}$, з коефіцієнтом подібності

$$k = s^{-m} = |\Delta^s_{\underbrace{1\ldots1}_{m}}| = \frac{|\Delta^s_{1\ldots10}|}{|\Delta^s_0|},$$

переводить E_s^0 в E_s^m. □

Зауваження 2. *З подібності множин E_s^m випливає, що всі вони мають однакові тополого-метричні властивості за виключенням величини діаметра. Тому зосередимось на вивченні властивостей множини E_s^0.*

Лема 6. *Для довільного натурального d має місце розклад*

$$E_s^0 = E_s^{0d} \cup E_s^{0>d},$$

де $E_s^{0d} = \{x: \ |m_n(x)| \leq d\}$, $E_s^{0>d} = E_s^0 \setminus E_s^{0d}$, причому E_s^{0d} — множина зліченна і виконується рівність фрактальних розмірностей Хаусдорфа-Безиковича

$$\alpha_0\left(E_s^0\right) = \alpha_0\left(E_s^{0>d}\right). \tag{15}$$

Доведення. Справді, серед точок множини E_s^0 існують такі, у яких послідовність довжин серій нулів є обмеженою зверху числом d (наприклад, $\Delta^s_{(01)}$), тобто множина E_s^{0d} є непорожньою.

Легко бачити, що E_s^{0d} є множиною чисел, що мають періодичне s-адичне зображення. Тому E_s^{0d} є зліченною множиною. Очевидно, також, що $E_s^{0>d}$ є непорожньою. Враховуючи, що $\alpha_0\left(E_s^{0d}\right)=0$ і $\alpha_0\left(A\cup B\right)=\max\left\{\alpha_0(A),\alpha_0(B)\right\}$, маємо (15). $\square$

Лема 7. *Нехай m — фіксоване натуральне число,*

$$V=\left\{\underbrace{0\ldots0}_{m},\ \underbrace{10\ldots0}_{m},\ \underbrace{010\ldots0}_{m},\ \ldots,\ \underbrace{0\ldots01}_{m}\right\}.$$

Множина всіх B_s^m чисел $x\in[0,1]$, s-адичне зображення яких має властивість “для довільного $k\in\mathbb{N}$ $\alpha_{ks+1}\alpha_{ks+2}\ldots\alpha_{ks+m}\in V$” є самоподібною множиною, самоподібна розмірність якої співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича і дорівнює $\frac{\log_s(m+1)}{m}$.

Доведення. Нехай

$$\overline{\Delta}^{s}_{c_1\ldots c_m}=\Delta^{s}_{c_1\ldots c_m}\cap B_s^m.$$

Оскільки

$$B_s^m=\overline{\Delta}^{s}_{\underbrace{0\ldots0}_{m}}\cup\overline{\Delta}^{s}_{\underbrace{10\ldots0}_{m}}\cup\ldots\cup\overline{\Delta}^{s}_{\underbrace{0\ldots01}_{m}}$$

і

$$B_s^m\overset{1/s^m}{\sim}\overline{\Delta}^{s}_{\underbrace{0\ldots0}_{m}}\cong\overline{\Delta}^{s}_{\underbrace{10\ldots0}_{m}}\cong\ldots\cong\overline{\Delta}^{s}_{\underbrace{0\ldots01}_{m}},$$

то B_s^m самоподібна і рівняння для визначення її самоподібної розмірності має вигляд

$$(m+1)\left(\frac{1}{s^m}\right)^x=1.$$

Звідки $x=\alpha_0\left(B_s^m\right)=\frac{\log_s(m+1)}{m}$. $\square$

Теорема 4. *Множина E_s є:*

1) незамкненою;

2) континуальною;

3) ніде не щільною;

4) нуль-множиною Лебега;

5) розмірність Хаусдорфа-Безиковича якої дорівнює 0.

Доведення. 1) Нехай $k,n,m_1,m_2,\ldots,m_n$ — фіксовані натуральні числа, причому $m_1\le m_2\le\ldots\le m_n$. Згідно з теоремою 3 число x_j, яке має s-адичне зображення з періодом $\left(\underbrace{0\ldots0}_{m_n+j}1\right)$:

$$x_j=\Delta^{s}_{\underbrace{1\ldots1}_{k-1}\underbrace{0\ldots0}_{m_1}1\underbrace{0\ldots0}_{m_2}10\ldots01\underbrace{0\ldots0}_{m_n}1(\underbrace{0\ldots0}_{m_j+1}1)},$$

належить E_s. Справді,

$$\lim_{j\to\infty} x_j = \Delta^s_{\underbrace{1\ldots1}_{k-1}\underbrace{0\ldots0}_{m_1}1\underbrace{0\ldots0}_{m_2}10\ldots01\underbrace{0\ldots0}_{m_n}1(0)} \notin E_s.$$

Отже, E_s містить всі свої граничні точки, тобто є незамкненою.

2) Континуальність множини E випливає з того, що між $E_s^0 \subset E_s$ і $[0,1]$ сюр'єктивне відображення встановлюється рівністю

$$f(x) = y = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \cdots\ ,$$

де

$$\alpha_1 = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m_1 = 1, \\ 1 & \text{при} \quad m_1 > 1, \end{cases}$$

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m_{n+1} = m_n, \\ 1 & \text{при} \quad m_{n+1} > m_n. \end{cases}$$

3) Доведемо ніде не щільність множини E_s. Для цього скористаємось означенням.

Розглянемо довільний інтервал $(\alpha, \beta) \subset [0,1]$. Легко вказати s-адичний циліндр, який повністю належить (α, β). Нехай таким є $\Delta^s_{c_1\ldots c_m}$. Тоді, враховуючи теорему 3, s-адичний інтервал $\nabla^s_{c_1\ldots c_m 11}$ не містить жодної точки множини E_s. Таким чином, E_s є ніде не щільною множиною згідно з означенням.

5) Враховуючи леми 5 — 7, досить довести, що

$$\alpha_0\left(E_s\right) = 0.$$

Очевидно, що множина $E_s^{0>m}$ належить множині $\overline{B}_s^{\,m}$, кожна точка якої має властивість: "серед довільної групи послідовних s-адичних цифр довжини m цифра 1 зустрічається не більше одного разу".

Очевидно, що

$$E_s^{0>m} \subset \overline{B}_s^{\,m} \subset B_s^m.$$

Тоді, враховуючи лему 6, для довільного $m \in \mathbb{N}$

$$\alpha_0\left(E_s^{0>m}\right) \leq \alpha_0\left(B_s^m\right) = \frac{\log_s(m+1)}{m} \to 0 \ (m \to \infty).$$

Отже,

$$0 = \alpha_0\left(E_s^{0>m}\right) = \alpha_0\left(E_s\right).$$

4) Оскільки $\alpha_0\left(E_s\right) = 0$, то міра Лебега множини E_s дорівнює 0. □

4. Фрактальні властивості множини E сум s-адичних рядів Енгеля

Теорема 5. *Множина E є континуальною, аномально фрактальною множиною (має нульову розмірність Хаусдорфа-Безиковича).*

Доведення. Оскільки

$$E = \bigcup_{s=2}^{\infty} E_s$$

і, згідно з теоремою 4, розмірність Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(E_s) = 0$ для кожного $s \in \mathbb{N}$, то враховуючи властивість зліченної стабільності розмірності Хаусдорфа-Безиковича:

$$\alpha_0\left(\bigcup_{s=2}^{\infty} E_s\right) = \sup \alpha_0(E_s) = 0.$$

Отже, $\alpha_0(E) = 0$, що й вимагалось довести.

□

Література

[1] *Працьовитий М. В., Барановський О. М.* Використання рядів Остроградського для аналітичного задання розподілів випадкових величин і відображень // Динамічні системи: Праці Українського математичного конгресу. — 2001. — Київ: Ін-т. Матем. НАН України, 2003. — С. 59-76.

[2] *Працьовитий М. В., Барановський О. М.* Властивості розподілів випадкових величин з незалежними різницями послідовних елементів ряду Остроградського // Теорія ймовірностей та матемаична статистика. — 2004. — № 70. — С. 131-144.

[3] *Працьовитий М. В., Барановський О. М.* Про міру Лебега деяких множин чисел, визначених властивостями їх розкладу в ряд Остроградського // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. — Серія 1. Фіз мат науки. — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. — № 5.—- С. 217-227.

[4] *Працьовитий М. В., Гетьман Б. І.* Ряди Енгеля та їх застосування // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. — Серія 1. Фіз мат науки. — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. — **7**.—- С. 105-116.

[5] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[6] *Andrews G. E., Knopfmacher A., Paule P., Prodinger H.* q-Engel series expansions and slaters identities // Quaestiones Mathematicae, 2001. — **24(3)**. — P. 403-416.

[7] *Engel F.* Entwicklunj der cahlen nach Stammbrüchen. Verhandl. d. 52 Versammlunj deuescher Philologen und Schulmänner in Marburg von 29. September bis 3 october 1913, Leipzcig 1914. — S. 190-191.

[8] *Erdös P., Shallit J. O.* New bounds on the length of finite pierce and Engel series // Journal de theorie des nombres de Bordeaux, 1991. — **3**, no. 1. — P. 43-53.

[9] *Sierpinski W.* O kilku algorytmach dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi. Sprawozdania z posiedsen Towarsystwa Naukowego Warszawskiego, Wydzial III 4 (1911).-P. 56-77. (є франц. переклад: Sur quelques algorithmes pour développer les nombres réels en séries // Oeuvres choisies, T.1, PWN Warchawa, 1974, P. 236-254.)

[10] *Schweiger F.* Ergodic theory of fibred systems and metric number theory // F. Schweiger. — New York: Oxford University Press, 1995. — 320 p.

[11] *Stratemeyer G.* Entwicklunj positiver cahlen nach Stammbrüchen. (Dissertation), Mitteil. Des mathem. Seminars d. Universität Giessen. Bd. II H. 20 (1931) P. 3-10, 25.

[12] *Willams D.* On Renyi's "record"problem Engel's series //Bull. London Math. Soc., 1973. — **5**. — P. 235-237.

[13] *Wu J.* Engel series expansions of laurent series and hausdorff dimensions // J. Aust. Math. Soc., 2003. — **75**. — P. 1–7.