Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2008, № 9. — С. 148–160.

УДК 511.72

Про метричну теорію розкладів Остроградського 2-го виду

І. М. Працьовита, Г. М. Торбін
(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. В роботі розвивається метрична теорія розкладів Остроградського 2-го виду та здійснюється порівняння даної теорії з відповідними метричними теоріями ланцюгових дробів та розкладів Остроградського-Пірса. Основна увага приділена метричним властивостям спеціальних множин канторівського типу, що складаються з дійсних чисел, на різницеві розклади Остроградського 2-виду яких накладено додаткові обмеження.

Abstract. We develop metric theory of the second Ostrogradsky expansion and compare this theory with the corresponding metric theor of continued fraction expansion and the Ostrogradsky-Pierce expansion. The main attention is paid to the metric properties of special Cantor-type sets consisting of real numbers whose second Ostrogradsky expansions are under special restrictions.

1. Вступ

На початку 60-х років 19 століття М. В. Остроградський розглянув два алгоритми розкладу додатних дійсних чисел в знакозмінні ряди:

$$\sum_k \frac{(-1)^{k-1}}{q_1 q_2 \cdots q_k}, \quad \text{де} \quad q_k \in N, q_{k+1} > q_k, \tag{1}$$

$$\sum_k \frac{(-1)^{k-1}}{q_k}, \quad \text{де} \quad q_k \in N, q_{k+1} \geq q_k(q_k+1) \tag{2}$$

(ряди Остроградського 1-го і 2-го видів відповідно). Варто відзначити, що на сьогодні існує ціла низка робіт (див.[**1, 2, 9, 10, 11, 7**] та посилання в них), присвячених дослідженню розкладів дійсних чисел в знакозмінні ряди Остроградського першого виду (які також відомі в англомовній літературі як ряди Пірса) та ймовірнісних розподілів, що з ними пов'язані. Розклади Остроградського другого виду вивчені значно

Робота частково підтримана проектами DFG 436 113/97 та фондом Олександра фон Гумбольдта

менше ([**7, 8**]). Відомо, зокрема, що кожне дійсне число $x \in (0,1)$ можна подати у вигляді скінченного чи нескінченного виразу (1). Якщо число x є ірраціональним, то це можна зробити єдиним чином і вираз (2) при цьому є нескінченним, якщо ж x є раціональним, то його можна подати у вигляді (2) зі скінченною кількістю доданків двома різними способами. Ряди Остроградського збігаються досить швидко, що дозволяє наближати ірраціональні числа числами раціональними, що є частковими сумами ряду Остроградського.

Зображення числа x у вигляді

$$x = \sum_k \frac{(-1)^{k-1}}{q_k(x)}, \quad \text{де} \;\; q_k(x) \in N, q_{k+1}(x) \geq q_k(x)(q_k(x)+1) \tag{3}$$

називатимемо O^2*-зображенням* і будемо позначати $O^2(q_1(x), \ldots, q_n(x), ...)$.

При зафіксованих перших k символах, k+1-й символ O^2-зображення не може набувати значень $1, 2, 3, 4, 5, ..., q_k(q_k+1)-1$, що робить символи O^2-зображення "нерівноправними". Нехай

$$d_1 = q_1 \quad \text{і} \quad d_{k+1} = q_{k+1} - q_k(q_k+1) + 1 \quad \forall k \in N.$$

Тоді попередній ряд можна переписати у вигляді

$$x = \sum_k \frac{(-1)^{k+1}}{q_{k-1}(x)(q_{k-1}(x)+1) - 1 + d_k(x)} =: \bar{O}^2(d_1(x), d_2(x), \ldots, d_k(x), \ldots). \tag{4}$$

Вираз (4) називається $\bar{O}^2$-розкладом (різницевим розкладом Остроградського другого виду, розкладом Остроградського другого виду з незалежними приростами), а число $d_k = d_k(x)$ - k-м $\bar{O}^2$-символом числа x. В $\bar{O}^2$-зображенні кожен із символів, незалежно від значення попереднього, може набувати всіх натуральних значень.

Основними завданнями даної роботи є розвиток метричної теорії розкладів Остроградського 2-го виду та порівняння цієї теорії з добре розвинутою метричною теорією ланцюгових дробів і метричною теорією розкладів Остроградського-Пірса.

2. Тополого-метричні і фрактальні властивості множин канторівського типу $C[\bar{O}^2, \{V_k\}]$

Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — заданий набір натуральних чисел. *Циліндром рангу n з основою $c_1c_2\ldots c_n$* називається множина всіх $x \in (0,1]$ виду

$$\Delta^{O^2}_{c_1c_2\ldots c_n} = \{x : x = O^2(q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots), q_i = c_i, i = \overline{1,n}, q_{n+j} \in N\}.$$

Лема 1. *Для довільних натуральних i та k мають місце властивості.*

1. $\Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_n} = \bigcup\limits_{i=c_n(c_n+1)}^{\infty} \Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_n i}.$

2. $\inf \Delta^{O^2}_{c_1\ldots 2m-1} = \sum\limits_{k=1}^{2m-1} \frac{(-1)^{k-1}}{c_k} - \frac{1}{c_{2m-1}(c_{2m-1}+1)} = O^2(c_1,\ldots,c_{2m-1},c_{2m-1}(c_{2m-1}+1)) =$
$= O^2(c_1,\ldots,c_{2m-2},c_{2m-1}+1) \in \Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m-1}}$;
$\sup \Delta^{O^2}_{c_1\ldots 2m-1} = \sum\limits_{k=1}^{2m-1} \frac{(-1)^{k-1}}{c_k} = O^2(c_1,\ldots,c_{2m-1}) \in \Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m-1}}$;
$\inf \Delta^{O^2}_{c_1\ldots 2m} = \sum\limits_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{c_k} = O^2(c_1,\ldots,c_{2m}) \in \Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m}}$;
$\sup \Delta^{O^2}_{c_1\ldots 2m} = \sum\limits_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{c_k} + \frac{1}{c_{2m}(c_{2m}+1)} = O^2(c_1,\ldots,c_{2m},c_{2m}(c_{2m}+1)) =$
$= O^2(c_1,\ldots,c_{2m-1},c_{2m}+1) \in \Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m}}$.

3. $\sup \Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m-1}i} = \inf \Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m-1}(i+1)}$;
$\inf \Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m}i} = \sup \Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m}(i+1)}$.

4. Для довжини циліндричного відрізка рангу n мають місце співвідношення:

$$|\Delta^{O^2}_{c_1\ldots\ldots c_n}| = \frac{1}{c_n(c_n+1)} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Кожен з циліндрів O^2-зображення може бути однозначно перепозначений у термінах $\bar{O}^2$-зображення, а саме:

$$\Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_n} \equiv \bar{\Delta}^{O^2}_{a_1\ldots\ldots a_n},$$

де $a_1 = c_1,\ a_k = c_k + 1 - c_{k-1}(c_{k-1}+1),\ 1 < k < n.$

Властивості циліндрів, що відповідають O^2-зображенню, породжують аналогічні властивості для циліндрів, що відповідають $\bar{O}^2$-зображенню.

Нехай $V_k \subset N$ і

$$C = C[\bar{O}^2,\{V_k\}] = \{x:\ x = \bar{O}^2(d_1,d_2,\ldots,d_k,\ldots), d_k \in V_k, \forall k \in N\}. \tag{5}$$

Для випадку ланцюгових дробів та рядів Остроградського 1-го виду аналогічні множини вивчались дуже інтенсивно . Зрозуміло, що при $V_k \neq N$ для нескінченної кількості значень індекса k, множина $C[\bar{O}^2,\{V_k\}]$ буде ніде не щільною.

Основна мета даного підрозділу — дослідити метричні та фрактальні властивості множини (5) та визначити залежність цих властивостей від обраної послідовності $\{V_k\}$ дозволених символів.

Нехай

$$F_k = \{x:\ x \in \Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_k},\ a_j \in V_j, j=\overline{1,k}\},$$
$$\overline{F}_{k+1} = \{x:\ x \in \Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}},\ a_j \in V_j, j=\overline{1,k}, a_{k+1} \notin V_{k+1}\}$$

$$\lambda(\overline{F}_{k+1}) = \lambda(F_k) - \lambda(F_{k+1})$$

$$\frac{\lambda(\overline{F}_{k+1})}{\lambda(F_k)} = 1 - \frac{\lambda(F_{k+1})}{\lambda(F_k)}$$

Лема 2. *Міра Лебега множини $C[\bar{O}^2, \{V_k\}]$ дорівнюе*

$$\lambda(C[\bar{O}^2, \{V_k\}]) = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}\right].$$

Доведення.

$$\lambda(C[\bar{O}^2, \{V_k\}]) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} \cdot \frac{\lambda(F_{k-1})}{\lambda(F\lambda_{k-2})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(F_2)}{\lambda(F_1)} \cdot \frac{\lambda(F_1)}{\lambda(F_0)} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda(F_i)}{\lambda(F_{i-1})} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}\right].$$

□

Наслідок 1. *Міра Лебега множини $C[\bar{O}^2, \{V_k\}]$ додатна тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} < +\infty; \tag{6}$$

Множина $C[\bar{O}^2, \{V_k\}]$ має нульову міру Лебега тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} = +\infty. \tag{7}$$

А) Розглянемо спочатку випадок, коли всі множини $\{\overline{V_k}\}$ є скінченними, тобто коли

$$V_k = \{v_k + 1, v_k + 2, \ldots\},$$

де $\{v_k\}$ — деяка послідовність натуральних чисел.

Лема 3. *Для довільної послідовності $a_1, a_2, ..., a_k$ натуральних чисел і для довільного $k \in N$ мають місце наступні нерівності.*

$$\frac{|\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1 a_2 \ldots a_k j}|}{|\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1 a_2 \ldots a_k}|} < \frac{1}{2^{2^{k-1}}};$$

Доведення. З властивостей циліндричних множин і того, що $c_k > c_{k-1}^2 > c_{k-2}^{2^2} > c_{k-3}^{2^3} > \ldots > c_{k-(k-2)}^{2^{k-2}} > c_2^{2^{k-2}} > 2^{2^{k-2}}$ випливає, що

$$\frac{|\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1 a_2 \ldots a_k j}|}{|\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1 a_2 \ldots a_k}|} < \frac{1}{c_k^2} < \frac{1}{(2^{2^{k-2}})^2} = \frac{1}{2^{2^{k-1}}}.$$

□

Теорема 1. *Нехай* $V_k = \{v_k + 1, v_k + 2, \ldots\}$, *де* $v_k \in N$. *Якщо*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_{k+1}}{2^{2^{k-1}}} < +\infty, \tag{8}$$

то $\lambda(C[\bar{O}^2, \{V_k\}]) > 0$.

Доведення. З леми 3 випливає, що

$$\sum_{j=1}^{v_{k+1}} |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1 a_2 \ldots a_k j}| \leq v_{k+1} \cdot |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1 a_2 \ldots a_k 1}| < v_{k+1} \cdot \frac{1}{2^{2^{k-1}}} \cdot |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1 a_2 \ldots a_k}|.$$

Тому

$$\frac{\lambda\left(\overline{F}_{k+1}\right)}{\lambda\left(F_k\right)} = \frac{\sum\limits_{a_1 \in V_1, \ldots, a_k \in V_k} \sum\limits_{j=1}^{v_{k+1}} |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1 a_2 \ldots a_k j}|}{\sum\limits_{a_1 \in V_1, \ldots, a_k \in V_k} |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1 a_2 \ldots a_k}|} \leq$$

$$\leq \frac{\sum\limits_{a_1 \in V_1, \ldots, a_k \in V_k} \frac{v_{k+1}}{2^{2^{k-1}}} |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1 a_2 \ldots a_k}|}{\sum\limits_{a_1 \in V_1, \ldots, a_k \in V_k} |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1 a_2 \ldots a_k}|} = \frac{v_{k+1}}{2^{2^{k-1}}}.$$

Оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_{k+1}}{2^{2^{k-1}}} < +\infty,$$

то з (6) випливає, що $\lambda\left(C[\bar{O}^2, \{V_k\}]\right) > 0$.

□

Твердження 1. *Якщо* $V_k = \{m + 1, m + 2, m + 3, ...\}$ *для деякого* $m \in N$, *то*

$$\lambda(C[\bar{O}^1, \{V_k\}]) > 0; \tag{9}$$

$$\lambda(C[c.f., \{V_k\}]) = 0; \tag{10}$$

$$\lambda(C[\bar{O}^2, \{V_k\}]) > 0. \tag{11}$$

Доведення. Нерівність (9) випливає з теореми 5 статті [**1**].

Для доведення (10), нагадаємо, що для λ-майже всіх $x \in [0, 1]$ задана цифра "i" зустрічається в зображенні ланцюговим дробом дійсного числа x з асимптотичною частотою $\frac{1}{\ln 2} \cdot \ln \frac{(i+1)^2}{i(i+2)}$.

Якщо $i = 1$, то

$$\nu_1^{c.f.}(x) = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{4}{3}$$

для λ-майже всіх $x \in [0, 1]$. З іншого боку,

$$\nu_1^{c.f.}(x) = 0, \ \forall x \in C[c.f., \{V_k\}], \tag{12}$$

що й доводить рівність (10). Нерівність (11) є безпосереднім наслідком з останньої теореми, оскільки ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{m}{2^{2^{k-1}}}$ очевидно збігається. □

Твердження 2. *Якщо* $V_k = \{3^k + 1, 3^k + 2, 3^k + 3, ...\}$, $k \in N$, *то*

$$\lambda(C[\bar{O}^1, \{V_k\}]) = 0; \tag{13}$$

$$\lambda(C[c.f., \{V_k\}]) = 0; \tag{14}$$

$$\lambda(C[\bar{O}^2, \{V_k\}]) > 0. \tag{15}$$

Доведення. Доведення рівності (14) повністю співпадає з доведенням рівності (10). Нерівність (15) є наслідком останньої теореми (достатньо пересвідчитись у збіжності ряду (8).

Щоб довести рівність (13), доведемо дві допоміжні леми, які мають і самостійний інтерес.

Лема 4. *Нехай* $\bar{O}^1_{g_1(x)g_2(x)...g_n(x)...}$ *— розклад Остроградського-Пірса в різницевій формі, де* $g_n(x) \in N$.

Тоді для λ-майже всіх $x \in [0,1]$ виконується нерівність

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{g_n(x)} \leq e \tag{16}$$

Доведення. У [**10**] було доведено, що для звичайного розкладу Остроградського-Пірса $O_{q_1(x)q_2(x)...q_n(x)...}$ $(q_{n+1} > q_n)$ для майже всіх (в смислі міри Лебега) $x \in [0,1]$ справедлива рівність:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q_n(x)} = e, \tag{17}$$

де $q_n(x) = g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_n(x)$.

З (17) випливає, що $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N(\varepsilon, x) > 0 : \quad \forall n > N(\varepsilon, x)$

$$(e-\varepsilon)^n < q_n(x) < (e+\varepsilon)^n$$

$$(e-\varepsilon)^{n+1} < q_{n+1}(x) < (e+\varepsilon)^{n+1}$$

Отже, $g_n(x) = q_{n+1}(x) - q_n(x) < (e+\varepsilon)^{n+1} - (e-\varepsilon)^n < (e+\varepsilon)^{n+1}$.
Тому

$$\sqrt[n]{g_n(x)} < (e+\varepsilon)^{1+\frac{1}{n}}, \ \forall n > N(\varepsilon, x),$$

звідки

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{g_n(x)} \leq e,$$

що доводить дану лему. □

Лема 5. *Якщо*

$$V_k = \{v_k + 1, v_k + 2, \ldots\} \tag{18}$$

і

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{v_k} > e, \tag{19}$$

то $\lambda(C[\bar{O}^1, \{V_k\}]) = 0$.

Доведення. З (18) випливає, що

$$g_k(x) > v_k,\ \forall x \in C[\bar{O}^1, \{V_k\}].$$

Тому

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{g_k(x)} \geq \underline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{v_k} > e,\ \forall x \in C[\bar{O}^1, \{V_k\}].$$

Враховуючи попередню лему, отримаємо:

$$\lambda\left(C[\bar{O}^1, \{V_k\}]\right) = 0.$$

□

Отже, щоб довести рівність (13), достатньо застосувати лему 5 з $v_k = 3^k$. □

Зауваження 1. *Твердження 1 демонструє суттєві відмінності метричної теорії ланцюгових дробів та метричної теорії $\bar{O}^2$-розкладів. В той же час це твердження показує деякі рівні схожості між $\bar{O}^1$- та $\bar{O}^2$-розкладами дійсних чисел. Дійсно, з (9) і (11) випливає, що заборона на використання будь-якої скінченної кількості цифр з алфавіту не впливає на додатність міри Лебега множини $C[\bar{O}^1, \{V_k\}]$, а тому не змінює розмірності Хаусфорфа цієї множини.*

З іншої сторони твердження 2 демонструє очевидні відмінності метричних теорій $\bar{O}^1$- та $\bar{O}^2$-розкладів. Більш детально ці відмінності будуть висвітлені нижче.

Б) Тепер дослідимо випадок, коли

$$V_k = \{1, 2, \dots, m_k\}, \tag{20}$$

де $\{m_k\}$ — довільна послідовність натуральних чисел.

Нехай $M_1 := 1$, і

$$M_{k+1} := (M_k + 1)^2 + m_{k+1},\ \forall k \in N.$$

Теорема 2. *Якщо ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{M_k^2}{m_{k+1}} < +\infty$, *то* $\lambda\left(C[\bar{O}^2, \{V_k\}]\right) > 0$.

Доведення. Зафіксуємо циліндр $\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1\dots a_k}$, тоді

$$\lambda\left(\overline{F}_{k+1} \bigcap \Delta^{\bar{O}^2}_{a_1\dots a_k}\right) = \sum_{i=m_{k+1}+1}^{\infty} |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1\dots a_k i}| = \frac{1}{c_k(c_k+1) + m_{k+1}},$$

де c_k виражається через $a_1, a_2, \dots, a_k$ за допомогою вищенаведених формул.

$$\lambda\left(F_k \bigcap \Delta^{\bar{O}^2}_{a_1\dots a_k}\right) = \lambda\left(\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1\dots a_k}\right) = \frac{1}{c_k(c_k+1)},\ a_j \in V_j, j = \overline{1,k}.$$

$$\frac{\lambda\left(\overline{F}_{k+1} \bigcap \Delta^{\bar{O}^2}_{a_1\dots a_k}\right)}{\lambda\left(F_k \bigcap \Delta^{\bar{O}^2}_{a_1\dots a_k}\right)} = \frac{\frac{1}{c_k(c_k+1)+m_{k+1}}}{\frac{1}{c_k(c_k+1)}} = \frac{c_k(c_k+1)}{c_k(c_k+1) + m_{k+1}}.$$

$$
\begin{gathered}
1 \le c_1 \le m_1, \\
2 \le c_2 \le c_1(c_1+1) - 1 + m_2 \le (m_1+1)^2 + m_2, \\
2 \cdot 3 \le c_3 \le c_2(c_2+1) - 1 + m_3 \le (c_2+1)^2 + m_3 = \left((m_1+1)^2 + m_2\right)^2 + m_3, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
2^{2^{k-2}} \le c_k \le (((m_1+1)^2 + m_2)^2 + \ldots + m_{k-1})^2 + m_k, \\
2^{2^{k-2}} \le c_k \le M_k,
\end{gathered}
$$

тому

$$
\frac{2^{2^{k-2}}(2^{2^{k-2}}+1)}{2^{2^{k-2}}(2^{2^{k-2}}+1)+m_{k+1}} \le \frac{\lambda\left(\overline{F}_{k+1} \bigcap \Delta^{\bar{O}^2}_{a_1\ldots a_k}\right)}{\lambda\left(F_k \bigcap \Delta^{\bar{O}^2}_{a_1\ldots a_k}\right)} \le \frac{M_k(M_k+1)}{M_k(M_k+1)+m_{k+1}}. \tag{21}
$$

Оскільки оцінка (21) буде правильною для всіх циліндрів $\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1\ldots a_k}$, $a_j \in V_j, j = \overline{1,k}$, то

$$
\frac{2^{2^{k-1}}}{2^{2^{k-1}}+m_{k+1}} \le \frac{\lambda(\overline{F}_{k+1})}{\lambda(F_k)} \le \frac{(M_k+1)^2}{(M_k+1)^2+m_{k+1}}.
$$

Якщо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(M_k+1)^2}{(M_k+1)^2+m_{k+1}} < +\infty$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{F}_{k+1})}{\lambda(F_k)} < +\infty$. Тому $\lambda\left(C[\bar{O}^2, V_k]\right) > 0$.

$$
\frac{1}{1+\frac{m_{k+1}}{M_k^2}} = \frac{M_k^2}{M_k^2+m_{k+1}} \le \frac{(M_k+1)^2}{(M_k+1)^2+m_{k+1}} = \frac{\left(\frac{M_k+1}{M_k}\right)^2 \cdot M_k^2}{\left(\frac{M_k+1}{M_k}\right)^2 \cdot M_k^2 + m_{k+1}} \le
$$

$$
\le \frac{4M_k^2}{4M_k^2+m_{k+1}} \le \frac{1}{1+\frac{m_{k+1}}{4M_k^2}} \le \frac{4M_k^2}{m_{k+1}},
$$

звідки випливає, що

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(M_k+1)^2}{(M_k+1)^2+m_{k+1}} < +\infty \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k^2}{m_{k+1}} < +\infty.
$$

Таким чином, якщо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{M_k^2}{m_{k+1}} < +\infty$, то $\lambda\left(C[\bar{O}^2, \{V_k\}]\right) > 0$. □

Теорема 3. *Якщо ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2^{k-1}}}{2^{2^{k-1}}+m_{k+1}}$ *розбігається, то* $\lambda\left(C[\bar{O}^2, \{V_k\}]\right) = 0$.

Доведення. Використовуючи доведення попередньої теореми, матимемо:

$$
\frac{\lambda\left(\overline{F}_{k+1} \bigcap \Delta^{\bar{O}^2}_{a_1\ldots a_k}\right)}{\lambda\left(F_k \bigcap \Delta^{\bar{O}^2}_{a_1\ldots a_k}\right)} \ge \frac{2^{2^{k-1}}}{2^{2^{k-1}}+m_{k+1}}
$$

для всіх циліндрів $\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1\ldots a_k}$, $a_j \in V_j, j = \overline{1,k}$.
Тому

$$
\frac{\lambda\left(\overline{F}_{k+1}\right)}{\lambda(F_k)} \ge \frac{2^{2^{k-1}}}{2^{2^{k-1}}+m_{k+1}} \;\forall k \in N.
$$

Якщо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2^{k-1}}}{2^{2^{k-1}}+m_{k+1}} = +\infty$, то з (7) випливає, що $\lambda\left(C[\bar{O}^2, \{V_k\}]\right) = 0$. □

Наслідок 2. *Множина всіх дійсних чисел одиничного відрізка з обмеженими $\bar{O}^2$-символами має нульову міру Лебега.*

Твердження 3. *Нехай $V_k = \{1, 2, ..., 2^{2^{k-1}}\}$. Тоді*

$$\lambda(C[\bar{O}^1, \{V_k\}]) > 0; \tag{22}$$

$$\lambda(C[c.f., \{V_k\}]) > 0; \tag{23}$$

$$\lambda(C[\bar{O}^2, \{V_k\}]) = 0. \tag{24}$$

Доведення. Рівність (24) є прямим наслідком останньої теореми.

Для того, щоб довести нерівність (22), нагадаємо (див. [**1**]), що умова $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{m_1+m_2+...+m_k}{m_{k+1}} < +\infty$ є достатньою для того, щоб множина $C[\bar{O}^1, \{V_k\}]$ з $V_k = \{1, 2, ..., m_k\}$ мала додатну міру Лебега. Оскільки ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{m_1+m_2+...+m_k}{m_{k+1}}$ збігається при $m_k = 2^{2^{k-1}}$, ми отримуємо (22).

Для того, щоб довести нерівність (23), нагадаємо (див [**4**]), що

$$\frac{1}{3i^2} \leq \frac{|\Delta^{c.f.}_{a_1...a_n i}|}{|\Delta^{c.f.}_{a_1...a_n}|} \leq \frac{1}{i^2}.$$

Тому

$$\frac{\sum\limits_{i \notin V_{k+1}} |\Delta^{c.f.}_{a_1...a_n i}|}{|\Delta^{c.f.}_{a_1...a_n}|} \leq \sum_{i=2^{2^{k-1}}+1}^{\infty} \frac{2}{i^2} < \frac{4}{2^{2^{k-2}}},$$

і, отже,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{F}^{c.f.}_{k+1})}{\lambda(F^{c.f.}_k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2^{2^{k-2}}} < +\infty,$$

звідки випливає додатність міри Лебега множини $\lambda(C[c.f., \{V_k\}])$. □

В) Тепер дослідимо випадок, коли як множини V_k, так і множини $\overline{V_k}$ є нескінченними.

Теорема 4. *Нехай $V_k = N \setminus \{b^{(k)}_1, b^{(k)}_2, \ldots, b^{(k)}_m, \ldots\}$, де $\{b^{(k)}_m\}_{m=1}^{\infty}$ — зростаюча послідовність $\forall k \in N$, і існує число $d \in N$ таке, що:*

$$b^{(k)}_{n+1} - b^{(k)}_n \leq d, \ \forall n \in N, \forall k \in N, . \tag{25}$$

Тоді якщо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^{(k)}_1} = +\infty, \tag{26}$$

то $\lambda\left(C[\bar{O}^2, \{V_k\}]\right) = 0$.

Доведення. Нехай $\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}}$ — довільний циліндр $k-1$ рангу такий, що $a_j \in V_j,\ \forall j \in \{1,2,\ldots,k-1\}$. Очевидно, що

$$|\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}b_1^{(k)}}| \geq |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}(b_1^{(k)}+1)}| \geq \ldots \geq |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}(b_2^{(k)}-1)}|.$$

Тому

$$|\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}b_1^{(k)}}| \geq \frac{1}{b_2^{(k)}-b_1^{(k)}-1}\cdot\sum_{i=b_1^{(k)}+1}^{b_2^{(k)}-1}|\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}i}|$$

З іншого боку,

$$\sum_{i=1}^{b_1^{(k)}-1}|\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}i}| = \sum_{i=1}^{b_1^{(k)}-1}\frac{1}{(c_{k-1}(c_{k-1}+1)-1+i)(c_{k-1}(c_{k-1}+1)+i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{b_1^{(k)}-1}\left(\frac{1}{c_{k-1}(c_{k-1}+1)-1+i}-\frac{1}{c_{k-1}(c_{k-1}+1)+i}\right) =$$

$$= \frac{1}{c_{k-1}(c_{k-1}+1)}-\frac{1}{c_{k-1}(c_{k-1}+1)+b_1^{(k)}-1} =$$

$$= \frac{b_1^{(k)}-1}{c_{k-1}(c_{k-1}+1)(c_{k-1}(c_{k-1}+1)+b_1^{(k)}-1)}.$$

Тому

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{b_1^{(k)}-1}|\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}i}|}{|\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}}|} = \frac{b_1^{(k)}-1}{c_{k-1}(c_{k-1}+1)+b_1^{(k)}-1} \leq \frac{b_1^{(k)}-1}{2^{2^{k-3}}(2^{2^{k-3}}+1)+b_1^{(k)}-1} <$$

$$< \frac{b_1^{(k)}}{2^{2^{k-2}}+b_1^{(k)}};$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{b_1^{(k)}-1}|\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}i}|}{|\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}(b_1^{(k)})}|} = \frac{\frac{b_1^{(k)}-1}{c_{k-1}(c_{k-1}+1)\left(c_{k-1}(c_{k-1}+1)+b_1^{(k)}-1\right)}}{\frac{1}{\left(c_{k-1}(c_{k-1}+1)+b_1^{(k)}-1\right)\left(c_{k-1}(c_{k-1}+1)+b_1^{(k)}\right)}} =$$

$$= \frac{c_{k-1}(c_{k-1}+1)+b_1^{(k)}}{c_{k-1}(c_{k-1}+1)}\cdot\left(b_1^{(k)}-1\right) = \left(1+\frac{b_1^{(k)}}{c_{k-1}(c_{k-1}+1)}\right)(b_1^{(k)}-1) \leq$$

$$\leq \left(1+\frac{b_1^{(k)}}{2^{2^{k-2}}}\right)\cdot b_1^{(k)} =: l_k.$$

Отже,

$$\begin{cases} |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}b_1^{(k)}}| \geq \frac{1}{l_k}\cdot \sum\limits_{i=1}^{b_1^{(k)}-1} |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}i}|; \\ |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}b_1^{(k)}}| \geq \frac{1}{b_2^{(k)}-b_1^{(k)}}\cdot \sum\limits_{i=b_1^{(k)}+1}^{b_2^{(k)}-1} |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}i}|; \end{cases} \tag{27}$$

$$|\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}b_2^{(k)}}| \geq \frac{1}{b_3^{(k)}-b_2^{(k)}}\cdot \sum_{i=b_2^{(k)}+1}^{b_3^{(k)}-1} |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}i}|;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}b_n^{(k)}}| \geq \frac{1}{b_{n+1}^{(k)}-b_n^{(k)}}\cdot \sum_{i=b_n^{(k)}+1}^{b_{n+1}^{(k)}-1} |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}i}| \geq \frac{1}{d}\cdot \sum_{i=b_n^{(k)}+1}^{b_{n+1}^{(k)}-1} |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}i}|.$$

З (27) випливає, що

$$|\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}b_1^{(k)}}| \geq \frac{1}{2l_k}\cdot \sum_{i=1}^{b_1^{(k)}-1} |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}i}| + \frac{1}{2d}\sum_{i=b_1^{(k)}+1}^{b_2^{(k)}-1} |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}i}| \geq$$

$$\geq \frac{1}{2l_k\cdot d}\sum_{i=1,\ i\neq b_1^{(k)}}^{b_2^{(k)}-1} |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}i}|.$$

Отже,

$$\sum_{i\notin V_k} |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}i}| \geq \frac{1}{2l_k}\sum_{i\in V_k} |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1a_2\ldots a_{k-1}i}|,$$
$$\forall (a_1,a_2,\ldots,a_{k-1}),\ a_j\in V_j, j\in\{1,2,\ldots,k-1\}.$$

Тому

$$\begin{cases} \lambda(\overline{F}_k) \geq \frac{1}{2l_kd}\cdot\lambda(F_k); \\ \lambda(\overline{F}_k)+\lambda(F_k) = \lambda(F_{k-1}). \end{cases}$$

Отже,

$$\frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} \geq \frac{1}{2l_kd+1} \geq \frac{1}{4l_kd}.$$

Якщо $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l_k} = +\infty$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} = +\infty$, а, отже, $\lambda(C[\bar{O}^2,\{V_k\}]) = 0$.

$$\frac{1}{l_k} = \frac{1}{\left(1+\frac{b_1^{(k)}}{2^{2^{k-2}}}\right)\cdot b_1^{(k)}},$$

тому

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l_k} = \sum_{k\in A}\frac{1}{\left(1+\frac{b_1^{(k)}}{2^{2^{k-2}}}\right)\cdot b_1^{(k)}} + \sum_{k\notin A}\frac{1}{\left(1+\frac{b_1^{(k)}}{2^{2^{k-2}}}\right)\cdot b_1^{(k)}},$$

де $A = \left\{ k : \ \frac{b_1^{(k)}}{2^{2^{k-2}}} \leq 1 \right\}$.

Ряд

$$\sum_{k \in A} \frac{1}{\left(1 + \frac{b_1^{(k)}}{2^{2^{k-2}}}\right) \cdot b_1^{(k)}}$$

розбігається тоді і тільки тоді, коли розбігається ряд $\sum\limits_{k \in A}^{\infty} \frac{1}{b_1^{(k)}}$. Нескладно бачити, що ряд

$$\sum_{k \notin A} \frac{1}{\left(1 + \frac{b_1^{(k)}}{2^{2^{k-2}}}\right) \cdot b_1^{(k)}}$$

завжди збігається.

Тому $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l_k}$ розбігається тоді і тільки тоді, коли розбігається ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_1^{(k)}}$, що й доводить теорему. □

Наслідок 3. *Якщо* $V_k = N \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots\}$, *причому*

$$\exists\ d \in N : \ b_{n+1} - b_n \leq d \ \forall n \in N,$$

то $\lambda\left(C[\bar{O}^2, \{V_k\}]\right) = 0$.

Наслідок 4. *Якщо* $V_k = N \setminus \{1, 3, 5, \ldots\}$, *то* $\lambda\left(C[\bar{O}^2, \{V_k\}]\right) = 0$.

Наступне зауваження демонструє, що умова (25) є суттєвою для правильності висновку попередньої теореми.

Зауваження 2. *Якщо* $V_k = N \setminus \{1, 4, 9, \ldots, m^2, \ldots\}$, *то* $\lambda\left(C[\bar{O}^2, \{V_k\}]\right) > 0$.

Доведення. Зафіксуємо циліндр $\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1 \ldots a_{k-1}}, a_j \in V_j, j = \overline{1, k-1}$. Тоді

$$\lambda\left(\overline{F}_k \bigcap \Delta^{\bar{O}^2}_{a_1 \ldots a_k}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\left(c_{k-1}(c_{k-1}+1) - 1 + m^2\right)\left(c_{k-1}(c_{k-1}+1) + m^2\right)},$$

$$\lambda\left(F_{k-1} \bigcap \Delta^{\bar{O}^2}_{a_1 \ldots a_k}\right) = |\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1 \ldots a_{k-1}}| = \frac{1}{c_{k-1}(c_{k-1}+1)} \ a_j \in V_j, j = \overline{1, k-1}.$$

Нехай $a^2 := c_{k-1}(c_{k-1}+1)$, тоді

$$\frac{\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2+m^2)(a^2-1+m^2)}}{\frac{1}{a^2}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^2}{(a^2-1+m^2)(a^2+m^2)} <$$

$$< \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^2-1+m^2}{(a^2-1+m^2)(a^2+m^2)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{a^2+m^2} < \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2a} \leq \frac{\pi}{2 \cdot 2^{2^{k-1}}}.$$

Отже, з циліндра $\Delta^{\bar{O}^2}_{a_1\ldots a_{k-1}}$ на k-му кроці вилучається менше, ніж його $\frac{\pi}{2c_{k-1}(c_{k-1}+1)}$ частина, що менше $\frac{\pi}{2\cdot 2^{2^{k-1}}}$. Тому

$$\frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} < \frac{\pi}{2\cdot 2^{2^{k-1}}}.$$

Оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} < +\infty,$$

то з (6) випливає, що $\lambda\left(C[\bar{O}^2, \{V_k\}]\right) > 0$. □

Література

[1] S. Albeverio, O. Baranovskyi, M. Pratsiovytyi, G. Torbin, The Ostrogradsky series and related Cantor-like sets, *Acta Arith.* **130** (2007), no. 3, 215–230.

[2] S. Albeverio, O. Baranovskyi, M. Pratsiovytyi, G. Torbin, The set of incomplete sums of the first Ostrogradsky series and probability distributions on it. to appear in *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*.

[3] O. M. Baranovskyi, M. V. Pratsiovytyi, and G. M. Torbin, Topological and metric properties of sets of real numbers with conditions on their expansions in Ostrogradskii series, *Ukrainian Math. J.* **59** (2007), no. 9, 1281–1299.

[4] A. Ya. Khintchine, *Continued fractions*, P. Noordhoff, Ltd., Groningen, 1963.

[5] J.R. Kinney, T.S. Pitcher, *The dimension of some sets defined in terms of f-expansions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **4** (1966), 293–315.

[6] T. A. Pierce, *On an algorithm and its use in approximating roots of algebraic equations*, Amer. Math. Monthly **36** (1929), no. 10, 523–525.

[7] *М.В. Працьовитий* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. —Київ: Вид–во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998.

[8] Е. Я. Ремез, *О знакопеременных рядах, которые могут быть связаны с двумя алгорифмами М. В. Остроградского для приближения иррациональных чисел*, Успехи мат. наук. **6** (1951), № 5 (45), 33–42.

[9] F. Schweiger, *Ergodic Theory of Fibred Systems and Metric Number Theory.*— Oxford: Clarendon Press, 1995.

[10] J. O. Shallit, *Metric theory of Pierce expansions*, Fibonacci Quart. **24** (1986.), no. 1. — P. 22 – 40.

[11] K. G. Valēēv and E. D. Zlēbov, *The metric theory of the Ostrogradskiĭ algorithm*, Ukrainian Math. J. **27** (1975), no. 1, 47–51.