Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова.— 2013, № 15.— С. 87–99.

УДК 511.72+517

Перетворення і функції, які зберігають середнє значення цифр трійкового зображення числа

М. В. Працьовитий[1,2], С. О. Климчук[2], О. П. Макарчук[2]
([1]Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова,
[2]Інститут математики НАН України)

Анотація. У роботі вивчаються перетворення піввідрізка $[0;1)$ і функції, які зберігають середнє значення r цифр трійкового зображення чисел:

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x), \text{ де } x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}, \ \alpha_i \in \{0,1,2\}.$$

З'ясовується їх зв'язок з перетвореннями і функціями, які зберігають частоти цифр та фрактальну розмірність Хаусдорфа-Безиковича.

Ключові слова: s-кове зображення дійсного числа; частота цифри; середнє значення цифр; функція, яка зберігає середнє значення цифр; перетворення, яке зберігає частоти цифр.

Abstract. We study transformations of interval $[0;1)$ and functions preserving asymptotic mean r of digits in ternary representation of numbers:

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x), \text{ where } x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}, \ \alpha_i \in \{0,1,2\}.$$

We establish its connection with function preserving digits frequencies and Hausdorff-Besicovitch fractal dimension.

Keywords: s-adic representation of real number; frequency of digits; asymptotic mean of digits; functions that preserve asymptotic mean of digits; transformations that preserve frequency of digits.

Вступ

Розглядаючи дробову частину дійсного числа, тобто точки піввідрізка $[0;1)$, далі ми обмежуємось числами $x \in [0;1)$ і без потреби не будемо нагадувати про це.

Нехай $2 \leqslant s$ — фіксоване натуральне число, $\mathcal{A}_s \equiv \{0, 1, \dots, s-1\}$ — алфавіт s-кової системи числення, $L \equiv \mathcal{A}_s \times \mathcal{A}_s \times \ldots \times \mathcal{A}_s \ldots$ — простір послідовностей s-кових цифр. Добре відомо, що для *довільного дійсного числа* $x \in [0;1]$ *існує послідовність* (α_k) *така, що* $(\alpha_k) \in L$ *і*

$$x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \dots + \frac{\alpha_k}{s^k} + \dots \equiv \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}.$$

Останній символічний запис називається *s-ковим зображенням* числа x, а $\alpha_k = \alpha_k(x)$ — його *k-тою s-ковою цифрою.* Взагалі кажучи, k-та цифра числа x є некоректно визначеною функцією від x, оскільки має місце рівність

$$\Delta^s_{c_1\ldots c_{k-1}c_k(0)} = \Delta^s_{c_1\ldots c_{k-1}[c_k-1](s-1)},$$

де (i) — період у зображенні числа. Числа такого виду називаються *s-ково–раціональними*, вони мають рівно два s-кових зображення і утворюють підмножину множини раціональних чисел. Решта чисел мають лише одне зображення і називаються *s-ково–ірраціональними.* Для коректності означення k-тої цифри числа досить домовитись використовувати лише перше s-кове зображення, а саме: те, що має період (0). Тепер $\alpha_k(x)$ є функцією, коректно визначеною на $[0;1]$.

Нагадаємо, що *частотою цифри* $i \in \mathcal{A}_s$ у s-ковому зображенні $\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ числа x називається границя (якщо вона існує):

$$\nu_i(x) = \lim_{n\to\infty} v_i^{(n)},$$

де $v_i^{(n)} = n^{-1}N_i(x,n)$ — відносна частота цифри i, $N_i(x,n) = \#\{j : \alpha_j(x) = i, \ j \leqslant n\}$ — кількість цифр i у s-ковому зображенні числа x до k-го місця включно.

Поняття частоти цифр у s–ковому зображенні числа x, введене Е. Борелем на початку XX століття [3], виявилось достатньо продуктивним. Воно ефективно використовувалось у різних цілях, зокрема 1) для задання різних математичних об'єктів (множин, функцій, мір, перетворень простору тощо); 2) при розв'язанні ряду метричних та ймовірнісних проблем (доведення нормальних та анормальних властивостей чисел, сингулярності функцій та розподілів ймовірностей тощо); 3) у ергодичній теорії та фрактальному аналізі. Зокрема, для задання самоподібних, але не досконалих множин *Безиковича–Егглстона*:

$$E[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{s-1}] = \{x : x = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \ \nu_i(x) = \tau_i \geqslant 0, \ i = \overline{0, s-1}\}.$$

Всі множини Безиковича–Егглстона є нуль–множинами Лебега, за виключенням множини

$$H_s = \{x : x = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \ \nu_i(x) = s^{-1}, \ i = \overline{0, s-1}\},$$

нормальних за основою s чисел, яка є, як стверджує відома теорема Бореля [3], множиною повної міри Лебега.

Фрактальна розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини $E[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{s-1}]$ обчислюється [2, 4, 8] за формулою

$$\alpha_0(E[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{s-1}]) = -\frac{\ln \tau_0^{\tau_0} \tau_1^{\tau_1} \ldots \tau_{s-1}^{\tau_{s-1}}}{\ln s}.$$

Середнім значенням цифр s-кового зображення $\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ дійсного числа

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s^k} \equiv \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \;\; \alpha_k \in \mathcal{A}_s$$

називається границя (якщо вона існує):

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x).$$

Це поняття було введене нами у роботі [11] і використане для задання і вивчення тополого–метричних властивостей фрактальних множин [12]–[14]. Воно тісно пов'язане з частотами цифр, оскільки у випадку існування частот усіх цифр є їх певним усередненим значенням. А саме: якщо s-кове зображення числа x має частоти всіх цифр $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{s-1}$, то воно має середнє значення цифр $r(x)$, причому

$$r(x) = \nu_1(x) + 2\nu_2(x) + \ldots + (s-1)\nu_{s-1}(x).$$

Як виявилось, без вживання самого терміну це поняття фігурувало уже у роботах [2, 4, 5, 6].

У даній роботі ми вводимо і вивчаємо функції, що є інваріантами середнього значення цифр трійкового ($s = 3$) зображення числа скрізь та майже скрізь (у розумінні міри Лебега) на півввідрізку $[0;1)$, а також функції, які зберігають частоти цифр.

1. Перетворення $[0;1)$ і функції, які зберігають частоти цифр

Нехай Θ — множина чисел, для яких існують частоти ν_0, ν_1, …, ν_{s-1} всіх цифр.

Нагадаємо, що *перетворенням* непорожньої множини X називається бієктивне (взаємно однозначне) відображення цієї множини на себе.

Означення **1.** Казатимемо, що *перетворення* f півввідрізка $[0;1)$ *зберігає частоти цифр*, якщо рівність

$$\nu_i\left(f(x)\right) = \nu_i(x),$$

виконується для кожного $i \in \mathcal{A}_s$ і всіх $x \in \Theta$, а для $x \in [0;1) \setminus \Theta$ одночасно не існують $\nu_i(x)$ і $\nu_i(f(x))$.

Тривіальним прикладом функції, яка зберігає частоти цифр є тотожне перетворення. Цією ж властивістю володіє функція f, визначена на $[0;1)$ рівністю

$$f(x) = \Delta^s_{\alpha_2(x)\alpha_1(x)\alpha_4(x)\alpha_3(x)\ldots} = y,$$

оскільки для будь–якого натурального k

$$N_i(y,2k) = N_i(x,2k),$$

$$N_i(y,2k+1) = N_i(y,2k) + b, \text{ де } b \in \{0,1\}.$$

Простим прикладом перетворення, яке не зберігає частоти цифр, є

$$g(\Delta^3_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}) = \Delta^3_{\beta_1(x)\beta_2(x)\ldots\beta_n(x)\ldots},$$

де $\beta_i(x) = \alpha_i(x) + 1(\mod 3)$, при цьому $g(\Delta^3_{(1)}) \equiv \Delta^3_{(0)}$. Справді, для $x_0 = \Delta^3_{(0)}$, $g(\Delta^3_{(0)}) \equiv \Delta^3_{(1)}$, тобто $1 = \nu_0(x_0) \neq \nu_0(g(x_0)) = 0$.

Лема 1. Множина V всіх перетворень піввідрізка $[0;1)$, які зберігають частоти всіх s-кових цифр числа відносно операції композиція $\circ$ (суперпозиція) перетворень, утворює некомутативну групу.

Доведення. Добре відомо, що сім'я всіх перетворень довільної множини (в тому числі і $[0;1)$) відносно операції $\circ$:

$$[f_2 \circ f_1](x) = f_2(f_1(x))$$

утворює групу. Для доведення леми скористаємось критерієм підгрупи.

Нехай $f_1, f_2 \in V$, тобто $\nu_i(f_j(x)) = \nu_i(x)$, $j \in \{1,2\}$ і $f_1(x) = x'$, $f_2(x) = x''$. Замкненість множини V відносно операції $\circ$ випливає з рівностей

$$\nu_i(f_2(f_1(x))) = \nu_i(f_2(x')) = \nu_i(x') = \nu_i(f_1(x)) = \nu_i(x).$$

Покажемо, що для кожного перетворення $f \in V$ обернене перетворення f^{-1} теж належить V. Справді, з $f \in V$ маємо $\nu_i(f(x)) = \nu_i(x)$. Якщо $y = f(x)$, то $x = f^{-1}(y)$ і

$$\nu_i(y) = \nu_i(f(x)) = \nu_i(x) = \nu_i(f^{-1}(y)).$$

Отже, $f^{-1} \in V$.

Група $(V, \circ)$ не комутативна, оскільки для перетворень $[0;1)$

$$f_1(x) = \Delta^s_{\alpha_2(x)\alpha_1(x)\alpha_4(x)\alpha_3(x)\ldots\alpha_{2k}\alpha_{2k-1}\ldots},$$

$$f_2(x) = \Delta^s_{\alpha_3(x)\alpha_2(x)\alpha_1(x)\alpha_4(x)\ldots\alpha_{2k+1}\alpha_{2k}\alpha_{2k-1}\ldots}$$

маємо, $[f_2 \circ f_1](x) = \Delta^s_{\alpha_4(x)\alpha_1(x)\alpha_2(x)\alpha_3(x)\ldots}$ і $[f_1 \circ f_2](x) = \Delta^s_{\alpha_2(x)\alpha_1(x)\alpha_4(x)\alpha_1(x)\ldots}$, а отже, $f_2 \circ f_1 \neq f_1 \circ f_2$. □

Означення **2.** Якщо для функції f, визначеної на півінтервалі $[0;1)$ з множиною значень в $[0;1)$ виконуються умови означення 1, то казатимемо, що *функція f зберігає частоти цифр.*

Зауважимо, що кожне перетворення $[0;1)$ є функцією, але не кожна функція, визначена на $[0;1)$ є перетворенням. Простими прикладами функцій, які зберігають частоти цифр і не є перетвореннями, є наступні, визначені на $[0;1)$ функції:

$$\omega\left(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) \equiv \Delta^s_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots},$$

$$\delta_i\left(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) \equiv \Delta^s_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

де i — фіксований елемент алфавіту $\mathcal{A}_s$,

$$f(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_j\ldots}) = \Delta^s_{\alpha_1\ldots\alpha_{j-1}\alpha_{j+1}\alpha_j\alpha_{j+2}\ldots},$$

де j — наперед задане натуральне число.

2. Зв'язок з функціями, що зберігають фрактальну розмірність

Фрактальна геометрія з групової точки зору є теорією інваріантів групи перетворень простору R_n, які зберігають фрактальну розмірність, тобто таких перетворень, для яких рівні фрактальні розмірності образу і прообразу кожної борелівської множини [1, 15].

Теорема 1. *Існують функції, які зберігають частоти цифр і не зберігають фрактальну розмірність Хаусдорфа–Безиковича.*

Доведення. Множина Θ є об'єднанням всеможливих множин Безиковича–Егглстона. Функцію f для всіх $x \in [0;1)$ означимо рівністю

$$f(x) = \begin{cases} \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{[\tau_0\cdot 1]}\underbrace{1\ldots1}_{[\tau_1\cdot 1]}\underbrace{2\ldots2}_{[\tau_2\cdot 1]}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{[\tau_0\cdot n]}\underbrace{1\ldots1}_{[\tau_1\cdot n]}\underbrace{2\ldots2}_{[\tau_2\cdot n]}\ldots} \equiv x', \text{ якщо } x \in \Theta, \\ x, \text{ якщо } x \notin \Theta, \end{cases}$$

де $\tau_0 = \nu_0(x)$, $\tau_1 = \nu_1(x)$, $\tau_2 = \nu_2(x)$.

Зрозуміло, що x' залежить від частот цифр числа x, тобто $x' = g(\nu_0(x), \nu_1(x), \nu_2(x))$ і функція f не є перетворенням $[0;1)$, оскільки $f(\Delta^3_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = f(\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})$. Більше того, образом множини Безиковича–Егглстона $E[\tau_0,\tau_1,\tau_2]$ при відображенні f є одна єдина точка x'.

Покажемо, що $\nu_i(x') = \nu_i(x)$, якщо $x \in E[\tau_0,\tau_1,\tau_2]$. Для кожного достатньо великого натурального n існує $k_n \in N$ таке, що

$$\sum_{j=1}^{k_n} j = \frac{k_n(k_n+1)}{2} \leqslant n < \frac{(k_n+1)(k_n+2)}{2} = \sum_{j=1}^{k_n+1} j.$$

Оскільки $z - 1 < [z] \leqslant z$ для всіх $z \in R$, то

$$\sum_{j=1}^{k_n}([\tau_0 j] + [\tau_1 j] + [\tau_2 j]) \leqslant \sum_{j=1}^{k_n}(\tau_0+\tau_1+\tau_2)j = \frac{k_n(k_n+1)}{2} \leqslant n,$$

$$\sum_{j=1}^{k_n+2}([\tau_0 j]+[\tau_1 j]+[\tau_2 j]) > \sum_{j=1}^{k_n+2}((\tau_0+\tau_1+\tau_2)j-1) = \frac{(k_n+2)(k_n+3)}{2}-(k_n+2) > n.$$

Для кожного $i \in \{0,1,2\}$ маємо

$$\frac{N_i(x',n)}{n} \geqslant \frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n}[\tau_i \cdot j]}{n} > \frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n}(\tau_i \cdot j-1)}{\frac{(k_n+1)(k_n+2)}{2}} = \frac{\tau_i\frac{k_n(k_n+1)}{2}-k_n}{\frac{(k_n+1)(k_n+2)}{2}} \to \tau_i (n\to\infty).$$

З іншого боку,

$$\frac{N_i(x',n)}{n} < \frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n+2}[\tau_i \cdot j]}{n} < \frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n+2}\tau_i \cdot j}{\frac{k_n(k_n+1)}{2}} = \frac{\tau_i\frac{(k_n+2)(k_n+3)}{2}}{\frac{k_n(k_n+1)}{2}} \to \tau_i (n\to\infty).$$

Отже, $\nu_i(x') = \tau_i$ для всіх $i \in \{0,1,2\}$, тобто функція $f(x)$ зберігає частоти цифр, але якщо $\tau_0\tau_1\tau_2 \neq 0$, то враховуючи формулу Безиковича–Егглстона, $\alpha_0(E[\tau_0,\tau_1,\tau_2]) = -\frac{\ln \tau_0^{\tau_0}\tau_1^{\tau_1}\tau_2^{\tau_2}}{\ln 3} \neq 0$, а з іншого боку, $\alpha_0(\{f(x) : x \in E[\tau_0,\tau_1,\tau_2]\}) = \alpha_0(x')$=0, тобто

$$\alpha_0(E[\tau_0,\tau_1,\tau_2]) \neq \alpha_0(f(E[\tau_0,\tau_1,\tau_2])).$$

□

Залишається нез'ясованим, чи існують *неперервні* функції, які зберігають частоти, але не зберігають розмірності Хаусдорфа–Безиковича.

3. Перетворення $[0;1)$ і функції, які зберігають середнє значення цифр і не зберігають частоти цифр

Означення **3.** Казатимемо, що функція f *зберігає середнє значення цифр*, якщо рівність

$$r\left(f(x)\right) = r(x)$$

виконується для всіх $x \in [0;1)$, для яких $r(x)$ існує.

Означення **4.** Кажемо, функція f *зберігає середнє значення цифр майже скрізь* (у розумінні міри Лебега), якщо рівність

$$r\left(f(x)\right) = r(x)$$

виконується на множині повної міри Лебега.

Оскільки $r(x) = \nu_1(x) + 2\nu_2(x)$, то очевидно, що перетворення $[0;1)$ і функції, які зберігають частоти цифр, зберігають також середнє значення цифр майже скрізь.

Не важко навести приклад функції, яка не зберігає середнє значення цифр. Зокрема, такою є функція, визначена рівністю

$$I(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) \equiv \Delta^s_{[s-1-\alpha_1][s-1-\alpha_2]\ldots[s-1-\alpha_n]\ldots},$$

оскільки $I(\Delta^3_{(0)}) = \Delta^3_{(2)}$ і $2 = r\,(I(x)) \neq r(x) = 0$. Функцію I називають *інверсором цифр* s-кового зображення числа.

Лема 2. *Для трійкової системи числення:*

$$\text{якщо } r(x)=0, \text{ то } \nu_0(x)=1 \text{ і } \nu_1(x)=\nu_2(x)=0;$$
$$\text{якщо } r(x)=2, \text{ то } \nu_2(x)=1 \text{ і } \nu_0(x)=\nu_1(x)=0.$$

Доведення. Нехай $r(x)=0$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$. Оскільки

$$r_n(x) = v_1^{(n)}(x) + 2v_2^{(n)}(x) \geqslant v_i^{(n)}(x) \geqslant 0,$$

для обох $i \in \{1,2\}$, то з $r(x)=0$ випливає, що $\nu_1(x)=\nu_2(x)=0$, отже, $\nu_0(x)=1$.

Нехай тепер $r_n(x)=2$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=2$. Оскільки

$$r_n(x) = v_1^{(n)}(x) + 2v_2^{(n)}(x) = 1 - v_0^{(n)}(x) + v_2^{(n)}(x),$$

то $1 \geqslant v_2^{(n)}(x) = r_n - 1 + v_0^{(n)}(x) \geqslant r_n - 1$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=2$, то $\lim\limits_{n\to\infty} v_2^{(n)}(x)=1$. Таким чином, $0 \leqslant v_i^{(n)}(x) = 1 - v_2^{(n)}(x) - v_{1-i}^{(n)}(x) \leqslant 1 - v_2^{(n)}(x)$, де $i \in \{0,1\}$. Але $\lim\limits_{n\to\infty} 1 - v_2^{(n)}(x) = 0$, тому $\lim\limits_{n\to\infty} v_i^{(n)}(x)=0$, $i\in\{0,1\}$. □

Теорема 2. *Якщо функція* $g:\ [0;1)\to[0;1)$ *зберігає середнє значення трійкових цифр чисел з множини* Θ, *то вона зберігає частоти всіх цифр на об'єднанні двох множин Безиковича–Егглстона* $E[0,0,1]\cup E[1,0,0]$.

Доведення. Нехай $x\in E[0,0,1]$, тоді $r(g(x)) = r(x) = 2$. Тому згідно з лемою 2 число $y=g(x)$ належить множині $E[0,0,1]$, а це означає, що нерівність (1) не виконується.

Аналогічно, якщо $x\in E[1,0,0]$, то має місце включення $g(x)\in E[1,0,0]$. □

4. Збереження середнього значення і частот цифр майже скрізь

Природним є питання про існування функції f, яка зберігає середнє значення цифр числа і не зберігає частот цифр *майже скрізь* (у розумінні міри Лебега) на множині Θ, а отже, і на множині H нормальних чисел. Наведемо приклад такої функції.

Означимо функцію f в точці $x = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ рівністю

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x\in[0;1)\setminus H, \\ \Delta^3_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}, & \text{якщо } x\in H, \end{cases}$$

при цьому $\beta_n = \alpha_n$, коли $\alpha_n \neq 1$, а для послідовності n_k, такої, що $\alpha_{n_k} = 1$

$$\beta_{n_k} = \begin{cases} 0 \text{ при } n_k = 0(\mod 7), \\ 2 \text{ при } n_k = 1(\mod 7), \\ \alpha_{n_k} \text{ в решті випадків.} \end{cases}$$

Тобто, зображення функції $f(x)$ в нормальній точці отримуємо як результат заміни кожної сьомої трійкової цифри «1» числа на цифру «0» і наступної цифри «1» на цифру «2».

Лема 3. *Потужність множини* $\{1, 2, \dots, n\} \cap \{7k : k \in N\}$ *дорівнює* $\left[\frac{n}{7}\right]$, *потужність множини* $\{1, 2, \dots, n\} \cap \{7k + 1 : k \in N\}$ *дорівнює* $\left[\frac{n-1}{7}\right]$.

Доведення. Нехай $k \in N$ таке, що $7k \leqslant n < 7(k+1)$. Звідси $k \leqslant \frac{n}{7} < (k+1)$, отже, $\left[\frac{n}{7}\right] = k$. Нехай $k \in N$ таке, що $7k + 1 \leqslant n < 7(k+1) + 1$. Звідси $k \leqslant \frac{n-1}{7} < (k+1)$, отже, $\left[\frac{n-1}{7}\right] = k$. □

Теорема 3. *Якщо* $x \in H$, *то для вище означеної функції* f *мають місце рівності* $\nu_0(f(x)) = \frac{8}{21}$, $\nu_1(f(x)) = \frac{8}{21}$ *і* $\nu_2(f(x)) = \frac{5}{21}$.

Доведення. Нехай k — достатньо велике натуральне число, $\varphi(k) \in N$ таке, що

$$n_{\varphi(k)} \leqslant k < n_{\varphi(k)+1}.$$

Оскільки $\nu_1(x) = \frac{1}{3}$, то $\frac{1}{3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{N(x, n_k)}{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{n_k}$ і враховуючи лему 3, маємо

$$\frac{N_1(f(x),k)}{k} = \frac{\varphi(k) - \left[\frac{\varphi(k)}{7}\right] - \left[\frac{\varphi(k)-1}{7}\right]}{k} \geqslant \frac{\varphi(k) - \frac{\varphi(k)}{7} - \frac{\varphi(k)-1}{7} + 2}{n_{\varphi(k)+1}} \to \frac{1}{3} - \frac{1}{21} - \frac{1}{21} = \frac{5}{21}$$

при $k \to \infty$.

$$\frac{N_1(f(x),k)}{k} = \frac{\varphi(k) - \left[\frac{\varphi(k)}{7}\right] - \left[\frac{\varphi(k)-1}{7}\right]}{k} \leqslant \frac{\varphi(k) - \frac{\varphi(k)}{7} - \frac{\varphi(k)-1}{7}}{n_{\varphi(k)}} \to \frac{5}{21} \text{ при } k \to \infty.$$

Отже, $\nu_1(f(x)) = \frac{5}{21}$.

Нехай $N_0(x,k)$ — кількість цифр «0» в наборі $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Оскільки $\nu_0 = \frac{1}{3}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{N_0(x,k)}{k} = \frac{1}{3}$ і враховуючи лему 3, маємо

$$\frac{N_0(f(x),k)}{k} = \frac{N_0(x,k) + \left[\frac{\varphi(k)}{7}\right]}{k} \geqslant \frac{N_0(x,k)}{k} + \frac{\frac{\varphi(k)}{7} - 1}{n_{\varphi(k)+1}} \to \frac{1}{3} + \frac{1}{21} = \frac{8}{21} \text{ при } k \to \infty.$$

$$\frac{N_0(f(x),k)}{k} = \frac{N_0(x,k) + \left[\frac{\varphi(k)}{7}\right]}{k} \leqslant \frac{N_0(x,k)}{k} + \frac{\frac{\varphi(k)}{7}}{n_{\varphi(k)}} \to \frac{1}{3} + \frac{1}{21} = \frac{8}{21} \text{ при } k \to \infty.$$

Отже, $\nu_0(f(x)) = \dfrac{8}{21}$. Оскільки $\nu_0(f(x)) + \nu_1(f(x)) + \nu_2(f(x)) = 1$, то $\nu_2(f(x)) = 1 - \dfrac{5}{21} - \dfrac{8}{21} = \dfrac{8}{21}$. □

Якщо $x \in H$, то $r(x) = \dfrac{1}{3} + 2\dfrac{1}{3} = 1$, тоді за теоремою 3, $r(f(x)) = \dfrac{5}{21} + 2\dfrac{8}{21} = 1$.

Отже, для будь–якого нормального за основою 3 числа x виконується рівність $r(x) = r(f(x))$, тобто функція f зберігає середнє значення цифр числа майже скрізь.

Лема 4. *Множина функцій, які зберігають середнє значення цифр майже скрізь є гіперконтинуальною.*

Доведення. Функція g зберігає середнє значення трійкових цифр майже скрізь на множині Θ тоді і тільки тоді, коли

$$\lambda(\{g(x) : x \in H\} \cap H) = 1.$$

Для будь–якого $x \in H$ поставимо у відповідність $y \in H$. Тоді $r(x) = r(y) = 1$. Тому множина функцій $f : H \to H$, які зберігають середнє значення цифр майже скрізь має потужність гіперконтинуум. Оскільки множина всіх функцій $z : [0;1) \to [0;1)$ є гіперконтинуальною, то множина функцій $f : [0;1) \to [0;1)$, які зберігають середнє значення цифр майже скрізь також має потужність гіперконтинуум. □

5. Збереження функцією середнього значення, коли частоти цифр не існують

Побудуємо приклад функції $f(x)$, яка зберігає середнє значення трійкових цифр числа, тобто $r(x) = r(f(x))$ для будь–якого $x \in H$, але частоти $\nu_i(f(x))$ не існують для всіх $i \in \{0,1,2\}$.

Розглянемо послідовність (β_n), таку що $\beta_n = \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{1!}\underbrace{1\ldots1}_{2!}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{(2n-1)!}\underbrace{1\ldots1}_{2n!}\ldots}$.

Нехай $f(x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \in [0;1) \setminus H, \\ \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{[\tau_{01}1^x]}\underbrace{1\ldots1}_{[\tau_{11}1^x]}\underbrace{2\ldots2}_{[\tau_{21}1^x]}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{[\tau_{0n}n^x]}\underbrace{1\ldots1}_{[\tau_{1n}n^x]}\underbrace{2\ldots2}_{[\tau_{2n}n^x]}\ldots}, \text{ якщо } x \in H, \end{cases}$ де

$$(\tau_{0n};\tau_{1n};\tau_{2n}) = \begin{cases} (0,4;0,2;0,4), \text{ якщо } \beta_n = 0, \\ (0,3;0,4;0,3), \text{ якщо } \beta_n = 1. \end{cases}$$

Лема 5. *Для будь–якого* $\alpha > 0$ *виконуються рівності*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{1+\alpha}}{1^{1+\alpha}+2^{1+\alpha}+\ldots+n^{1+\alpha}}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^{2+\alpha}}{1^{1+\alpha}+2^{1+\alpha}+\ldots+n^{1+\alpha}}=2+\alpha.$$

Доведення. Нехай $s_n=\sum\limits_{i=1}^{n} i^{\alpha+1}$, тоді за теоремою Лагранжа

$$(n+1)^{2+\alpha}-n^{2+\alpha}=z_n^{1+\alpha}(2+\alpha),\ \text{де } z_n\in[n;n+1],\ \text{тому}$$
$$\frac{(n+1)^{2+\alpha}-n^{2+\alpha}}{n^{1+\alpha}}=(2+\alpha)\left(\frac{z_n}{n}\right)^{1+\alpha}\to 2+\alpha.$$

Зрозуміло, що $\dfrac{(n+1)^{1+\alpha}-n^{1+\alpha}}{s_n-s_{n-1}}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{1+\alpha}-1\to 0$ при $n\to\infty$, тому за теоремою Штольца $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{1+\alpha}}{s_n}=0$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{2+\alpha}}{s_n}=0.$ □

Лема 6. *Середнє значення* $r(f(x))$ *цифр числа* $f(x)$ *дорівнює* 1 *для всіх* $x\in H$.

Доведення. Для кожного $n\in N$ існує натуральне число $k_n\in N$ таке, що

$$\sum_{j=1}^{k_n}\sum_{i=0}^{2}[\tau_{ij}j^{x+1}]\leqslant n<\sum_{j=1}^{k_n+1}\sum_{i=0}^{2}[\tau_{ij}j^{x+1}].$$

Тоді при $n\to\infty$ маємо

$$r_n(f(x)) > \frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n}([\tau_{1j}j^{x+1}]+2[\tau_{2j}j^{x+1}])}{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1}\sum\limits_{i=0}^{2}[\tau_{ij}j^{x+1}]} > \frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n}(\tau_{1j}+2\tau_{2j})j^{x+1}-3k_n}{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1}(\tau_{0j}+\tau_{1j}+\tau_{2j})j^{x+1}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n}j^{x+1}-3k_n}{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1}j^{x+1}} =$$
$$=1-\frac{(k_n+1)^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1}j^{x+1}}-\frac{3k_n}{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1}j^{x+1}}\to 1,$$

оскільки $\dfrac{k_n}{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1}j^{x+1}}<\dfrac{k_n}{(k_n+1)^{x+1}}\to 0$, і $\dfrac{(k_n+1)^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1}j^{x+1}}=\left(1+\dfrac{1}{k_n}\right)^{x+1}\cdot\dfrac{k_n^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1}j^{x+1}}\to 0.$

$$r_n(f(x)) < \frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1}([\tau_{1j}j^{x+1}]+2[\tau_{2j}j^{x+1}])}{\sum\limits_{j=1}^{k_n}\sum\limits_{i=0}^{2}[\tau_{ij}j^{x+1}]} < \frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1}(\tau_{1j}+2\tau_{2j})j^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n}(\tau_{0j}+\tau_{1j}+\tau_{2j})j^{x+1}-k_n} =$$
$$=\frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n+1}j^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n}j^{x+1}-k_n}=\frac{1+\frac{(k_n+1)^{x+1}}{\sum_{j=1}^{k_n}j^{x+1}}}{1-\frac{k_n}{\sum_{j=1}^{k_n}}}\to 1.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}r_n(f(x))=1.$ □

Лема 7. *Для будь–якого числа $x \in H$ відповідне значення функції $f(x)$ не має частоти $\nu_i(f(x))$, $i \in \{0, 1, 2\}$, всіх трійкових цифр.*

Доведення. Оскільки при $n \to \infty$

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}(2k-1)! - \sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)!}{\sum\limits_{k=1}^{2n+1} k! - \sum\limits_{k=1}^{2n-1} k!} = \frac{(2n+1)!}{(2n+1)! + (2n)!} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2n+1}} \to 1,$$

то за теоремою Штольца $\dfrac{1! + 3! + \ldots + (2n-1)!}{1! + 2! + \ldots + (2n-1)!} \to 1$, тому $\dfrac{2! + \ldots + (2n-2)!}{1! + \ldots + (2n-1)!} \to 0$.

Враховуючи, що $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}(2k-1)! - \sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)!}{\sum\limits_{k=1}^{2n+2} k! - \sum\limits_{k=1}^{2n} k!} = \dfrac{(2n+1)!}{(2n+2)! + (2n+1)!} = \dfrac{1}{2n+3} \to 0,$

коли $n \to \infty$, то $\dfrac{1! + 3! + \ldots + (2n-1)!}{1! + 2! + \ldots + (2n)!} \to 0$, тому $\dfrac{2! + \ldots + (2n)!}{1! + \ldots + (2n)!} \to 1$.

Нехай

$$k_n = 1! + 2! + \ldots + (2n-1)!,$$
$$l_n = \sum_{j=1}^{k_n} [\tau_{0j} j^x] + [\tau_{1j} j^x] + [\tau_{2j} j^x],$$

тоді при $n \to \infty$

$\dfrac{N_0(f(x), l_n)}{l_n} = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{k_n} [\tau_{0j} j^{x+1}]}{l_n} > \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{k_n} \tau_{0j} j^{x+1} - 3k_n}{\sum\limits_{j=1}^{k_n} j^{x+1}}$. (Зрозуміло, що $\dfrac{k_n}{\sum\limits_{j=1}^{k_n} j^{x+1}} \to 0$).

$$\sum_{j=1}^{k_n} \tau_{0j} j^{x+1} = 0,4 \sum_{j=1}^{h_n} b_j^{x+1} + 0,3 \sum_{j=1}^{s_n} l_j^{x+1},$$

де

$$\sum_{j=1}^{h_n} b_j^{x+1} + \sum_{j=1}^{s_n} l_j^{x+1} = \sum_{j=1}^{k_n} j^{x+1},$$
$$h_n = 1! + 3! + \ldots + (2n-1)!,$$
$$s_n = 2! + 4! + \ldots + (2n-2)!.$$

Маємо $\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{s_n} l_j^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n} j^{x+1}} < \dfrac{s_n \cdot k_n^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n} j^{x+1}} = \dfrac{s_n}{k_n} \cdot \dfrac{k_n^{x+2}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n} j^{x+1}} \to 0 \cdot (2+x) = 0.$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{s_n} l_j^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n} j^{x+1}} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{h_n} b_j^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n} j^{x+1}} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{k_n} \tau_{0j} j^{x+1} - 3k_n}{\sum\limits_{j=1}^{k_n} j^{x+1}} = 0,4$.

З іншого боку,

$$\frac{N_0(f(x),l_n)}{l_n} < \frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n}\tau_{0j}j^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n}j^{x+1}+k_n} = \frac{\frac{\sum_{j=1}^{k_n}\tau_{0j}j^{x+1}}{\sum_{j=1}^{k_n}j^{x+1}}}{1+\frac{k_n}{\sum_{j=1}^{k_n}j^{x+1}}} \to 0,4 \text{ при } n\to\infty.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{N_0(f(x),l_n)}{l_n}=0,4.$

Нехай тепер

$$\begin{aligned} k_n^* &= 1!+2!+\ldots+(2n)!,\\ l_n^* &= \sum_{j=1}^{k_n^*}[\tau_{0j}j^x]+[\tau_{1j}j^x]+[\tau_{2j}j^x],\\ h_n^* &= 1!+3!+\ldots+(2n-1)!,\\ s_n^* &= 2!+4!+\ldots+(2n)!. \end{aligned}$$

Маємо, $\sum\limits_{j=1}^{k_n^*}\tau_{0j}j^{x+1}=0,4\sum\limits_{j=1}^{h_n^*}b_j^{*x+1}+0,3\sum\limits_{j=1}^{s_n^*}l_j^{*x+1}$, де $\sum\limits_{j=1}^{h_n^*}b_j^{*x+1}+\sum\limits_{j=1}^{s_n^*}l_j^{*x+1}=\sum\limits_{j=1}^{k_n^*}j^{x+1}$.

Таким чином, $\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{h_n^*}b_j^{*x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n^*}j^{x+1}}<\dfrac{h_n^*}{k_n^*}\cdot\dfrac{k_n^{*x+2}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n^*}j^{x+1}}\to 0\cdot(x+2)=0$ при $n\to\infty$.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{h_n^*}b_j^{*x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n^*}j^{x+1}}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{s_n^*}l_j^{*x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n^*}j^{x+1}}=1.$

$$\frac{N_0(f(x),l_n^*)}{l_n^*} > \frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n^*}\tau_{0j}j^{x+1}-k_n^*}{\sum\limits_{j=1}^{k_n^*}j^{x+1}} \to 0,4\cdot 0+0,3\cdot 1=0,3 \text{ при } n\to\infty,$$

$$\frac{N_0(f(x),l_n^*)}{l_n^*} < \frac{\sum\limits_{j=1}^{k_n^*}\tau_{0j}j^{x+1}}{\sum\limits_{j=1}^{k_n^*}j^{x+1}+k_n^*} \to 0,4\cdot 0+0,3\cdot 1=0,3 \text{ при } n\to\infty.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{N_0(f(x),l_n^*)}{l_n^*}=0,3$ і частота $\nu_0(f(x))$ не існує.

Аналогічно можна показати, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{N_j(f(x),l_n)}{l_n}=\tau_{j1}$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{N_j(f(x),l_n^*)}{l_n^*}=\tau_{j2}$, а тому і $\nu_j(f(x))$ не існує, де $j\in\{1,2\}$. □

Література

[1] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorf-Besicovitch dimension // Ergod. Th. & Dynam. Sys. — 2004, 24. — P. 1–16.

[2] *Besicovitch A.S.* Sets of fractional dimension. 2: On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system // Math. Ann. — 1934. — 110, № 3. — p. 321-330.

[3] *Borel É.* Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques // Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1909. — 27. — P.247–271.

[4] *Eggleston H.G.* Sets of fractional dimensions which occur in some problems of number theory // Proc. London Math. Soc. — 1951. — 54, P. 42–93.

[5] *Hardy G. ang Littlewood J.* Some problems on Diophantine approximations // Acta Mathematica. — 1914. — 37. — P. 155–190.

[6] *Kennedy R.E., Cooper C.N.* An extension of a theorem by Cheo and Yien concerning digital sums // Fibonacci Quart. — 1991, 21 — P.145–149.

[7] *Olsen L.* Normal and non-normal points of self-similar sets and divergence points of self-similar measures // J. London Math. Soc. — 2003. — 2(67), №1. — P. 103–122.

[8] *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация. — М.: Мир, 1969. — 239 с.

[9] *Постников А.Г.* Арифметическое моделирование случайных процессов // Тр. Мат. ин–та им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1960. — Т.57. — С. 3–84.

[10] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

[11] *Працьовитий М.В., Климчук С.О.* Середнє значення символів Q_s-зображення дробової частини дійсного числа і пов'язані з ним задачі фрактальної геометрії та фрактального аналізу // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2011, №12. — С. 186–195.

[12] *Працьовитий М.В., Климчук С.О.* Лінійні фрактали типу Безиковича–Егглстона // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2012, №13(2). — С. 80–92.

[13] *Працьовитий М.В., Климчук С.О.* Тополого–метричні і фрактальні властивості множини дійсних чисел з заданим середнім значенням цифр четвіркового зображення, коли їх частоти існують // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова, 2013. — №14. — С. 217–226.

[14] *Працьовитий М.В., Климчук С.О., Макарчук О.П.* Частота цифри у зображенні числа і його асимптотичне середнє значення цифр // Укр. мат. журн. — 2014, №3. — С. 302–310.

[15] *Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Фрактальна геометрія та перетворення, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича // Динамічні системи: Праці Українського математичного конгресу. — 2001. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. — С.94–102.

[16] *Турбин А.Ф., Працевитий Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук.думка, 1992. — 208 с.