

УДК 511.72

Циліндричне марковське зображення дійсних чисел з нескінченним алфавітом та його застосування

В. В. Луцак

(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

АНОТАЦІЯ. Вивчається зображення дійсних чисел з нескінченним алфавітом і нульовою надлишковістю, основне метричне відношення для якого визначається стохастичною матрицею. Розв'язуються найпростіші задачі метричної і ймовірнісної теорії дійсних чисел для цього зображення.

Ключові слова: дійсне число, зображення дійсних чисел з нескінченним алфавітом, основне метричне відношення, метрична теорія дійсних чисел, циліндри.

ABSTRACT. We study representation of real numbers with infinite alphabet and zero redundancy. Its basic metric relation is determined by a stochastic matrix. We solve simplest problems of metric and probabilistic theory of real numbers for this representation.

Keywords: real number, representation of real number with infinite alphabet, basic metric relation, metric theory of real numbers, cylinders.

1. ВСТУП

Сьогодні в математиці використовуються різні зображення (кодування) дійсних чисел зі скінченним та нескінченним алфавітом, визначені односторонньою чи двосторонньою числовою послідовністю (знакододотньою чи знакозмінною) тощо. Одні системи числення породжують простішу, а інші складнішу геометрію. Кожна система зображення числа має свої переваги та слабкі сторони в плані використання для задання та дослідження різних математичних об'єктів (множин, функцій, операторів, динамічних систем та ін), які мають фрактальні властивості.

В даній роботі ми досліджуємо так зване марківське зображення, яке є узагальненням s -адичного та Q -зображення, а також узагальненням зображення, запропонованого в [ОПрац,08]. Геометрія (геометричний зміст цифр, властивості циліндричних

множин, метричні відношення) даного зображення є складнішою, ніж геометрія Q -зображення, і залежить від $s^2 - s$ параметрів. Природність цього зображення і вибір терміну для нього обумовлена тим, що зображення функції розподілу випадкової величини, s -кові цифри якої мають марківську залежність (утворюють однорідний ланцюг Маркова) з вектором початкових ймовірностей q_0, q_1, \dots, q_{s-1} і матрицею перехідних ймовірностей $\|p_{ij}\|$, в яких відсутні нулі, є марківським.

2. ЦИЛІНДРИЧНЕ МАРКОВСЬКЕ ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

Нехай $A = Z_0 = \{0, 1, \dots, s, \dots\}$ — алфавіт, $q = (q_0, q_1, \dots, q_s, \dots)$ — фіксована послідовність додатних дійсних чисел така, що $q_0 + q_1 + \dots + q_s + \dots = 1$,

$$G = \|q_{ij}\| = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & \dots & q_{0s} & \dots \\ q_{10} & q_{11} & \dots & q_{1s} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q_{(s-1)0} & q_{(s-1)1} & \dots & q_{ss} & \dots \end{pmatrix} — \text{нескінченна стохастична матриця,}$$

тобто $q_{i0} + q_{i1} + \dots + q_{is} + \dots = 1$ для всіх $i \in A$, яка не містить нулів ($q_{ij} > 0$).

Розглянемо систему подрібнюючих розбиттів проміжка $[0, 1)$

$$[0, 1) = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_s \cup \dots,$$

де $\Delta_0 = [0, q_0)$, $\Delta_i = [q_0 + \dots + q_{i-1}, q_0 + \dots + q_{i-1} + q_i)$, $i = 1, \dots, s, \dots$

Визначимо систему проміжків n -го рангу

$$\Delta_{a_1 \dots a_n}, \quad \text{де } a_n \in A, \quad n = 1, 2, \dots$$

наступними умовами:

- (1) $\Delta_{a_1 \dots a_n} = \Delta_{a_1 \dots a_n 0} \cup \dots \cup \Delta_{a_1 \dots a_n s} \cup \dots$;
- (2) $\max \Delta_{a_1 \dots a_n i} = \min \Delta_{a_1 \dots a_n (i+1)}, \quad \forall i = 1, \dots, s, \dots$;
- (3) $\frac{|\Delta_{a_1 \dots a_n i j}|}{|\Delta_{a_1 \dots a_n i}|} = q_{ij}$.

Проміжок $\Delta_{a_1 \dots a_n}$ називатимемо *циліндром рангу n з основою $a_1 \dots a_n$* . Інтервал з тими ж самими кінцями, що й $\Delta_{a_1 \dots a_n}$ позначатимемо через $\nabla_{a_1 \dots a_n}$.

Лема 1. Довжина циліндра $\Delta_{a_1 \dots a_n}$ обчислюється за формулою

$$|\Delta_{a_1 \dots a_n}| = q_{a_1} \prod_{i=1}^{n-1} q_{a_i a_{i+1}}.$$

Доведення. n -кратне застосування властивості циліндрів (3) приводить до:

$$\begin{aligned} |\Delta_{a_1 \dots a_n}| &= q_{a_{n-1} a_n} |\Delta_{a_1 \dots a_{n-2} a_{n-1}}| = q_{a_{n-1} a_n} q_{a_{n-2} a_{n-1}} |\Delta_{a_1 \dots a_{n-2}}| = \dots = \\ &= q_{a_{n-1} a_n} q_{a_{n-2} a_{n-1}} \dots q_{a_2 a_3} q_{a_1 a_2} |\Delta_{a_1}| = q_{a_{n-1} a_n} q_{a_{n-2} a_{n-1}} \dots q_{a_2 a_3} q_{a_1 a_2} q_{a_1} = \end{aligned}$$

$$= q_{a_1} \prod_{i=1}^{n-1} q_{a_i a_{i+1}}.$$

□

Наслідок 1. Для довільної послідовності (a_n) , $a_n \in A$, має місце $|\Delta_{a_1 \dots a_n}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Лема 2. Для довільної послідовності (a_n) , де $a_n \in A$, існує єдина точка $x \in [0, 1)$, така, що належить всім циліндрам послідовності

$$\Delta_{a_1}, \Delta_{a_1 a_2}, \dots, \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots},$$

тобто

$$x = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n} \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}.$$

Доведення. Дане твердження випливає із заданих властивостей проміжків $\Delta_{a_1 \dots a_n}$, наслідку 1 і аксіоми Кантора. □

Лема 3. Має місце рівність

$$x = \Delta_{a_1 \dots a_n \dots} = \beta_{a_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{a_k a_{k+1}} \prod_{j=1}^{k-1} q_{a_j a_{j+1}}, \quad (1)$$

$$\text{де } \beta_{a_1} = \sum_{i=0}^{a_1-1} q_i, \quad \beta_{a_k a_{k+1}} = q_{a_1} \sum_{i=0}^{a_{k+1}-1} q_{a_k i}. \quad (2)$$

Доведення. Справді,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=0}^{a_1-1} |\Delta_i| + \sum_{i=0}^{a_2-1} |\Delta_{a_1 i}| + \sum_{i=0}^{a_3-1} |\Delta_{a_1 a_2 i}| + \dots = \\ &= \sum_{i=0}^{a_1-1} q_i + \sum_{i=0}^{a_2-1} q_{a_1 i} q_{a_1} + \sum_{i=0}^{a_3-1} q_{a_2 i} q_{a_1 a_2} q_{a_1} + \dots + \sum_{i=0}^{a_{k+1}-1} q_{a_k i} \prod_{j=1}^{k-1} q_{a_j} q_{a_{j+1}} q_{a_1} + \dots = \\ &= \beta_{a_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{a_k a_{k+1}} \prod_{j=1}^{k-1} q_{a_j a_{j+1}}. \end{aligned}$$

□

Теорема 1. Для довільного $x \in [0; 1)$ існує послідовність (a_n) , $a_n \in A$ така, що має місце рівність (1).

Доведення. Використовуючи властивості циліндрів, легко бачити, що для довільного $x \in [0; 1)$ існує система вкладених відрізків $\Delta_{a_1}, \Delta_{a_1 a_2}, \dots, \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}, \dots$, які містять x . Згідно з лемою 2, їх переріз співпадає з точкою x , тобто

$$x = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n} \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots} .$$

□

Символічний запис $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}$ виразу (1) числа x називатимемо G_{∞} -марковським зображенням. При цьому a_n називається n -ою цифрою (символом) даного G_{∞} -марковського зображення.

3. Множини чисел, з обмеженнями на вживання цифр

Нехай (V_n) - послідовність підмножин A .

Через $C = C[\Delta, (V_n)]$ будемо позначати множину всіх чисел з відрізка $[0, 1]$, для яких n -ий символ набуває значень з множини V_n , тобто $C = C[\Delta, (V_n)] = \{x : x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}, a_n \in V_n\}$, де $V_n \subseteq A$.

Теорема 2. *Міра Лебега множини C , обчислюється за формулами*

$$\lambda(C) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_n)}{\lambda(\bar{F}_{n-1})} = \tag{3}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\bar{F}_n)}{\lambda(F_{n-1})} \right), \tag{4}$$

де $F_0 = [0, 1]$, F_n - об'єднання циліндрів рангу n , серед внутрішніх точок яких є точки множини C , $\bar{F}_n = F_{n-1} \setminus F_n$.

Доведення. Зрозуміло, що F_n - це замкнена множина, $C \subset F_n$ для довільного $n \in \mathbb{N}$, $C = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, $\lambda(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(F_n)$,

і

$$\lambda(F_n) = \lambda(F_{n-1}) - \lambda(\bar{F}_n), \tag{5}$$

причому

$$\bar{F}_n = \begin{cases} \emptyset & \text{якщо } V_n = A, \\ \bigcup_{v_1 \in V_1} \dots \bigcup_{v_{n-1} \in V_{n-1}} \bigcup_{v_n \in A \setminus V_n} \nabla_{v_1 \dots v_{n-1} v_n}. \end{cases}$$

Оскільки $F_n = \bigcup_{v_1 \in V_1} \dots \bigcup_{v_{n-1} \in V_{n-1}} \bigcup_{v_n \in A \setminus V_n} \Delta_{v_1 \dots v_{n-1} v_n}$,

то

$$\lambda(F_n) = \frac{\lambda(F_n)}{\lambda(F_{n-1})} \cdot \frac{\lambda(F_{n-1})}{\lambda(F_{n-2})} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda(F_2)}{\lambda(F_1)} \cdot \frac{\lambda(F_1)}{\lambda(F_0)} =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \lambda(C) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(F_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})}. \end{aligned}$$

Рівність (1) доведено.

Враховуючи (3), отримуємо

$$\begin{aligned} \lambda(C) &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{k-1}) - \lambda(\bar{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\bar{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} \right), \end{aligned}$$

що й вимагалось довести. □

Наслідок 2. Рівність $\lambda(C) = 0$ рівносильна рівності

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\bar{F}_n)}{\lambda(F_{n-1})} = \infty \quad (6)$$

Доведення. Дане твердження є наслідком теореми 2 і твердження про взаємозв'язок між розбіжністю нескінченних добутоків і рядів. □

Теорема 3. Рівність $\lambda(C) = 0$ має місце тоді і тільки тоді, коли послідовність (V_n) має властивість $V_n \neq A$ для нескінченної множини значень n .

Доведення. Нехай множина $\{n : V_n \neq A\}$ є нескінченною і для кожного члена послідовності (n_k)

$$V_{n_k} \neq A.$$

Тоді

$$\frac{\lambda(\bar{F}_{n_k})}{\lambda(F_{n_k-1})} \geq q_{\min}$$

і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(\bar{F}_{n_k})}{\lambda(F_{n_k-1})} \neq 0.$$

Отже, не виконується необхідна умова збіжності ряду (4), тобто він розбігається і дає, згідно з наслідком теореми 2, $\lambda(C) = 0$.

Нехай $\lambda(C) = 0$. Доведемо, що послідовність (V_n) має властивість $V_n \neq A$ для нескінченної множини значень n . Для цього скористаємося методом від супротивного.

Якщо припустити, що для всіх n , більших деякого n_0 , $V_n = A$, то $F_n = F_{n-1}$ для всіх $n > n_0$ і

$$\frac{\lambda(F_n)}{\lambda(F_{n-1})} = 1,$$

а отже, добуток (1) збігається і згідно з теоремою 2

$$\lambda(C) > 0,$$

що суперечить умові $\lambda(C) = 0$. □

Наслідок 3. $\lambda(C[\Delta, V]) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $V \neq A$, де $V = V_n$ для всіх $n \in N$.

4. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ

Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \Delta_{\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k \dots}, \quad (7)$$

цифри η_k марківського зображення якої є незалежними і однаково розподіленими, а саме:

$$\mathbb{P}\{\eta_k = i\} = q_i \geq 0, \quad q_0 + q_1 + \dots + q_{s-1} = 1.$$

Нехай $q_i > 0$.

Виникає питання: чи є функція розподілу випадкової величини (7) оберненою до функції розподілу випадкової величини, що має Q -зображення, Q -символи якого утворюють ланцюг Маркова.

Теорема 4. 1) Якщо

$$p_0 = p_1 = \dots = p_{s-1} = \frac{1}{s}, \quad p_{ij} = \frac{1}{s},$$

то розподіл ξ є рівномірним.

2) Якщо $p_{ij} = \frac{1}{s}$, то розподіл ξ є кусково-рівномірним.

Теорема 5. Якщо випадкова величина ξ рівномірно розподілена на $[0; 1]$, то її цифри є залежними і утворюють однорідний ланцюг Маркова з початковими ймовірностями

$$p_0 = q_0, \quad p_1 = q_1, \quad \dots, \quad p_{s-1} = q_{s-1}$$

і матрицею перехідних ймовірностей $\|p_{ij}\| = q_{ij}$.

Доведення. Оскільки ξ рівномірно розподілена на $[0; 1]$, то

$$\mathbb{P}\{\xi \in [a, b]\} = \mathbb{P}\{\xi \in (a, b)\} = b - a,$$

зокрема,

$$\mathbb{P}(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{\|p_{ij}\|}) = |\Delta_{c_1 \dots c_m}^{\|p_{ij}\|}|.$$

Оскільки

$$\mathbb{P}\{\tau_1 = j\} = \mathbb{P}\{\xi \in \Delta_j\} = |\Delta_j|,$$

то

$$\mathbb{P}\{\tau_1 = j\} = q_j.$$

Оскільки

$$\mathbb{P}\{\tau_2 = j/\tau_1 = i\} = \mathbb{P}\{\xi \in \Delta_{ij}\} = |\Delta_{ij}|,$$

то

$$\mathbb{P}\{\tau_2 = j/\tau_1 = i\} = q_i q_{ij}.$$

□

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Працьовитий М.В.* Фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q -знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. — Київ: Ін-т математики АН України, 1994. — С.245-254.
- [2] *Працьовитий М.В.* Канторовість і фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q -знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 1998. — № 58. — С.139-148.
- [3] *Працьовитий М.В.* Фрактальні властивості спектра розподілу випадкової величини, Q_∞ -знаки якої утворюють однорідний ланцюг Маркова // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ: ІМ НАН України - НПУ імені М.П.Драгоманова. — 1998. — № 2. — С.36-48.
- [4] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.
- [5] *Працьовитий М.В.* Сингулярні і фрактальні властивості розподілів випадкових величин, цифри поліосновного зображення яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Укр. мат. журн. — 2000. — 52, № 3. — С.368-374.
- [6] *Турбин А.Ф., Працевитий Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук.думка, 1992. — 208с.
- [7] *Працьовитий М.В., Фещенко О.Ю.* Математичні моделі двосторонніх динамічних конфліктів і Q -представлення чисел // Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Фізико-математичні науки. — № 4, 2003. — С. 260-269.
- [8] *Albeverio S., Pratsiivtyi N., Torbin G.* Singular probability distributions and fractal properties of sets of real numbers defined by the asymptotic frequencies of their s-adic digits // Укр. мат. журн. — 2005, 57, 9. — 1163-1170.