Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2013, № 15. — С. ??–187.

УДК 517.5+510.3+511.72

Про деякі множини дійсних чисел, визначені в термінах нега-s-кового та канторівського нега-s-кового зображень

С. О. Сербенюк
(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. Стаття присвячена дослідженню множин

$$\mathbb{S}_{(-s,0)} \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-s)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}, \alpha_n \in A_0, s > 2 \right\},$$

$$S^{-} \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n}{s^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}, \alpha_n \in A_0, s > 2 \right\},$$

де $2 < s$ — фіксоване натуральне число. Доведено, що вони є континуальними, ніде не щільними, досконалими, самоподібними множинами нульової міри Лебега, знайдено їх розмірність Хаусдорфа-Безиковича, а також вивчено властивості фрактальних підмножин даних множин. Означено поняття нега-s-кового ряду Кантора, досліджено взаємозв'язок між знакопочережними рядами Кантора та нега-s-ковим представленням та вивчено фрактальні властивості однієї множини, елементи якої представлені нега-s-ковим рядом Кантора.

Abstract. The article is devoted to the investigation of the following sets

$$\mathbb{S}_{(-s,0)} \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-s)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}, \alpha_n \in A_0, s > 2 \right\},$$

$$S^{-} \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n}{s^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}, \alpha_n \in A_0, s > 2 \right\},$$

where $2 < s$ is a fixed integer number. It is proved, the sets are continuous, nondense, perfect and Lebesgue zero-measure self-similar sets. Hausdorff-Besicovitch dimension of the sets is calculated and properties of fractal subsets of these sets are studied. A notion of nega-s-adic Cantor series is defined and interconnection between nega-s-adic representation and alternating Cantor series is investigated. Fractal properties of one set, that her elements are represented by nega-s-adic Cantor series are studied.

1. Вступ

Важливим питанням у математиці є моделювання дійсних чисел за допомогою рядів, елементи яких є числами, оберненими до натуральних. Ці представлення дійсних чисел широко застосовуються в теорії сингулярних функцій, фрактальній геометрії, теорії динамічних систем, теорії ймовірностей та ін. Проте, метричні теорії таких зображень є набагато менш розвинутими, ніж метрична теорія s-кових дробів. Узагальненням s-кової системи числення є представлення дійсних чисел знакододатними рядами Кантора. Водночас виникає потреба побудувати узагальнення нега-s-кового представлення дійсних чисел, яким, відповідно, будуть знакопочережні ряди Кантора. Слід відзначити, що однією із задач метричної теорії чисел є відшукання взаємозв'язків між різними представленнями (розкладами) дійсних чисел, а однією із задач теорії множин — вивчення властивостей множин спеціального типу, елементи яких задані в термінах різних зображень. Цим задачам і буде присвячена дана стаття, в якій фігуруватимуть нега-s-кове представлення та представлення знакопочережними рядами Кантора. Об'єктом дослідження є фрактальні множини канторівського типу, на елементи яких накладені додаткові умови.

Нехай s — фіксоване натуральне число, більше 1.

Нехай $A \equiv \{0, 1, 2, ..., s-1\}$ — алфавіт s-кової системи числення, $A_0 = A \setminus \{0\}$ та $L \equiv (A_0)^\infty = A_0 \times A_0 \times ...$— простір односторонніх послідовностей елементів множини A_0. Якщо (k_n) - деяка фіксована послідовність натуральних чисел, то ряд

$$\frac{\alpha_{k_1}}{(-s)^{k_1}} + \frac{\alpha_{k_2}}{(-s)^{k_2}} + ... + \frac{\alpha_{k_n}}{(-s)^{k_n}} + ..., \alpha_{k_n} \in A,$$

називається *нега-s-ковим рядом.*

Ввівши заміну: $m_1 = k_1$, $m_2 = k_2 - k_1$, $m_3 = k_3 - k_2$,..., $m_n = k_n - k_{n-1}$,..., отримаємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{m_1+m_2+..+m_n}}{(-s)^{m_1+m_2+...+m_n}}, \alpha_{m_1+m_2+...m_n} \in A. \tag{1}$$

Ті числа $x \in \left[-\frac{s}{s+1}; \frac{1}{s+1}\right]$, які можна представити у вигляді розкладу (1) мають наступне нега-s-кове зображення:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{m_1+m_2+...m_n}}{(-s)^{m_1+m_2+...+m_n}} \equiv \Delta^{-s}_{\underbrace{0...0}_{m_1-1}\alpha_{m_1}\underbrace{0...0}_{m_2-1}\alpha_{m_1+m_2}...\underbrace{0...0}_{m_n-1}\alpha_{m_1+m_2+...+m_n}...}.$$

Нехай (d_n) — деяка фіксована послідовність натуральних чисел, більших 1, (A_n) — послідовність множин $A_n \equiv \{0, 1, 2, ..., d_n - 1\}$ та $L_n \equiv A_1 \times A_2 \times A_n \times ....$

Ряд виду

$$-\frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} - \frac{\varepsilon_3}{d_1 d_2 d_3} + ... + \frac{(-1)^n \varepsilon_n}{d_1 d_2 ... d_n} + ..., \; \varepsilon_n \in A_n, \tag{2}$$

називається *знакопочережним рядом Кантора.*

Знакопочережний ряд Кантора, який є одночасно нега-s-ковим рядом, називається *нега-s-ковим рядом Кантора.* А саме:

$$-\frac{\varepsilon_1}{s^{m_1}}+\frac{\varepsilon_2}{s^{m_1+m_2}}-\frac{\varepsilon_3}{s^{m_1+m_2+m_3}}+...+\frac{(-1)^n\varepsilon_n}{s^{m_1+m_2+...+m_n}}+...,\varepsilon_n\in A. \tag{3}$$

Очевидним є наступне твердження.

Лема 1. *Для того, щоб нега-s-ковий ряд* (1) *був знакопочережним рядом Кантора, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $n\in\mathbb{N}$ послідовність (m_n) була послідовністю непарних натуральних чисел та $\varepsilon_n=\alpha_n\in A$.*

Змішаним s-ковим рядом називається ряд виду

$$-\frac{\alpha_1}{s^{k_1}}+\frac{\alpha_2}{s^{k_2}}-\frac{\alpha_3}{s^{k_3}}+...+\frac{(-1)^n\alpha_n}{s^{k_n}}+...,\ \alpha_n\in A.$$

Очевидно, останній ряд є знакопочережним рядом Кантора.

Великий інтерес викликають часткові випадки, коли послідовності (α_n) та (m_n) є взаємозалежними. Зокрема, коли $m_n=\alpha_n\in A_0$ для довільного $n\in\mathbb{N}$.

Теорема 1. *Множини*

$$\mathbb{S}_{(-s,0)}\equiv\left\{x: x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{(-s)^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}},(\alpha_n)\in L, s>2\right\},$$

$$S^-\equiv\left\{x: x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha_n}{s^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}},(\alpha_n)\in L, s>2\right\},$$

є:

(1) континуальними, ніде не щільними, досконалими нуль-множинами Лебега;

(2) самоподібними фракталами, розмірність Хаусдорфа-Безиковича α_0 яких задовольняє рівняння:

$$\sum_{i=1}^{s-1}\left(\frac{1}{s}\right)^{i\alpha_0}=1.$$

Результати останньої теореми доведені в наступних розділах даної статті.

2. Множини $\mathbb{S}_{(-s,u)}$, де $u=\overline{0,s-1}$

2.1. **Множина $M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}]$.** Нехай $s>2$ — фіксоване натуральне число.

Нехай маємо послідовність (V_n) множин V_n таких, що для всіх $n\in\mathbb{N}$ $V_n\subseteq A_0$:

$$V_n=\{a_1^{(n)},a_2^{(n)},...,a_{m_n}^{(n)}\}\subseteq A_0,\quad n=1,2,3,...,\quad a_1^{(n)}<a_2^{(n)}<...<a_{m_n}^{(n)},$$

$1\le m_n\le s-1$ —натуральне число,

$$L_V\equiv V_1\times V_2\times V_3\times...\times V_n\times....$$

Означення **1.** *Множиною* $M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}]$ називається підмножина чисел відрізка $\left[-\frac{s}{s+1}; \frac{1}{s+1}\right]$, яка задається з використанням нега-s-кового представлення наступним чином:

$$M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}] \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cdot (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{s^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}, (\alpha_n) \in L_V \right\}. \qquad (4)$$

Означення **2.** *Множиною* $\mathbb{M}[S_{(-s,0,V_n)}]$ називається підмножина чисел відрізка $\left[-\frac{s}{s+1}; \frac{1}{s+1}\right]$, яка задається з використанням нега-s-кового зображення наступним чином:

$$M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}] \equiv \left\{ x : x = \Delta^{-s}_{\underbrace{0\ldots0}_{\alpha_1-1}\alpha_1\underbrace{0\ldots0}_{\alpha_2-1}\alpha_2\ldots\underbrace{0\ldots0}_{\alpha_n-1}\alpha_n\ldots}, (\alpha_n) \in L_V \right\}. \qquad (5)$$

Означення 1 та 2 є еквівалентними.

Властивість 1. *Множина* $M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}]$ *не містить нега-s-ково-раціональних чисел.*

Дана властивість випливає з означення нега-s-кового представлення дійсного числа та означення 2.

Введемо наступні позначення:

δ_i^0 — найменше непарне число з множини V_i,

δ_i— найбільше непарне число з множини V_i,

ω_i^0 — найменше парне число з множини V_i,

ω_i — найбільше парне число з множини V_i.

Властивість 2.

$$\inf M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}] = -\frac{\delta_1^0}{s^{\delta_1^0}} - \frac{\omega_2^0}{s^{\delta_1^0+\omega_2^0}} - \frac{\omega_3^0}{s^{\delta_1^0+\omega_2^0+\omega_3^0}} - \ldots - \frac{\omega_i^0}{s^{\delta_1^0+\omega_2^0+\ldots+\omega_i^0}} + \ldots.$$

Зауваження 1. *Якщо існує* n_0, *що* V_{n_0} *не містить парних чисел, то замість* $\omega_{n_0}^0$ *вибираємо* δ_{n_0}. *Далі, з множини* V_{n_0+1} *вибираємо* $\delta_{n_0+1}^0$, *а якщо це також неможливо, то вибираємо* ω_{n_0+1}.

Якщо V_1 *не містить непарних чисел, то вибираємо* ω_1 *і найбільші парні числа вибираємо тих пір, поки не знайдеться перша множина, що містить хоча б одне непарне число.*

Властивість 3.

$$\sup M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}] = \frac{\omega_1^0}{s^{\omega_1^0}} + \frac{\omega_2^0}{s^{\omega_1^0+\omega_2^0}} + \frac{\omega_3^0}{s^{\omega_1^0+\omega_2^0+\omega_3^0}} + \ldots + \frac{\omega_i^0}{s^{\omega_1^0+\omega_2^0+\ldots+\omega_i^0}} + \ldots.$$

Зауваження 2. *Якщо існує* n_0*, що* V_{n_0} *не містить парних чисел, то замість* $\omega^0_{n_0}$ *вибираємо* δ_{n_0}*. Далі, з множини* V_{n_0+1} *вибираємо* $\delta^0_{n_0+1}$*, а якщо це неможливо зробити, то вибираємо* ω_{n_0+1}*.*

Якщо V_1 *не містить парних чисел, то вибираємо* δ_1 *і* δ^0_2*. Потім вибираємо* ω^0_3*, а якщо таке число вибрати неможливо, то аналогічно обираємо* δ_3 *і* δ^0_4 *і т. д.*

Властивість 4.

$$M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}] \subseteq \mathbb{S}_{(-s,0)},\ \text{де } M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}] = \mathbb{S}_{(-s,0)} \Leftrightarrow L_V \equiv L.$$

Теорема 2. *Множина* $M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}]$ *є ніде не щільною нуль-множиною Лебега.*

Остання теорема випливає з відповідних властивостей множини $\mathbb{S}_{(-s,0)}$ (які будуть доведені в наступному розділі) та властивості 4.

Означення **3.** *Циліндром* $\Delta^{(-s,0,V_n)}_{c_1c_2...c_n}$ *рангу* n *з основою* $c_1c_2...c_n$ називатимемо множину виду:

$$\Delta^{(-s,0,V_n)}_{c_1c_2...c_n} \equiv \left\{x : x = \sum^{n}_{k=1} \frac{c_k}{(-s)^{c_1+c_2+...+c_k}} + \frac{1}{(-s)^{c_1+c_2+...+c_n}} \sum^{\infty}_{i=1} \frac{\alpha_{n+i}}{(-s)^{\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+...+\alpha_{n+i}}}\right\},$$

де $c_1, c_2, ..., c_n$ — фіксовані числа з множин $V_1, V_2, ..., V_n$, відповідно та $(\alpha_{n+i}) \in L_V$ для $i = 1, 2, 3, ...$

Теорема 3. *Множина* $M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}]$ *є самоподібним фракталом тоді і тільки тоді, коли*

$$\{a_1, a_2, ..., a_m\} = V_1 = V_2 = ... = V_n = ...,\ \text{де}\ \ a_j \in A_0,\ j = \overline{1, m},\ 2 < m < s,\ m \in \mathbb{N}.$$

Причому, значення розмірності Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}])$ *множини* $M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}]$ *задовольняє рівняння:*

$$\sum^{m}_{j=1} \left(\frac{1}{s}\right)^{a_j\alpha_0} = 1.$$

Доведення. З означення 3 випливає, що

$$d\left(\Delta^{(-s,0,V_n)}_{c_1c_2...c_n}\right) = \frac{1}{s^{c_1+c_2+...+c_n}} d\left(\left\{x : x = \sum^{\infty}_{i=1} \frac{\alpha_{n+i}}{(-s)^{\alpha_{n+1}+...+\alpha_{n+i}}}, \alpha_{n+i} \in L_V\right\}\right) = \frac{d_n}{s^{c_1+...+c_n}}.$$

В силу теореми 2 та рівності

$$\frac{d\left(\Delta^{(-s,0,V_n)}_{c_1c_2...c_nc_{n+1}}\right)}{d\left(\Delta^{(-s,0,V_n)}_{c_1c_2...c_n}\right)} = \frac{1}{s^{c_{n+1}}} \cdot \frac{d_{n+1}}{d_n}$$

і випливає твердження теореми. □

2.2. **Множина** $\mathbb{S}_{(-s,0)}$.

Означення **4.** *Множиною* $\mathbb{S}_{(-s,0)}$ називається підмножина чисел відрізка $\left[-\frac{s}{s+1}; \frac{1}{s+1}\right]$, яка задається з використанням нега-s-кового представлення наступним чином:

$$\mathbb{S}_{(-s,0)} \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cdot (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{s^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}, (\alpha_n) \in L \right\}, \tag{6}$$

де s — фіксоване натуральне число, більше 2.

Лема 2. *Множина* $\mathbb{S}_{(-s,0)}$ *є континуальною.*

Доведення. Покажемо, що множини $\mathbb{S}_{(-s,0)}$ та $C[-s, A_0]$ є еквівалентними. Тобто, побудуємо взаємно однозначну відповідність між цими множинами, а саме:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cdot (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{s^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}} \xrightarrow{f} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-s)^n} = f(x) = y,$$

що еквівалентно

$$x = \Delta^{-s}_{\underbrace{0...0}_{\alpha_1-1}\alpha_1\underbrace{0...0}_{\alpha_2-1}\alpha_2...\underbrace{0...0}_{\alpha_n-1}\alpha_n...} \xrightarrow{f} \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...} = f(x) = y.$$

Нехай маємо x_1 та x_2 з $\mathbb{S}_{(-s,0)}$, $x_1 \neq x_2$, причому:

$$x_1 = \Delta^{-s}_{\underbrace{0...0}_{\alpha_1-1}\alpha_1\underbrace{0...0}_{\alpha_2-1}\alpha_2...\underbrace{0...0}_{\alpha_n-1}\alpha_n...}, \quad x_2 = \Delta^{-s}_{\underbrace{0...0}_{\beta_1-1}\beta_1\underbrace{0...0}_{\beta_2-1}\beta_2...\underbrace{0...0}_{\beta_n-1}\beta_n...}.$$

Припустимо, що $f(x_1) = f(x_2)$ — нега-s-ково-ірраціональне число. Звідси слідує, що $\alpha_n = \beta_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тобто, $x_1 = x_2$, що суперечить умові.

Припустимо, що $f(x_1) = f(x_2)$ — нега-s-ково-раціональне число. Проте, це неможливо, оскільки жодне число з множини $C[-s, A_0]$ не має два нега-s-кових зображення.

Таким чином, f — взаємно однозначна відповідність між $\mathbb{S}_{(-s,0)}$ та $C[-s, A_0]$, що свідчить про еквівалентність цих множин. Із континуальності $C[-s, A_0]$ випливає континуальність $\mathbb{S}_{(-s,0)}$. □

З властивостей 2 і 3 множини $M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}]$ випливають наступні рівності:

$$\inf \mathbb{S}_{(-s,0)} = -\frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^5} - .... = -\frac{s^2+1}{s(s^2-1)},$$

$$\sup \mathbb{S}_{(-s,0)} = \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^4} + \frac{2}{s^6} + ... = \frac{2}{s^2-1}.$$

Означення **5.** *Циліндром* $\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_n}$ *рангу* n *з основою* $c_1c_2...c_n$ називатимемо підмножину множини $\mathbb{S}_{(-s,0)}$, всі елементи якої мають в своєму нега-s-ковому зображенні перші n відмінних від 0 цифр, рівних $c_1, c_2, ..., c_n$ відповідно.

Лема 3. *Циліндри* $\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_n}$ *мають наступні властивості:*

Властивість 5.

$$\inf \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_n} = \begin{cases} g^{(-s)}_n + \frac{\inf \mathbb{S}_{(-s,0)}}{(-s)^{c_1+c_2+...+c_n}}, & \text{якщо } c_1+...+c_n \text{ — парне число;} \\ g^{(-s)}_n + \frac{\sup \mathbb{S}_{(-s,0)}}{(-s)^{c_1+c_2+...+c_n}}, & \text{якщо } c_1+...+c_n \text{ — непарне число.} \end{cases}$$

$$\sup \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_n} = \begin{cases} g^{(-s)}_n + \frac{\sup \mathbb{S}_{(-s,0)}}{(-s)^{c_1+c_2+...+c_n}}, & \text{якщо } c_1+...+c_n \text{ — парне число;} \\ g^{(-s)}_n + \frac{\inf \mathbb{S}_{(-s,0)}}{(-s)^{c_1+c_2+...+c_n}}, & \text{якщо } c_1+...+c_n \text{ — непарне число,} \end{cases}$$

де

$$g^{(-s)}_n = \sum^{n}_{i=1} \frac{c_i(-1)^i}{s^{c_1+c_2+...+c_i}}.$$

Властивість 6.

$$d\left(\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_n}\right) = \frac{d\left(\mathbb{S}_{(-s,0)}\right)}{s^{c_1+c_2+...+c_n}}, \text{ де } d(\cdot) \text{ — діаметр множини.}$$

Властивість 7.

$$\frac{d\left(\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_nc_{n+1}}\right)}{d\left(\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_n}\right)} = \frac{1}{s^{c_{n+1}}}.$$

Властивість 8.

$$\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_n} = \bigcup^{s-1}_{i=1} \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_ni}.$$

Властивість 9. *Для циліндрів* $\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_nc_{n+1}}$ $(n+1)$*-го рангу з основою* $c_1c_2...c_nc_{n+1}$ *виконуються наступні співвідношення:*

$$\inf \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_np} > \sup \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_n(p+1)}, \text{ якщо } c_1+c_2+...+c_n+p \text{ — парне число,}$$

$$\inf \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_n(p+1)} > \sup \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_np}, \text{ якщо } c_1+c_2+...+c_n+p \text{ — непарне число.}$$

Властивість 10.

$$T^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_np} \cap \mathbb{S}_{(-s,0)} = \varnothing, \text{ де } T^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_np} \text{ — інтервал, причому:}$$

$$T^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_np} = \begin{cases} \left(\sup \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_n(p+1)}; \inf \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_np}\right), & \text{якщо } c_1+...+c_n+p \text{ — парне число;} \\ \left(\sup \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_np}; \inf \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_n(p+1)}\right), & \text{якщо } c_1+...+c_n+p \text{ — непарне число,} \end{cases}$$

де $1 \le p < s-1$ *— натуральне число.*

Властивість 11.

$$\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_np} \cap \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_n(p+1)} = \varnothing, \text{ де } p \in \{1,2,...,s-2\}.$$

Властивість 12. *Якщо* $x_0 \in \mathbb{S}_{(-s,0)}$, *то*

$$x_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n}.$$

Доведення. Властивості 5 — 8 випливають з означень циліндра $\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n}$ та множини $\mathbb{S}_{(-s,0)}$.

Доведемо *властивість* 9. Маємо циліндри $\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n p}, \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n(p+1)}$, де $1 \le p < s-1$.

Введемо позначення:

$$g_n^{(-s)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(-s)^{c_1+c_2+\ldots+c_i}}; \quad \varpi_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n.$$

З означення циліндра $\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n}$ випливає, що

$$\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n p} \subset \begin{cases} \left[g_n^{(-s)} + \frac{p}{(-s)^{\varpi_n+p}} + \frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p}}; g_n^{(-s)} + \frac{p}{(-s)^{\varpi_n+p}} + \frac{2}{(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p}}\right], \\ \left[g_n^{(-s)} + \frac{p}{(-s)^{\varpi_n+p}} + \frac{2}{(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p}}; g_n^{(-s)} + \frac{p}{(-s)^{\varpi_n+p}} + \frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p}}\right], \end{cases}$$

де в першому випадку число $\varpi_n + p$ — парне, а в другому — число $\varpi_n + p$ є непарним.

Аналогічно

$$\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n(p+1)} \subset \begin{cases} \left[g_n^{(-s)} + \frac{p+1}{(-s)^{\varpi_n+p+1}} + \frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p+1}}; g_n^{(-s)} + \frac{p+1}{(-s)^{\varpi_n+p+1}} + \frac{2}{(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p+1}}\right], \\ \left[g_n^{(-s)} + \frac{p+1}{(-s)^{\varpi_n+p+1}} + \frac{2}{(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p+1}}; g_n^{(-s)} + \frac{p+1}{(-s)^{\varpi_n+p+1}} + \frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p+1}}\right], \end{cases}$$

де в першому випадку число $(\varpi_n + p + 1)$ — парне, а в другому — непарне.

Перейдемо тепер до доведення нерівностей, сформульованих в умові властивості.

Нехай $\varpi_n + p = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + p$ — парне. Тоді

$$\inf \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n p} - \sup \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n(p+1)} = g_n^{(-s)} + \frac{p}{(-s)^{\varpi_n+p}} + \frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p}} -$$

$$-g_n^{(-s)} - \frac{p+1}{(-s)^{\varpi_n+p+1}} - \frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p+1}} = \frac{1}{s^{\varpi_n+p}}\left(ps + p + 1 - \frac{s^3+s^2+s+1}{s(s^2-1)}\right) > 0,$$

оскільки

$$\frac{s^3+s^2+s+1}{s(s^2-1)} = 1 + \frac{(s+1)^2}{s(s^2-1)} = 1 + \frac{s+1}{s(s-1)} < 2.$$

Нехай $\varpi_n + p = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + p$ — непарне. Тоді

$$\inf \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n(p+1)} - \sup \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n p} = g_n^{(-s)} + \frac{p+1}{(-s)^{\varpi_n+p+1}} + \frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p+1}} - =$$

$$-g_n^{(-s)} - \frac{p}{(-s)^{\varpi_n+p}} - \frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p}} = \frac{1}{s^{\varpi_n+p+1}}\left(ps + p + 1 - \frac{s^3+s^2+s+1}{s(s^2-1)}\right) > 0.$$

Для доведення *властивості* 10 достатньо довести наступні нерівності:

- при умові, що $c_1+c_2+...+c_n+p$ — парне число

$$\begin{cases} \sup\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1...c_n(p+1)c_{n+2}} - \sup\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1...c_n(p+1)} < 0, \\ \\ \inf\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1...c_npc_{n+2}} - \inf\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1...c_np} > 0. \end{cases}$$

- при умові, що $c_1+c_2+...+c_n+p$ — непарне число

$$\begin{cases} \sup\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1...c_npc_{n+2}} - \sup\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1...c_np} < 0, \\ \\ \inf\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1...c_n(p+1)c_{n+2}} - \inf\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1...c_n(p+1)} > 0. \end{cases}$$

Введемо позначення:

$$l_0(c_1,c_2,...,c_n,p) = \begin{cases} -\frac{s^2+1}{s(s^2-1)}, & \text{якщо } c_1+c_2+...+c_n+p \text{ — парне число;} \\ \frac{2}{s^2-1}, & \text{якщо } c_1+c_2+...+c_n+p \text{ — непарне число.} \end{cases}$$

$$l(c_1,c_2,...,c_n,p) = \begin{cases} \frac{2}{s^2-1}, & \text{якщо } c_1+c_2+...+c_n+p \text{ — парне число;} \\ -\frac{s^2+1}{s(s^2-1)}, & \text{якщо } c_1+c_2+...+c_n+p \text{ — непарне число.} \end{cases}$$

Нехай $c_1+c_2+...+c_n+p$ — парне число.

$$\sup\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1...c_n(p+1)c_{n+2}} - \sup\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1...c_n(p+1)} = g_n^{(-s)} + \frac{p+1}{(-s)^{c_1+...+c_n+p+1}} + \frac{c_{n+2}}{(-s)^{c_1+...+c_n+p+1+c_{n+2}}} +$$

$$+\frac{l(c_1,c_2,...,c_n,p+1,c_{n+2})}{(-s)^{c_1+...+c_n+p+1+c_{n+2}}} - g_n^{(-s)} - \frac{p+1}{(-s)^{c_1+...+c_n+p+1}} - \frac{l(c_1,c_2,...,c_n,p+1)}{(-s)^{c_1+...+c_n+p+1}} =$$

$$= -\frac{1}{s^{c_1+...+c_n+p+1}}\left(\frac{c_{n+2}}{(-s)^c_{n+2}} + \frac{l(c_1,c_2,...,c_n,p+1,c_{n+2})}{(-s)^c_{n+2}} + \frac{s^2+1}{s(s^2-1)}\right) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{s^{c_1+...+c_n+p+1}}\left(\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{s^2+1}{s(s^2-1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2+1}{s(s^2-1)}\right) < 0, & \text{якщо } c_{n+2} \text{ — парне;} \\ \\ -\frac{1}{s^{c_1+...+c_n+p+1}}\left(-\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{2}{(s^2-1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2+1}{s(s^2-1)}\right) < 0, & \text{якщо } c_{n+2} \text{ — непарне,} \end{cases}$$

оскільки

$$-\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{2}{(s^2-1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2+1}{s(s^2-1)} = \frac{(s^2+1)s^{c_{n+2}} + sc_{n+2} - (s^2c_{n+2}+2)s}{(s^2-1)s^{1+c_{n+2}}} \geq 0.$$

$$\inf\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1...c_npc_{n+2}} - \inf\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1...c_np} = \frac{c_{n+2}}{(-s)^{c_1+...+c_n+p+c_{n+2}}} + \frac{l_0(c_1,c_2,...,c_n,p,c_{n+2})}{(-s)^{c_1+...+c_n+p+c_{n+2}}} -$$

$$-\frac{l_0(c_1,c_2,...,c_n,p)}{(-s)^{c_1+...+c_n+p}} = \begin{cases} \frac{1}{s^{c_1+...+c_n+p}}\left(\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{s^2+1}{s(s^2-1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2+1}{s(s^2-1)}\right) > 0, & c_{n+2} \text{ — парне;} \\ \\ \frac{1}{s^{c_1+...+c_n+p}}\left(-\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{2}{(s^2-1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2+1}{s(s^2-1)}\right) > 0, & c_{n+2} \text{ — непарне.} \end{cases}$$

Нехай $c_1+c_2+...+c_n+p$ — непарне число.

$$\sup\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1...c_npc_{n+2}}-\sup\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1...c_np}=\frac{c_{n+2}}{(-s)^{c_1+...+c_n+p+c_{n+2}}}+\frac{l(c_1,c_2,...,c_n,p,c_{n+2})}{(-s)^{c_1+...+c_n+p+c_{n+2}}}-$$

$$-\frac{l(c_1,c_2,...,c_n,p)}{(-s)^{c_1+...+c_n+p}}=\begin{cases}-\frac{1}{s^{c_1+...+c_n+p}}\left(\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}}-\frac{s^2+1}{s(s^2-1)s^{c_{n+2}}}+\frac{s^2+1}{s(s^2-1)}\right)<0, & c_{n+2}\text{ — парне;}\\ \\ -\frac{1}{s^{c_1+...+c_n+p}}\left(-\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}}-\frac{2}{(s^2-1)s^{c_{n+2}}}+\frac{s^2+1}{s(s^2-1)}\right)<0, & c_{n+2}\text{ — непарне.}\end{cases}$$

$$\inf\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1...c_n(p+1)c_{n+2}}-\inf\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1...c_n(p+1)}=\frac{c_{n+2}}{(-s)^{c_1+...+c_n+p+1+c_{n+2}}}+\frac{l_0(c_1,c_2,...,c_n,p+1,c_{n+2})}{(-s)^{c_1+...+c_n+p+1+c_{n+2}}}-$$

$$-\frac{l_0(c_1,c_2,...,c_n,p+1)}{(-s)^{c_1+...+c_n+p+1}}=\begin{cases}\frac{1}{s^{c_1+...+c_n+p}}\left(\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}}-\frac{s^2+1}{s(s^2-1)s^{c_{n+2}}}+\frac{s^2+1}{s(s^2-1)}\right)>0, & c_{n+2}\text{ — парне;}\\ \\ \frac{1}{s^{c_1+...+c_n+p}}\left(-\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}}-\frac{2}{(s^2-1)s^{c_{n+2}}}+\frac{s^2+1}{s(s^2-1)}\right)>0, & c_{n+2}\text{ — непарне.}\end{cases}$$

Властивість 11 є наслідком властивості 10.

Властивість 12. З властивостей циліндрів досліджуваної множини слідує, що якщо $x_0\in\mathbb{S}_{(-s,0)}$, то

$$x_0\in\Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1}\cap\Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1\alpha_2}\cap...\cap\Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}\cap...,$$

де $x_0=\Delta^{-s}_{\underbrace{0...0}_{\alpha_1-1}\alpha_1\underbrace{0...0}_{\alpha_2-1}\alpha_2...\underbrace{0...0}_{\alpha_n-1}\alpha_n...}$.

Крім того

$$x_0\in\left[\inf\Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1};\sup\Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1}\right]\cap\left[\inf\Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1\alpha_2};\sup\Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1\alpha_2}\right]\cap...\cap\left[\inf\Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n};\sup\Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}\right]\cap....$$

Як наслідок, число x_0 належить системі відрізків:

$$\left[\inf\Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1};\sup\Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1}\right]\supset\left[\inf\Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1\alpha_2};\sup\Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1\alpha_2}\right]\supset...\supset\left[\inf\Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n};\sup\Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}\right]\supset....$$

Тому, з аксіоми Кантора випливає, що

$$x_0=\bigcap_{n=1}^{\infty}\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_n}.$$

□

Теорема 4. *Множина* $\mathbb{S}_{(-s,0)}$ *є досконалою ніде не щільною нуль-множиною Лебега.*

Доведення. Ніде не щільність випливає із властивості 10 циліндрів $\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2...c_n}$. Досконалість та рівність міри Лебега досліджуваної множини нулю доводяться по аналогії з доведенням відповідних властивостей для множини

$$S\equiv\left\{x:x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{s^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}},(\alpha_n)\in L\right\}$$

в [12]. □

Теорема 5. *Множина $\mathbb{S}_{(-s,0)}$ є самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(\mathbb{S}_{(-s,0)})$ якого задовольняє рівняння:*

$$\left(\frac{1}{s}\right)^{\alpha_0}+\left(\frac{1}{s}\right)^{2\alpha_0}+...+\left(\frac{1}{s}\right)^{(s-1)\alpha_0}=1.$$

Доведення. Оскільки множина $\mathbb{S}_{(-s,0)}$ обмежена і замкнена, то вона є компактом.

Крім того

$$\mathbb{S}_{(-s,0)}=\bigcup_{i=1}^{s-1}\left[\left[\inf\Delta_i^{(-s,0)};\sup\Delta_i^{(-s,0)}\right]\cap\mathbb{S}_{(-s,0)}\right]$$

та

$$\left[\left[\inf\Delta_i^{(-s,0)};\sup\Delta_i^{(-s,0)}\right]\cap\mathbb{S}_{(-s,0)}\right]\overset{s^{-i}}{\sim}\mathbb{S}_{(-s,0)}\text{ для всіх } i=\overline{1,s-1}.$$

Тому значення $\alpha_s(\mathbb{S}_{(-s,0)})$ самоподібної розмірності множини $\mathbb{S}_{(-s,0)}$ задовольняє рівняння:

$$\left(\frac{1}{s}\right)^{\alpha_s}+\left(\frac{1}{s}\right)^{2\alpha_s}+...+\left(\frac{1}{s}\right)^{(s-1)\alpha_s}=1.$$

В силу того, що множина $\mathbb{S}_{(-s,0)}$ є самоподібним компактом простору $\mathbb{R}^1$, то значення самоподібної розмірності множини $\mathbb{S}_{(-s,0)}$ співпадає із значенням розмірності Хаусдорфа-Безиковича цієї множини [10]. □

2.3. **Множина $\mathbb{S}_{(-s,u)}$.** Нехай u — фіксоване натуральне число з A.

Означення **6.** *Множиною* $\mathbb{S}_{(-s,u)}$ називається підмножина чисел відрізка $\left[-\frac{s}{s+1};\frac{1}{s+1}\right]$, яка з використанням нега-s-кового представлення задається наступним чином:

$$\mathbb{S}_{(-s,u)}\equiv\left\{x:x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_n-u}{-s^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}}\right)-\frac{u}{s+1},(\alpha_n)\in L\right\},$$

Означення **7.** *Множиною* $\mathbb{S}_{(-s,u)}$ називається підмножина чисел відрізка $\left[-\frac{s}{s+1};\frac{1}{s+1}\right]$, яка з використанням нега-s-кового зображення задається наступним чином:

$$\mathbb{S}_{(-s,u)}\equiv\left\{x:x=\Delta^{-s}_{\underbrace{u...u}_{\alpha_1-1}\alpha_1\underbrace{u...u}_{\alpha_2-1}\alpha_2...\underbrace{u...u}_{\alpha_n-1}\alpha_n...},(\alpha_n)\in L,u\neq\alpha_n\ \forall n\in\mathbb{N}\right\},\text{ де}$$

u — фіксоване число.

Означення *7* і *8* є еквівалентними.

Теорема 6. *Нехай множина E — множина канторівського типу, яка складається зі всіх таких елементів, кожен з яких в нега-s-ковій системі числення має зображення, яке містить лише набори цифр з деякої конкретної скінченної множини $\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_m\}$ наборів цифр.*

Тоді розмірність Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(E)$ множини E задовольняє рівняння:

$$N(\sigma_m^1)\left(\frac{1}{s}\right)^{\alpha_0}+N(\sigma_m^2)\left(\frac{1}{s}\right)^{2\alpha_0}+...+N(\sigma_m^k)\left(\frac{1}{s}\right)^{k\alpha_0}=1,$$

де $N(\sigma_m^k)$ — кількість k-цифрових наборів з множини $\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_m\}$, $k\in\mathbb{N}$ та $N(\sigma_m^1)+N(\sigma_m^2)+...+N(\sigma_m^k)=m$.

Доведення. Нехай E — множина канторівського типу, яка складається зі всіх таких елементів, в нега-s-ковому зображенні яких використовуються лише набори цифр з множини $\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_m\}$. Тоді очевидним є існування наборів $e_1e_2...e_r$, $\iota_1\iota_2...\iota_t$, де $r,t\in\mathbb{N}$ (можуть являти собою не один, а кілька наборів з $\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_m\}$), таких, що

$$\inf E=\Delta^{-s}_{(e_1e_2...e_r)(e_1e_2...e_r)...}\quad \sup E=\Delta^{-s}_{(\iota_1\iota_2...\iota_t)(\iota_1\iota_2...\iota_t)...}.$$

$$d(E)=\sup E-\inf E,\ \text{де } d(\cdot)\text{— діаметр множини.}$$

Циліндром $\Delta^{(-s,E)}_{\tau_1\tau_2...\tau_n}$ рангу n з основою $\tau_1\tau_2...\tau_n$ називатимемо таку підмножину множини E, всі елементи якої мають в своєму нега-s-ковому зображенні n перших фіксованих набори з $\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_m\}$. Легко помітити, що

$$d\left(\Delta^{(-s,E)}_{\tau_1\tau_2...\tau_n}\right)=\frac{d(E)}{s^{N(\tau_1+\tau_2+...+\tau_n)}},$$

де $N(\tau_1+\tau_2+...+\tau_n)$ — кількість цифр в усіх наборах $\tau_1,\tau_2,...,\tau_n$.

В силу того, що

$$E=C[-s,\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_m\}],\quad E\subset[\inf E;\sup E]\ \text{ та}$$

$$\frac{\Delta^{(-s,E)}_{\tau_1\tau_2...\tau_n\tau_{n+1}}}{\Delta^{(-s,E)}_{\tau_1\tau_2...\tau_n}}=\frac{1}{s^{N(\tau_{n+1})}},$$

$$E=[I_{\tau_1}\cap E]\cup[I_{\tau_2}\cap E]\cap...\cap[I_{\tau_m}\cap E],$$

де $I_{\tau_i}=\left[\inf\Delta^{(-s,E)}_{\tau_i};\sup\Delta^{(-s,E)}_{\tau_i}\right]$, $i=\overline{1,m}$.

Таким чином

$$\left[I_{\tau_1^1}\cap E\right]\overset{s^{-1}}{\sim}E,\left[I_{\tau_2^1}\cap E\right]\overset{s^{-1}}{\sim}E,...,\left[I_{\tau_{n_1}^1}\cap E\right]\overset{s^{-1}}{\sim}E;$$

$$\left[I_{\tau_1^2}\cap E\right]\overset{s^{-2}}{\sim}E,\left[I_{\tau_2^2}\cap E\right]\overset{s^{-2}}{\sim}E,...,\left[I_{\tau_{n_2}^2}\cap E\right]\overset{s^{-2}}{\sim}E;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\left[I_{\tau_1^k}\cap E\right]\overset{s^{-k}}{\sim}E,\left[I_{\tau_2^k}\cap E\right]\overset{s^{-k}}{\sim}E,...,\left[I_{\tau_{n_k}^k}\cap E\right]\overset{s^{-k}}{\sim}E,$$

де τ_j^k — деякий k-цифровий набір з $\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_m\}$ $(j=\overline{1,n_k})$, а n_k — кількість k-цифрових наборів з $\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_m\}$.

Отже, множина E є самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича якого задовольняє рівняння:

$$N(\sigma_m^1)\left(\frac{1}{s}\right)^{\alpha_0}+N(\sigma_m^2)\left(\frac{1}{s}\right)^{2\alpha_0}+...+N(\sigma_m^k)\left(\frac{1}{s}\right)^{k\alpha_0}=1.$$

□

З останньої теореми випливають наступні твердження.

Теорема 7. *Множина $\mathbb{S}_{(-s,u)}$ є самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(\mathbb{S}_{(-s,u)})$ якого задовольняє рівняння:*

$$\sum_{i\in A_u}\left(\frac{1}{s}\right)^{i\alpha_0}=1, \text{ де } A_u=\{1,2,...,s-1\}\setminus\{u\}.$$

Теорема 8. *Множина $\mathbb{S}_{(-s,u)}$ є континуальною, досконалою ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.*

Означення **8.** *Множиною* $M[\mathbb{S}_{(-s,u,V_n)}]$ називається множина виду:

$$\mathbb{S}_{(-s,u)}\equiv\left\{x: x=\Delta^{-s}_{\underbrace{u...u}_{\alpha_1-1}\alpha_1\underbrace{u...u}_{\alpha_2-1}\alpha_2...\underbrace{u...u}_{\alpha_n-1}\alpha_n...}, (\alpha_n)\in L_V, u\neq\alpha_n\ \forall n\in\mathbb{N}\right\}, \text{ де}$$

u — фіксоване число.

По аналогії до проведеного дослідження для множин $M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}]$, $\mathbb{S}_{(-s,u)}$, сформулюємо наступні теореми.

Теорема 9. *Множина $M[\mathbb{S}_{(-s,u,V_n)}]$ є ніде не щільною нуль-множиною Лебега.*

Теорема 10. *Множина $M[\mathbb{S}_{(-s,0,V_n)}]$ є самоподібним фракталом тоді і тільки тоді, коли*

$$\{a_1,a_2,...,a_m\}=V_1=V_2=...=V_n=..., \text{ де } a_j\in A_0,\ j=\overline{1,m},\ 2<m<s,\ m\in\mathbb{N}.$$

Причому, значення розмірності Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(M[\mathbb{S}_{(-s,u,V_n)}])$ множини $M[\mathbb{S}_{(-s,u,V_n)}]$ задовольняє рівняння:

$$\sum_{j=1,a_j\neq u}^{m}\left(\frac{1}{s}\right)^{a_j\alpha_0}=1.$$

3. Множина S^-

3.1. Дослідження властивостей множини S^-.

Означення **9.** *Множиною* S^- називатимемо множину виду:

$$S^- \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n}{s^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}, (\alpha_n) \in L, \right\}, \text{ де}$$

$2 < s$ — фіксоване натуральне число.

Циліндром $\Delta^-_{c_1c_2\ldots c_n}$ *з основою* $c_1c_2\ldots c_n$ *рангу* n називатимемо множину всіх можливих чисел з S^-, для яких виконується умова:

$$\alpha_1 = c_1, \alpha_2 = c_2, \ldots, \alpha_n = c_n, \text{ де } c_1, c_2, \ldots, c_n \text{ — фіксований набір чисел.}$$

Очевидно, що

$$\Delta^-_{c_1c_2\ldots c_n} \subset \begin{cases} \left[\sigma_{2k} + \frac{\inf S^-}{s^{c_1+c_2+\ldots c_{2k}}}; \sigma_{2k} + \frac{\sup S^-}{s^{c_1+c_2+\ldots c_{2k}}}\right], & \text{якщо } n = 2k, \ k \in \mathbb{N}; \\ \left[\sigma_{2k+1} - \frac{\sup S^-}{s^{c_1+c_2+\ldots c_{2k+1}}}; \sigma_{2k+1} - \frac{\inf S^-}{s^{c_1+c_2+\ldots c_{2k+1}}}\right], & \text{якщо } n = 2k+1, \end{cases}$$

де

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_i}}, \ \inf S^- = \frac{-s^{s-1}+s-1}{s^s-1}, \ \sup S^- = \frac{-s^2+s+1}{s^s-1}.$$

Лема 4. *Справедливими є наступні властивості:*

(1)

$$d(\Delta^-_{c_1c_2\ldots c_n}) = \frac{s^{s-1}-s^2+2}{(s^s-1)s^{c_1+c_2+\ldots+c_n}}.$$

(2)

$$\frac{\Delta^-_{c_1c_2\ldots c_nc_{n+1}}}{\Delta^-_{c_1c_2\ldots c_n}} = \frac{1}{s^{c_{n+1}}}.$$

(3)

$$\Delta^-_{c_1c_2\ldots c_nc_{n+1}} \subset \Delta^-_{c_1c_2\ldots c_n} \ \forall c_n \in A_0, \ n \in \mathbb{N}.$$

(4) Циліндри $\Delta^-_{c_1c_2\ldots c_{n-1}1}, \Delta^-_{c_1c_2\ldots c_{n-1}2}, \ldots, \Delta^-_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[s-1]}$ *розташовані:*

- *"справа на ліво", якщо n — парне. Тобто,*

$$\forall k \in \mathbb{N} : \sup \Delta^-_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}[c_{2k}+1]} < \inf \Delta^-_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}c_{2k}},$$

- *"зліва на право", якщо n — непарне. Тобто,*

$$\forall k \in \mathbb{N} : \sup \Delta^-_{c_1c_2\ldots c_{2k}c_{2k+1}} < \inf \Delta^-_{c_1c_2\ldots c_{2k}[c_{2k+1}+1]}.$$

Доведення. Перша та *друга* властивості випливають з означення циліндричних множин.

Для доведення *третьої* властивості потрібно розглянути випадки для парного та непарного n.

1. Нехай $n = 2k, k \in \mathbb{N}$. Тоді нерівність $\inf \Delta^{-}_{c_1c_2\ldots c_nc_{n+1}} \geq \inf \Delta^{-}_{c_1c_2\ldots c_n}$ можна записати у вигляді:

$$\sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_m}} - \frac{c_{2k+1}}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k+1}}} - \frac{\sup S^-}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k+1}}} \geq \sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_m}} + \frac{\inf S^-}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k}}},$$

що еквівалентно

$$-c_{2k+1} - \sup S^- \geq s^{c_{2k+1}} \inf S^-,$$
$$\frac{(s^2 - s - 1) + s^{c_{2k+1}}(s^{s-1} - s + 1) - c_{2k+1}(s^s - 1)}{s^s - 1} \geq 0.$$

Очевидно, що остання нерівність перетворюється в рівність при $c_{2k+1} = 1$.

Тепер для парного n перевіримо виконання нерівності $\sup \Delta^{-}_{c_1c_2\ldots c_nc_{n+1}} \leq \sup \Delta^{-}_{c_1c_2\ldots c_n}$.

$$\sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_m}} - \frac{c_{2k+1}}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k+1}}} - \frac{\inf S^-}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k+1}}} \leq \sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_m}} + \frac{\sup S^-}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k}}},$$
$$-c_{2k+1} - \inf S^- \leq s^{c_{2k+1}} \sup S^-,$$

що еквівалентно

$$(1 + c_{2k+1} + s^{2+c_{2k+1}} + s^{s-1}) - s - s^{1+c_{2k+1}} - c_{2k+1}s^s - s^{c_{2k+1}} \leq 0.$$

Остання нерівність перетворюється в рівність при $c_{2k+1} = s - 1$.

2. Нехай $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$. Тоді нерівність $\inf \Delta^{-}_{c_1c_2\ldots c_nc_{n+1}} \geq \inf \Delta^{-}_{c_1c_2\ldots c_n}$ еквівалентна нерівності:

$$\sum_{m=1}^{2k+1} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_m}} + \frac{c_{2k+2}}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k+2}}} + \frac{\inf S^-}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k+2}}} \geq \sum_{m=1}^{2k+1} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_m}} - \frac{\sup S^-}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k+1}}},$$

в результаті отримаємо:

$$(s - 1 - c_{2k+2}) - s^{c_{2k+2}}(s^2 - s - 1) + s^{s-1}(sc_{2k+2} - 1) \geq 0,$$

що очевидно. При $c_{2k+2} = s - 1$ остання нерівність перетворюється в рівність.

Аналогічно, для нерівності $\sup \Delta^{-}_{c_1c_2\ldots c_nc_{n+1}} \leq \sup \Delta^{-}_{c_1c_2\ldots c_n}$, отримаємо:

$$\sum_{m=1}^{2k+1} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_m}} + \frac{c_{2k+2}}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k+2}}} + \frac{\sup S^-}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k+2}}} \leq \sum_{m=1}^{2k+1} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_m}} - \frac{\inf S^-}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k+1}}},$$
$$\sup S^- + c_{2k+2}(s^s - 1) \leq -s^{c_{2k+2}} \inf S^-,$$
$$(s - s^2) + (1 - c_{2k+2}) + (s - 1)s^{c_{2k+2}} + s^{s-1}(sc_{2k+2} - s^{c_{2k+2}}) \leq 0,$$

що справджується для всіх можливих значень c_{2k+2} та $s > 2$ і перетворюється в рівність при $c_{2k+2} = 1$.

Перейдемо до доведення *четвертої* властивості про розташування циліндричних множин.

-
$$\forall k \in \mathbb{N}: \ \sup \Delta^{-}_{c_1c_2...c_{2k-1}[c_{2k}+1]} - \inf \Delta^{-}_{c_1c_2...c_{2k-1}c_{2k}} =$$
$$= \frac{c_{2k}+1}{s^{c_1+c_2+...+c_{2k}+1}} + \frac{\sup S^{-}}{s^{c_1+c_2+...+c_{2k}+1}} - \frac{c_{2k}}{s^{c_1+c_2+...+c_{2k}}} - \frac{\inf S^{-}}{s^{c_1+c_2+...+c_{2k}}} =$$
$$= \frac{1}{s^{c_1+c_2+...+c_{2k}}}\left(\frac{1-s}{s}c_{2k} + 2\frac{s^s - s^2 + s}{s(s^s-1)}\right) =$$
$$= \frac{s^s(2 + c_{2k} - sc_{2k}) + s(c_{2k} + 2 - 2s) - c_{2k}}{s(s^s-1)s^{c_1+c_2+...+c_{2k}}} < 0.$$

-
$$\forall k \in \mathbb{N}: \ \sup \Delta^{-}_{c_1c_2...c_{2k}c_{2k+1}} - \inf \Delta^{-}_{c_1c_2...c_{2k}[c_{2k+1}+1]} =$$
$$= \frac{c_{2k+1}}{s^{c_1+c_2+...+c_{2k}+c_{2k+1}}} - \frac{\inf S^{-}}{s^{c_1+c_2+...+c_{2k}+c_{2k+1}}} - \frac{1+c_{2k+1}}{s^{1+c_1+c_2+...+c_{2k}+c_{2k+1}}} + \frac{\sup S^{-}}{s^{1+c_1+c_2+...+c_{2k}+c_{2k+1}}} =$$
$$= \frac{1}{s^{1+c_1+c_2+...+c_{2k}+c_{2k+1}}}\left(\frac{s^s - 2s^2 + 2s + 1}{s^s-1} - \frac{s^{s+1}c_{2k+1} - sc_{2k+1}}{s^s-1} + \frac{s^s c_{2k+1} - c_{2k+1}}{s^s-1} + \frac{s^s-1}{s^s-1}\right) =$$
$$= \frac{s^s(2 + c_{2k+1} - sc_{2k+1}) + s(2 - 2s - c_{2k+1}) - c_{2k+1}}{(s^s-1)s^{1+c_1+c_2+...+c_{2k}+c_{2k+1}}} < 0.$$

$\square$

Наслідок 1. *Для всіх* $c_n \in \{1, 2, ..., s-2\}$*:* $\Delta^{-}_{c_1c_2...c_{n-1}c_n} \cap \Delta^{-}_{c_1c_2...c_{n-1}[c_n+1]} = \varnothing$.

Наслідок 2. *Інтервали виду*

$\left(\sup \Delta^{-}_{c_1c_2...c_{2k-1}}; \inf \Delta^{-}_{c_1c_2...c_{2k-2}[c_{2k-1}+1]}\right)$, $\left(\sup \Delta^{-}_{c_1c_2...c_{2k-1}[c_{2k}+1]}; \inf \Delta^{-}_{c_1c_2...c_{2k-1}c_{2k}}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, *є "дірками"множини* S^{-}.

Наслідок 3. *Для довільного* $x_0 \in S^{-}$

$$x_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{-}_{c_1c_2...c_n}.$$

3.2. **Властивості множини S^-.**

Теорема 11. *Множина S^- є:*

- *континуальною, ніде не щільною, досконалою нуль-множиною Лебега;*
- *самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича α_0 якого задовольняє рівняння:*

$$\left(\frac{1}{s}\right)^{\alpha_0}+\left(\frac{1}{s}\right)^{2\alpha_0}+...+\left(\frac{1}{s}\right)^{(s-1)\alpha_0}=1.$$

Доведення проводиться по аналогії до доведення відповідних властивостей для множини $\mathbb{S}_{(-s,0)}$ з врахуванням доведеної в останньому розділі леми та її наслідків, а також з врахуванням властивостей представлення чисел знакопочережними рядами Кантора.

3.3. **Класи S^-−множин.**

Означення **10.** *Множиною S^-_V* називається множина S^-, якщо виконується умова: $\forall i\in\mathbb{N}\quad \alpha_i\in A_i\subset A_0\subset A\equiv\{0,1,...,s-1\}$

Оскільки множина S^- є підмножиною відрізка $\left[\frac{-s^{s-1}+s-1}{s^s-1};\frac{-s^2+s+1}{s^s-1}\right]$ та за означенням $\alpha_i\neq 0\quad\forall i\in\mathbb{N}$, то $S^-_V\subseteq S^-$.

З властивостей множини S^- випливає наступний наслідок.

Наслідок 4. *Нехай $\forall i\in\mathbb{N}\quad \alpha_i\in A_i\subset A_0\subset A$, тобто*

$$\alpha_1\in V_1\subseteq A_0\subset A,\alpha_2\in V_2\subseteq A_0\subset A,\alpha_3\in V_3\subseteq A_0\subset A,...,\alpha_n\in V_n\subseteq A_0\subset A,...$$

тоді

$$\Delta^-_{c_1...c_{2k}}\subset\left[\sum_{m=1}^{2k}\frac{c_m}{s^{c_1+...+c_m}}+\frac{\inf S^-_V}{s^{c_1+...+c_{2k}}};\sum_{m=1}^{2k}\frac{c_m}{s^{c_1+...+c_m}}+\frac{\sup S^-_V}{s^{c_1+...+c_{2k}}}\right],$$

$$\Delta^-_{c_1...c_{2k+1}}\subset\left[\sum_{m=1}^{2k+1}\frac{c_m}{s^{c_1+...+c_m}}-\frac{\sup S^-_V}{s^{c_1+...+c_{2k+1}}};\sum_{m=1}^{2k+1}\frac{c_m}{s^{c_1+...+c_m}}-\frac{\inf S^-_V}{s^{c_1+...+c_{2k+1}}}\right],$$

де

$$\inf S^-_V=-\frac{\min\{\alpha_1\}}{s^{\min\{\alpha_1\}}}+\frac{\max\{\alpha_2\}}{s^{\min\{\alpha_1\}+\max\{\alpha_2\}}}-\frac{\min\{\alpha_3\}}{s^{\min\{\alpha_1\}+\max\{\alpha_2\}+\min\{\alpha_3\}}}+...,$$

$$\sup S^-_V=-\frac{\max\{\alpha_1\}}{s^{\max\{\alpha_1\}}}+\frac{\min\{\alpha_2\}}{s^{\max\{\alpha_1\}+\min\{\alpha_2\}}}-\frac{\max\{\alpha_3\}}{s^{\max\{\alpha_1\}+\min\{\alpha_2\}+\max\{\alpha_3\}}}+....$$

Теорема 12. *Множина S^-_V є:*

- *ніде не щільною;*

- *нуль-множиною Лебега;*
- *обмеженою;*
- *множина S_V^- не завжди є самоподібною і*

$$\alpha_0(S_V) \leq \alpha_0(S).$$

Множина S_V^- є самоподібна, коли

$$V_1 = V_2 = V_3 = ... = V_n = ... = \{d_1, d_2, ..., d_m\}, \quad (d_i \in A_0, 1 < m \leq s-1, m \in \mathbb{N}).$$

Тоді розмірність Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(S_V^-)$ множини S_V^- обчислюється за формулою:

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{s}\right)^{d_j \alpha_0} = 1.$$

4. Множини дійсних чисел, що представлені з використанням нега-s-кових рядів Кантора

Теорема 13. *Нехай $s > 1$ — фіксоване натуральне число та для всіх $n \in \mathbb{N}$ $\alpha_{m_1+m_2+...+m_n} \neq 0$ і $m_n \in \{3, 5, 7, ..., 2i+1, ...\}$.*

Множина $M_{(-D,s)}$

$$M_{(-D,s)} \equiv \left\{ x : x = \Delta^{-s}_{\underbrace{0...0}_{m_1-1}\alpha_{m_1}\underbrace{0...0}_{m_2-1}\alpha_{m_1+m_2}\cdots\underbrace{0...0}_{m_n-1}\alpha_{m_1+m_2+...+m_n}\cdots} \right\}.$$

є N-самоподібним фракталом, розмірність α_0 Хаусдорфа-Безиковича якого дорівнює:

$$\alpha_0\left(M_{(-D,s)}\right) = \log_s \left(\sqrt[3]{\frac{s-1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{27(s-1)^2-4}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{s-1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{27(s-1)^2-4}{3}}} \right).$$

Доведення. З (3) та теореми 6 випливає, що розмірність α_0 Хаусдорфа-Безиковича множини $M_{(-D,s)}$ при $m_n \in \{3, 5, 7, ..., 2i+1, ...\}$, $\alpha_{m_1+m_2+...+m_n} \neq 0$ та фіксованому $s > 1$ задовольняє рівняння:

$$(s-1)\left(\frac{1}{s}\right)^{3\alpha_0} + (s-1)\left(\frac{1}{s}\right)^{5\alpha_0} + (s-1)\left(\frac{1}{s}\right)^{7\alpha_0} + ... + (s-1)\left(\frac{1}{s}\right)^{(2i+1)\alpha_0} + ... = 1, \ i = 1, 2, ...,$$

яке еквівалентне рівнянню

$$s^{3\alpha_0} - s^{\alpha_0} - (s-1) = 0.$$

За формулами Кардано й отримаємо відповідний результат. $\square$

Зауваження 3. *Якщо умова* $m_n = 1$ *виконується скінченну кількість разів, то значення розмірності множини* $M_{(-D,s)}$ *не змінюється. Якщо ж умова* $m_n = 1$ *виконується для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *або* $m_n \neq 1$ *виконується скінченну кількість разів, тоді значення розмірності* $\alpha_0(M_{(-D,s)})$ *Хаусдорфа-Безиковича множини* $M_{(-D,s)}$ *дорівнюватиме* $\log_s(s-1)$.

Цілком очевидно, що елементи множини $M_{(-D,s)}$ є представленими нега-s-ковими рядами Кантора.

Наслідок 5. *Якщо послідовність непарних натуральних чисел* (m_n) *є фіксованою і чисто періодичною з періодом* $(m_1 m_2 ... m_t)$, *тоді множина* $M'_{(-D,s,t)}$ *всіх можливих дійсних чисел, які можна представити нега-s-ковими рядами Кантора* (3) *з відповідною послідовністю* (m_n) *є самоподібним фракталом, причому*

$$\alpha_0\left(M'_{(-D,s,t)}\right) = \frac{t}{m_1 + m_2 + ... + m_t}.$$

Доведення. Оскільки елементи згаданої вище множини мають періодичне нега-s-кове зображення, тобто

$$M'_{(-D,s,t)} \ni x = \Delta^{-s}_{\left(\underbrace{0...0}_{m_1-1}\alpha_{m_1}\underbrace{0...0}_{m_2-1}\alpha_{m_1+m_2}...\underbrace{0...0}_{m_t-1}\alpha_{m_1+m_2+...+m_t}\right)},$$

де $\{m_1, m_2, ..., m_t\}$ — фіксований набір непарних чисел, а $\alpha_{m_1}, \alpha_{m_1+m_2}, ..., \alpha_{m_1+...+m_t}$ — числа з множини A, тоді за теоремою 6, значення розмірності Хаусдорфа-Безиковича відповідної множини задовольнятиме рівняння:

$$s^t \left(\frac{1}{s}\right)^{(m_1+m_2+...+m_t)\alpha_0} = 1.$$

З останнього рівняння й слідує твердження наслідку. $\square$

Література

[1] *Beardon A.F.* On the Hausdorff dimension of general Cantor sets // Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1965.— 61.— P. 679–694.

[2] *Bill Mance.* Normal numbers with respect to the Cantor series expansion. — The Ohio State University, 2010. — 290 p.

[3] *Cantor G.* Ueber die einfachen Zahlensysteme. Z. Mathl. Phys. — 1869.— Bd. 14.— S. 121–128.

[4] *Eggleston H. G.* The fractional dimension of a set defined by decimal properties // Quart. J. Math. — 1949.— 20.— P. 31–36.

[5] *Eggleston H. G.* Sets of fractional dimensions which occur in some problems of number theory // Proc. London Math. Soc. — 1953.— 54.— P. 42–93.

[6] *Hensley D.* Continued Fraction Cantor Sets, Hausdorff Dimension and Functional Analysis // Journal of number theory. — 1992.— 40.— P. 336–358.

[7] *Randolph J. E.* Some properties of sets of the Cantor type // J. London Math. Soc. — 1941.— 16.— P. 38–42.

[8] *Працьовитий М. В., Гетьман Б. І.* Зображення чисел s-адичними рядами Енгеля // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова.— 2008, №9.— С. 212 —224.

[9] *Працьовитий М. В., Гетьман Б. І.* Ряди Енгеля та їх застосування // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова.— 2006, №7.— С. 105 —116.

[10] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[11] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.,* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наукова думка, 1992. — 208 с.

[12] *Сербенюк С.О.* Тополого-метричні і фрактальні властивості однієї множини дійсних чисел, визначеної в термінах s-кового зображення // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова.— 2010, № 11.— С. 241 — 250.

[13] *Сербенюк С. О.* Тополого-метричні властивості та використання однієї узагальненої множини, заданої s-ковим зображенням з параметром// Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2011, №12. — С. 66-75.

[14] *Сербенюк С. О.* Зображення чисел знакододатними рядами Кантора: задання раціональних чисел// Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, №14. — С. 253-267.

[15] *Ралко Ю. В.* Зображення чисел рядами Кантора та деякі його застосування // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова.— 2009, № 10.— С. 132 —140.

[16] *Федер Е.* Фракталы. — М.: Мир, 1991. — 254 с.