Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2013, № 15. — С. 144–155.

УДК 517.5

Сингулярні немонотонні функції, визначені в термінах Q_s^*-зображення аргумента

М. В. Працьовитий, О. В. Свинчук
(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. Вводиться в розгляд континуальний клас неперервних функцій, залежних від набору параметрів, зі складною локальною поведінкою: сингулярних монотонних, сингулярних немонотонних, ніде не монотонних тощо, доводяться ознаки належності до кожного з вказаних типів. Вивчаються їх структурні властивості, множини особливостей (максимумів — мінімумів), множини рівнів та ін.

Ключові слова: сингулярна функція, ніде не диференційовна функція, Q_s^* - зображення дійсного числа, сингулярна функція канторівського типу, циліндр, множина рівня, фрактальна множина.

Abstract. The article deals with the analysis of a continual class of continuous functions, depending on the set of parameters, with complicated local behavior: singular monotonic, singular non-monotonic, nowhere monotonic and other functions. Sufficient conditions of belonging of functions to each of the above mentioned types are proved. Their structural properties, sets of peculiarities (in particular, sets of maxima and minima), level sets, etc. are studied.

Keywords: singular function, nowhere differentiable function, Q_s^*-representation of real number, Cantor singular function, cylinder, level set, fractal set.

Вступ

Під функцією зі складною локальною поведінкою ми розуміємо, в першу чергу, неперервну функцію з нескінченною множиною різного роду особливостей. До таких відносяться ніде не монотонні та сингулярні функції.

Нагадаємо, що неперервна функція називається *сингулярною*, якщо її похідна майже скрізь в розумінні міри Лебега дорівнює нулю. Серед сингулярних функцій існують монотонні, строго монотонні, немонотонні і ніде не монотонні [10].

Неперервна функція називається *ніде не монотонною*, якщо вона не має жодного, як завгодно малого, проміжка монотонності. Кожна ніде не диференційовна функція є ніде не монотонною, але не кожна ніде не монотонна функція є ніде не диференційовною, хоча значна їх частина такими є.

Цікаво, що ці два класи, на перший погляд, далеких за своїми властивостями функцій, можуть утворювати один клас функцій, залежних від набору параметрів [14].

У даній роботі ми, використовуючи так зване Q_s^*-зображення [1] чисел $x \in [0,1]$, яке є кодуванням числа засобами скінченного алфавіту $A = \{0, 1, \ldots, s-1\}$ і узагальненням s-кового та Q_s-зображення дійсних чисел, конструюємо новий клас неперервних функцій з неоднорідною локальною поведінкою, узагальнюємо і доповнюємо результати робіт [3], [14]. Переважна більшість функцій означеного класу є сингулярними або ніде не монотонними.

1. Q_s^*-ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

Нехай $1 < s$ — фіксоване натуральне число, $A_s = \{0, 1, \ldots, s-1\}$ — алфавіт s-кової системи числення, $Q^* = \|q_{ij}\|$ — нескінченна стохастична матриця, $j \in N$, $i \in A_s$ така, що має властивості:

1. $q_{ij} > 0 \ \forall j \in N, \forall i \in A_s$;
2. $q_{0j} + q_{1j} + \ldots + q_{[s-1]j} = 1$;
3. $\prod\limits_{j=1}^{\infty} \max\{q_{0j}, q_{1j}, \ldots, q_{[s-1]j}\} = 0$.

Теорема 1. [1] *Для будь-якого $x \in [0,1]$ існує послідовність (α_k), $\alpha_k = \alpha_k(x) \in A_s$, така, що*

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j} \right], \tag{1}$$

де $\beta_{0j} = 0$, $\beta_{ij} = \sum\limits_{k=0}^{i-1} q_{kj}$, $i \in A_s \setminus \{0\}$, $j \in N$.

Подання числа x у вигляді ряду (1) називається його Q_s^*-*представленням*, а його символічний запис

$$x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots} \tag{2}$$

— Q_s^*-*зображенням.*

При цьому $\alpha_j(x)$ називається j-тим Q_s^*-*символом (цифрою)* зображення числа x.

Поняття j-го Q_s^* - символа числа x, взагалі кажучи, не є коректно означеним, оскільки деякі числа мають два Q_s^*-зображення. Це числа виду

$$\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(0)} = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](s-1)},$$

де круглі дужки символізують період.

Такі числа називають Q_s^*-*раціональними*, а числа, що не містять період (0) або $(s-1)$, мають єдине Q_s^*-зображення і називаються Q_s^*-*ірраціональними.*

В геометрії, яка вивчає зображення чисел, важливим є поняття циліндра. Нагадаємо його.

Означення **1.** Нехай $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ - фіксований набір символів, $c_i \in A_s$. *Циліндром рангу m з основою* $c_1c_2\dots c_m$ називається множина $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\dots c_m}$, яка складається з усіх точок $x \in [0, 1]$, які мають Q_s^*-зображення таке, що $\alpha_j(x) = c_j, j = \overline{1, m}$.

Циліндри мають наступні властивості:

1) Циліндр $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\dots c_m}$ є відрізком з кінцями

$a = \Delta^{Q_s^*}_{c_1\dots c_m(0)} = \beta_{c_1 1} + \sum\limits_{k=2}^{m}\left[\beta_{c_k k}\prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{c_j j}\right]$, $b = \Delta^{Q_s^*}_{c_1\dots c_m(s-1)} = a + \prod\limits_{i=1}^{m} q_{c_i i}$;

2)$\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\dots c_m} = \bigcup\limits_{i=0}^{s-1} \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\dots c_m i}$;

3) $|\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\dots c_m}| = \prod\limits_{i=1}^{m} q_{c_i i}$;

4) $\max \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\dots c_m i} = \min \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\dots c_m [i+1]}, i = \overline{0, s-2}$;

5) $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\dots c_m} = x = \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\dots c_m\dots} \in [0, 1]$ для довільної послідовності $(c_i), c_i \in A_S$.

Якщо для всіх $i \in A_s$, $j \in N$ виконується $q_{ij} = q_i$, тобто всі стовпці матриці $\|q_{ij}\|$ однакові, то Q_s^*-зображення називається Q_s-*зображенням*, якщо ж при цьому $q_i = \frac{1}{s}$,то Q_s-зображення є звичайним *s-ковим зображенням.*

2. Означення одного класу неперервних функцій зі складною локальною будовою

Нехай $(a_0, a_1, \dots, a_{s-1})$ — заданий набір дійсних чисел таких, що:

1. $a_0 + a_1 + \ldots + a_{s-1} = 1$,
2. $|a_i| < 1$,
3. $\gamma_0 \equiv 0, 0 < \gamma_i \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_{i-1} < 1$ для всіх $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$.

Приклади наборів, що задовольняють умови 1 - 3:

1) $s = 3,\ a_0 = \dfrac{2}{5},\ a_1 = \dfrac{1}{5},\ a_2 = \dfrac{2}{5}$,

$\gamma_0 = 0,\ \gamma_1 = \dfrac{2}{5},\ \gamma_2 = \dfrac{3}{5},\ \gamma_3 = 1.$

2) $s = 4,\ a_0 = \dfrac{5}{7},\ a_1 = \dfrac{-4}{7},\ a_2 = \dfrac{5}{7},\ a_3 = \dfrac{1}{7}$,

$\gamma_0 = 0,\ \gamma_1 = \dfrac{5}{7},\ \gamma_2 = \dfrac{1}{7},\ \gamma_3 = \dfrac{6}{7},\ \gamma_4 = 1.$

3) $s = 5,\ a_0 = \dfrac{4}{5},\ a_1 = \dfrac{-3}{5},\ a_2 = \dfrac{2}{5},\ a_3 = 0,\ a_4 = \dfrac{2}{5}$,

$\gamma_0 = 0,\ \gamma_1 = \dfrac{4}{5},\ \gamma_2 = \dfrac{1}{5},\ \gamma_3 = \dfrac{3}{5},\ \gamma_4 = \dfrac{3}{5},\ \gamma_5 = 1.$

Розглядається функція f, означена рівністю

$$f(x) = \gamma_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\gamma_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} a_{\alpha_j(x)} \right], \tag{3}$$

де $\alpha_k(x)$ – k-ий символ Q_s^* - зображення числа x.

Доведемо, що функція визначена коректно.

Коректність визначення функції $f(x)$ рівністю (3) могла б порушитись в Q_s^* - раціональних точках. Покажемо, що це не так. З цією метою для числа

$$x \equiv \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)} = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_k-1](s-1)}, \alpha_k \neq 0$$

розглянемо різницю значень функції від двох різних зображень

$$\delta = f(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)}) - f(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_k-1](s-1)}) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{k-1} a_{\alpha_j}\right) \left(\gamma_{\alpha_k} - \gamma_{\alpha_k-1} - \gamma_{s-1} a_{\alpha_k-1} \left(1 + a_{s-1} + a_{s-1}^2 + \ldots + a_{s-1}^k \ldots\right)\right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{k-1} a_{\alpha_j}\right) (\gamma_{\alpha_k} - (\gamma_{\alpha_k-1} + a_{\alpha_k-1})) = 0.$$

Отже, відповідні значення співпадають і функція означена коректно.

Очевидно, що

$$f(0) = f(\Delta^{Q_s^*}_{(0)}) = 0 + \sum_{k=2}^{\infty} 0 \cdot a_0^{k-1} = 0,$$

$$f(1) = (\Delta^{Q_s^*}_{(s-1)}) = \beta_{s-1} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{s-1} a_{s-1}^{k-1} = \beta_{s-1} \cdot \frac{1}{1 - a_{s-1}} = 1,$$

$$f(\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m(0)}) = \gamma_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} \left(\gamma_{c_k} \prod_{i=1}^{k-1} a_{c_i}\right).$$

3. Неперервність та множина значень функції

Лема 1. *Значення функції f належить* $[0, 1]$.

Доведення. Відомо, що $f(0) = f(\Delta^{Q_s^*}_{(0)}) = 0$, $f(1) = (\Delta^{Q_s^*}_{(s-1)}) = 1$.

Представимо значення функції $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = S_m(x) + \left(\prod_{j=1}^{m} a_{\alpha_j(x)}\right) \left(S_{\alpha_{m+1}(x)} + \sum_{k=m+2}^{\infty} \left(\gamma_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} a_{\alpha_j(x)}\right)\right),$$

де

$$S_m(x) = \gamma_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=1}^{m} \left(\gamma_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} a_{\alpha_j(x)}\right)$$

— частинна сума ряду (3). Доведемо, що $0 \leq S_m < 1$ для довільного $m \in N$ і набору цифр $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$. Скористаємось методом математичної індукції.

Для $m = 1$ очевидно, що $S_1 = \gamma_{\alpha_1} \in [0, 1)$ згідно з початковою умовою 3.

Розглянемо $S_2 = \gamma_{\alpha_1} + \gamma_{\alpha_2} a_{\alpha_1}$.

Якщо $\alpha_1 = 0$, то $S_2 = \gamma_0 + \gamma_{\alpha_2} a_0 = \gamma_{\alpha_2} a_0$ і

$$0 < S_2 = \gamma_{\alpha_2} a_0 < \gamma_{\alpha_2} < 1.$$

Нехай $\alpha_1 > 0$. Якщо $a_{\alpha_1} > 0$, то

$$0 \leq \gamma_{\alpha_1} < S_2 = \gamma_{\alpha_1} + \gamma_{\alpha_2} a_{\alpha_1} < \gamma_{\alpha_1} + a_{\alpha_1} = \gamma_{\alpha_1+1} < 1.$$

Якщо $a_{\alpha_1} < 0$, то

$$0 \leq \gamma_{\alpha_1+1} = \gamma_{\alpha_1} + a_{\alpha_1} < S_2 = \gamma_{\alpha_1} + \gamma_{\alpha_2} a_{\alpha_1} < \gamma_{\alpha_1} < 1.$$

Отже,

$$0 \leq S_2 < 1.$$

Припустимо, що $0 \leq S_k < 1$ для довільної (α_n) і розглянемо S_{k+1}.

Оскільки

$$S_{k+1} = \gamma_{\alpha_1} + a_{\alpha_1} \left(\gamma_{\alpha_2} + \sum_{i=3}^{k+1} \left(\gamma_{\alpha_i} \prod_{j=1}^{i-1} a_{\alpha_j} \right) \right) = \gamma_{\alpha_1} + a_{\alpha_1} S'_k,$$

де S'_k — частинна сума ряду (3) для послідовності $(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_i, \ldots)$, то за припущенням $0 \leq S'_k < 1$. Тому при $a_{\alpha_1} > 0$

$$0 \leq \gamma_{\alpha_1} < S_{k+1} < \gamma_{\alpha_1} + a_{\alpha_1} = \gamma_{\alpha_1+1} < 1,$$

а при $a_{\alpha_1} < 0$

$$0 \leq \gamma_{\alpha_1+1} = \gamma_{\alpha_1} + a_{\alpha_1} < S_{k+1} < \gamma_{\alpha_1} < 1.$$

Отже, $0 \leq S_{k+1} < 1$ для довільної послідовності (α_n).

Таким чином, для довільного $x \in [0, 1]$ і натурального m виконується $0 \leq S_m < 1$, а тому $0 \leq f(x) = \lim\limits_{m \to \infty} S_m \leq 1$.

$\square$

Теорема 2. *Функція f є неперервною в кожній точці відрізка* $[0, 1]$.

Доведення. Нехай x_0 – довільна точка відрізка [0,1]. Для доведення неперервності f в точці x_0 досить показати, що

$$\lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0.$$

1. Спочатку розглянемо випадок, коли x_0 – Q_s^* - ірраціональна точка. Для довільного $x \in [0,1]$, $x \neq x_0$, існує $m = m(x)$ таке, що

$$\begin{cases} \alpha_i(x) = \alpha_i(x_0), \quad i = \overline{1, m-1} \\ \alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0) \end{cases}$$

$$f(x) - f(x_0) = \gamma_{\alpha_m(x)} \prod_{j=1}^{m-1} a_{\alpha_j(x_0)} + \gamma_{\alpha_{m+1}(x)} \left(\prod_{j=1}^{m-1} a_{\alpha_j(x_0)} \right) a_{\alpha_m(x)} +$$

$$+ \ldots + \gamma_{\alpha_{m+k}(x)} \left(\prod_{j=1}^{m-1} a_{\alpha_j(x_0)} \right) \prod_{i=1}^{k-1} a_{\alpha_{j+i}(x)} + \ldots -$$

$$- \left(\gamma_{\alpha_m(x_0)} \prod_{j=1}^{m-1} a_{\alpha_j(x_0)} + \gamma_{\alpha_{m+1}(x_0)} \left(\prod_{j=1}^{m-1} a_{\alpha_j(x_0)} \right) a_{\alpha_m(x_0)} \ldots \right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{m-1} a_{\alpha_j(x_0)} \right) (\gamma_{\alpha_m(x)} + \gamma_{\alpha_{m+1}(x)} a_{\alpha_m(x)} + \ldots -$$

$$-(\gamma_{\alpha_m(x_0)} + \gamma_{\alpha_{m+1}(x_0)} a_{\alpha_m(x_0)} + \ldots)) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{m-1} a_{\alpha_j(x_0)} \right) (C_1 - C_2) \to 0 \text{ при } m \to \infty,$$

де $C_1 = \gamma_{\alpha_m(x)} + \gamma_{\alpha_{m+1}(x)} a_{\alpha_m(x)} + \ldots < 1$, $C_2 = \gamma_{\alpha_m(x_0)} + \gamma_{\alpha_{m+1}(x_0)} a_{\alpha_m(x_0)} + \ldots < 1$.

Отже,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

і функція $f(x)$ є неперервною в точці x_0 за означенням.

2. У випадку, коли x_0 - Q_s^* - раціональна точка, тобто

$$x_0 = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)(0)} = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots[\alpha_k(x)-1](s-1)},$$

можна скористатись міркуваннями з пункту 1, але при розгляді ситуації, коли x прямує до x_0 зліва, досить скористатися другим зображенням числа x_0, тобто з періодом $(s-1)$, а коли x прямує до x_0 справа — першим, тобто з періодом (0). □

Наслідок 1. *Множиною значень функції є відрізок* $[0,1]$.

4. Умови монотонності, строгої монотонності, немонотонності та ніде не монотонності

Лема 2. *Приріст* $\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right)$ *функції* f *на циліндрі* $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$, *тобто*

$$\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right) \equiv f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(s-1)}\right) - f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(0)}\right),$$

обчислюється за формулою

$$\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right) = \prod_{i=1}^{m} a_{c_i}.$$

Доведення. Використовуючи вираз (3) значення функції $f(x)$, маємо:

$$\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right) = f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(s-1)}\right) - f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(0)}\right)$$
$$= \left(\prod_{i=1}^{m} a_{c_i}\right)\left(\gamma_{s-1} - \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{s-1} a_{s-1}^k\right) = \prod_{i=1}^{m} a_{c_i}.$$

□

Наслідок 2. *Функція* $f(x)$ *є сталою на циліндрі* $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ *тоді і тільки тоді, коли існує* $a_{c_k} = 0$ *при деякому* $k \leqslant m$.

Наслідок 3. *Якщо всі* $a_i \geq 0$, $i = \overline{0, s-1}$, *то функція* $f(x)$ *є неспадною.*

Теорема 3. *Неперервна функція* $f(x)$ *на [0,1] є ніде не монотонною, якщо* $\prod_{i=0}^{s-1} a_i \neq 0$ *і серед чисел* $a_0, a_1, \ldots a_{s-1}$ *знайдеться* $a_i < 0$.

Доведення. Згідно наслідку 2 функція f не має проміжків сталості.

Припустимо, що при виконанні умов теореми знайдеться інтервал $(a,b) \subset [0,1]$ монотонності функції f. Але очевидно, що існує циліндр $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$, який повністю належить (a,b), а отже, є проміжком монотонності f.

Оскільки $a_0a_1\ldots a_{s-1} \neq 0$, то згідно з попередньою лемою

$$\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right) = \prod_{i=1}^{m} a_{c_i} \neq 0$$

і $\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m0}\right) \cdot \mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_mi}\right) = \left(\prod_{i=1}^{m} a_{c_i}\right)^2 \cdot a_0 \cdot a_i < 0$, тобто на одному з циліндрів $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m0}$ або $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_mi}$ функція має додатний, а на іншому — від'ємний приріст.А це суперечить її монотонності на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$, що і доводить теорему.

□

5. Екстремуми функції

Теорема 4. *1. Якщо $a_i a_{i+1} < 0$ для деякого i, то кожна точка виду $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i(0)}$ є точкою екстремуму функції f, причому:*

- *точкою максимуму, якщо $D_m a_i > 0$,*
- *точкою мінімуму, якщо $D_m a_i < 0$, де $D_m = \prod\limits_{j=1}^{m} a_{c_j} \neq 0$ - приріст функції на циліндрі.*

2. Якщо $a_i a_{i+1} \geq 0$, то жодна з точок виду $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i(0)}$ не є точкою екстремуму функції f.

Доведення. 1. Нехай $D_m = \prod\limits_{j=1}^{m} a_{c_j} \neq 0$ - приріст функції на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$. Розглянемо можливі випадки.

1.1. Нехай $D_m > 0$.

Якщо $a_{i+1} > 0$, то на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$ функція має додатний приріст, а на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}$, який лежить лівіше, від'ємний. Тому спільний кінець цих циліндрів — точка $x_i \equiv \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i(0)}$ є точкою максимуму.

Якщо $a_{i+1} < 0$, то на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$ функція має від'ємний приріст, а на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}$ — додатний. Отже, точка x_i є точкою мінімуму.

1.2. Нехай $D_m < 0$.

Якщо $a_{i+1} > 0$, то на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$ функція має від'ємний приріст, а на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}$ — додатний. Отже, точка x_i є точкою мінімуму.

Якщо $a_{i+1} < 0$, то на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$ функція має додатний приріст, а на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}$ — від'ємний. Отже, точка x_i є точкою максимуму.

2. Якщо $a_i a_{i+1} = 0$, то згідно наслідку 2 принаймні на одному з циліндрів $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}$ або $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$ функція є постійною, а отже, точка x_i не є точкою екстремуму.

Якщо $a_i a_{i+1} > 0$, то на обох циліндрах функція f має приріст однакового знаку, а отже, точка x_i не є точкою екстремуму, оскільки для одного циліндра вона є точкою максимуму, а для другого — точкою мінімуму. □

Теорема 5. *Функція f на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ набуває найбільшого і найменшого значення на його кінцях. Причому, якщо*

$$D_m \equiv \prod_{i=1}^{m} a_{c_i} \neq 0, \quad y_m = \gamma_{c_1} + \sum_{k=2}^{m}\left(\gamma_{c_k}\prod_{i=1}^{k-1} a_{c_i}\right),$$

то при $D_m > 0$

$$\max f(x) = f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m (s-1)}\right) = y_m + D_m,$$

$$\min f(x) = f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m (0)}\right) = y_m,$$

а при $D_m < 0$

$$\max f(x) = f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m (0)}\right) = y_m,$$

$$\min f(x) = f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m (s-1)}\right) = y_m + D_m.$$

Доведення. Нагадаємо, що циліндр $\Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ є відрізком з кінцями $a = \Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m (0)}$ і $b = \Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m (s-1)}$.

Значення функції f в точці $x \in \Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m}$ виражається

$$f(x) = y_m + D_m \cdot M,$$

де $y_m = \gamma_{c_1} + \sum\limits_{k=2}^{m}\left(\gamma_{c_k} \prod\limits_{i=1}^{k-1} a_{c_i}\right), \quad D_m = \prod\limits_{i=1}^{m} a_{c_i},$

$$M = \gamma_{\alpha_{m+1}(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\gamma_{\alpha_{m+k}(x)} \prod_{j=1}^{k-1} a_{\alpha_{m+j}(x)}\right) = f(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots\alpha_{m+n}\ldots}).$$

Якщо $\alpha_{m+j} = 0$ для всіх $j \in N$, то $M = 0$, а якщо $\alpha_{m+j} = s-1$ для всіх $j \in N$, то $M = 1$.

Тоді, якщо $D_m > 0$, то

$$\max_{x \in \Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m}} f(x) = f(\Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m (s-1)}) = y_m + D_m,$$

$$\min_{x \in \Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m}} f(x) = f(\Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m (0)}) = y_m.$$

Якщо ж $D_m < 0$, то

$$\max_{x \in \Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m}} f(x) = f(\Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m (0)}) = y_m,$$

$$\min_{x \in \Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m}} f(x) = f(\Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m (s-1)}) = y_m + D_m.$$

□

6. Сингулярність канторівського типу

Означення **2.** *Спектром (множиною нестабільності)* функції f називається множина S_f всіх точок x таких, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ в ε - околі $O_\varepsilon(x)$ точки x знайдуться x_1, x_2 такі, що $f(x_1) \neq f(x_2)$, тобто

$$S_f = \{x : \forall\varepsilon > 0 \ \exists \ x_1, x_2 \text{ такі, що } |x - x_1| < \varepsilon, |x - x_2| < \varepsilon \text{ і } f(x_1) \neq f(x_2)\}.$$

Означення **3.** Неперервна функція називається *сингулярною функцією канторівського типу*, якщо її множина несталості (нестабільності) є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

Лема 3. [7] *Міра Лебега множини* $C = C[Q_s^*, V_n] \equiv \{x : x \in [0,1], \alpha_n(x) \in V \subset N\}$ *обчислюється за формулою*

$$\lambda(C) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - W_k), \quad \text{де} \ \ W_k = \sum_{i:a_i=0} q_{ik}.$$

Лема 4. *Спектром* S_f *функції* f *є множина*

$$C = C[Q_s^*, V], \ \text{де} \ V = \{v : a_v \neq 0\}.$$

Доведення. 1. Спочатку покажемо, що $S_f \subset C$. Нехай $x \in S_f$, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують $x_1 \in O_\varepsilon(x) \ni x_2$ такі, що

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

Припустимо, що x не належить C. Тоді x належить одному із суміжних з C інтервалів, а тому існує циліндричний інтервал $\nabla^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_m(x)}$, який містить x такий, що

$$\nabla^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_m(x)} \bigcap C = \varnothing,$$

тобто повністю належить суміжному з C інтервалу, якому належить x.

Але згідно з означенням множини C і наслідком 2 з леми 2 цей інтервал є інтервалом стабільності f, а отже, для будь-яких x_1 і x_2 з цього інтервалу $f(x_1) = f(x_2)$. Тому існує ε - окіл x, який повністю належить цьому інтервалу, який є проміжком стабільності. Отримане протиріччя доводить, що $S_f \subset C$.

2. Покажемо, що $C \subset S_f$. Нехай $x \in C$, тоді циліндр $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_m(x)}$ не є проміжком стабільності функції f при кожному $m \in N$.

Розглянемо будь-який ε - окіл точки x такий, що $O_\varepsilon(x) \subset (0,1)$. Легко вказати циліндр

$$\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_m(x)} \subset O_\varepsilon(x).$$

З вище зробленого зауваження випливає, що існують x_1 і x_2, які належать $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_m(x)}$ такі, що $f(x_1) \neq f(x_2)$. А отже, $x \in S_f$. Отже, $C \subset S_f$. $\square$

Теорема 6. *Для того, щоб функція f була сингулярною функцією канторівського типу, необхідно і достатньо, щоб множина $C = C[Q_s^*, V]$, $V = \{v : a_v \neq 0\}$, мала нульову міру Лебега, тобто $\sum\limits_{k=1}^{\infty} W_k = \infty$, де $W_k = \sum\limits_{i:a_i=0} q_{ik}$.*

Доведення. Дане твердження випливає з означення сингулярної функції канторівського типу і двох попередніх лем 3, 4.

Справді, якщо f – сингулярна функція канторівського типу, то $\lambda(S_f) = 0$, тоді згідно з лемою 4 $\lambda(C) = 0$. Якщо $\lambda(C) = 0$, то $\lambda(S_f) = 0$. Тоді функція f є сингулярною функцією канторівського типу.

$\square$

7. Рівні функції

Означення **4.** Множиною рівня y_0 функції f називається множина

$$f^{-1}(y_0) = \{x : f(x) = y_0\}.$$

Якщо $a_n > 0$ для всіх $n \in N$, то f є неперервною строго зростаючою функцією. Тому кожен її рівень складається з однієї точки.

Якщо $a_n \geq 0$ для всіх $n \in N$, але існує $a_p = 0$, то рівень

$$y = \gamma_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} \left(\gamma_{c_k} \prod_{i=1}^{k-1} a_{c_i} \right) + \gamma_p \prod_{i=1}^{m} a_{c_i}$$

містить циліндр $\Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$. У цьому випадку кожен рівень є або точкою, або відрізком (за рахунок неперервності функції).

Теорема 7. *Якщо серед членів послідовності (a_n) є від'ємні і Q_s^*-зображення числа $x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}$ має властивість*

$$a_{\alpha_i(x)} a_{\alpha_{i+1}(x)} < 0 \tag{4}$$

для нескінченної множини значень $i \in N$, то рівень $f^{-1}(y_0)$, де $y_0 = f(x)$, є зліченною множиною.

Доведення. З теореми 4 випливає, що прирости функції f на циліндрах $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_i(x)}$ рангу i та $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_i(x)\alpha_{i+1}(x)}$ рангу $i+1$ мають протилежні знаки. При цьому множиною значень функції f на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_i(x)}$ за теоремою 5 є відрізок, кінці якого є значеннями функції від кінців циліндра. Тому враховуючи неперервність функції, пряма $y = y_0$ перетинає графік f принаймні в двох точках, які належать циліндру $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_i(x)}$ і не належать циліндру $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_i(x)\alpha_{i+1}(x)}$.

Картина повториться для наступного значення i, для якого виконується умова (4). І так буде нескінченну кількість разів. Отже, рівень $f^{-1}(y_0)$ є нескінченною множиною. Континуальним він бути не може, оскільки множина локальних максимумів і мінімумів зліченна. Отже, $f^{-1}(y_0)$ – зліченна множина. $\square$

Література

[1] *Pratsiovytyi M., Vasylenko N.* Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation // International Journal of Math. Analysis, Vol.7, 2013. no. 61 – 67. — P. 3155 – 3169.

[2] *Salem R.* On some singular monotonic function which are strictly increasing // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — Vol.53, no.3. — P. 427-439.

[3] *Грубер П.М.* Геометрия чисел. / П.М. Грубер, К.Г. Леккеркеркер — Москва: Наука, 2008. — 727с.

[4] *Козырев С.Б.* О топологической густоте извивающихся функций // Мат. заметки. — 1983. — 33, N3. — С. 71 - 76 с.

[5] *Кравченко В.Ф., Масюк В.М.* Новый класс фрактальных функций в задачах анализа и синтеза антенн. Кн.3 // Современные методы аппроксимации в теории антенн. В 3-х книгах. – М.: ИПРЖР, 2002. — 72 с.

[6] *Лисовик Л.П.* О вещественных функциях задаваемых преобразователями / Л.П. Лисовик, О.Ю. Шкаравская // Кибернетика и системный анализ. — 1998. — С. 82 - 93.

[7] *Торбин Г.М., Працевитый Н.В.* Случайные величины с независимими Q^*-знаками // Случайные эволюции: теорет. и прикл. задачи. — Киев: 1992. — С. 95 - 104.

[8] *Титчмарш Е.* Теория функций / Е. Титчмарш // Москва: Наука, 1980. — 464 с.

[9] *Панасенко О.Б.* Фрактальні властивості одного класу однопараметричних неперервних недиференційовних функцій // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2006. — №7. — С. 160 - 167.

[10] *Працьовитий М.В.* Ніде не монотонні сингулярні функції // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2011. — №12. — С. 24 - 36.

[11] *Працьовитий М.В.* Фрактальні властивості однієї неперервної ніде не диференційованої функції // Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. — 2002. — №3. — С. 351 - 362.

[12] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — К.: Видавництво НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. – 296 с.

[13] *Працьовитий М.В., Калашніков А.В.* Про один клас неперервних функцій зі складною локальною будовою, більшість з яких сингулярні або недиференційовні // Труды ИПММ НАН Украины, 2011. – Т. 23. — С. 180 - 191.

[14] *Працьовитий М.В., Калашніков А.В.* Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q-зображенням чисел. // Укр. Мат. Журнал. — 2013. — Т.65, №3. — С. 381 - 393.

[15] *Працьовитий М.В., Свинчук О.В.* Немонотонні сингулярні функції // Чотирнадцята міжнародна конференція імені академіка М.Кравчука, 19-21 квітня, 2012 р., м. Київ: Матеріали конф. Т.2. Алгебра. Геометрія. Математичний та чисельний аналіз. — К.: НТУУ КПІ, 2012. – С. 203.