Листопад В.В.
Національний університет харчових технологій

Про нелінійне програмування

На практиці лінійні задачі швидше виняток, ніж правило, тому що досить часто залежності між величинами (ціни, процентні ставки, тарифи, об'єми товарів чи інвестицій) не є пропорційними і тому загальний результат описується нелінійними співвідношеннями. Нелінійність – це досить розповсюджена, навіть природна ситуація. Її спричинюють складні взаємозв'язки між величинами, що особливо є характерно для технічних, фінансових, біологічних, хімічних та інших процесів. Тому врахування в дослідженні будь-якого процесу нелінійності його складників суттєво розширює можливості отримання бажаного результату. Проте дослідники мусять мати справу з підвищеної складності громіздкими обчисленнями.

Лінійні моделі – це вимушена "ідеалізація" певної реальної ситуації, коли незалежні змінні, від яких залежить результат, за відповідних умов чи коротких періодів фіксуються як сталі величин. Отримавши результат, за допомогою лінійної моделі дослідники переходять до врахування реального стану ситуації відповідно до формування нелінійних моделей. В лінійних задачах припускають, що прибуток (собівартість, капітальні витрати) на одиницю реалізованої продукції, а також норми витрат ресурсу на виготовлення одиниці продукції, є величинами, що пропорційно (лінійно) залежать від об'єму виробництва. Таке припущення є занадто спрощеним і застосовується на певний досить короткий проміжок часу.

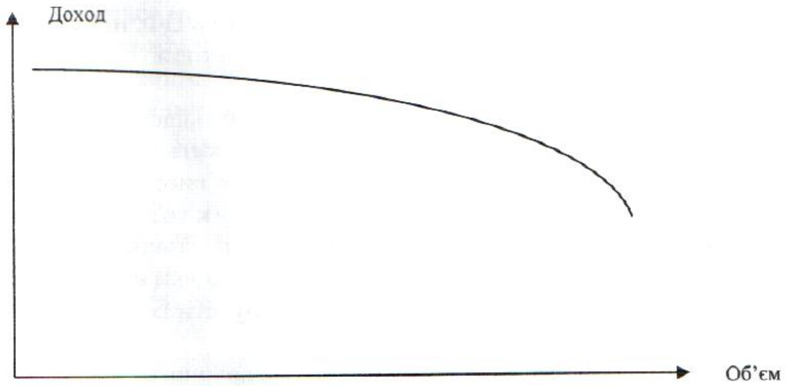


Рис. 1. Нелінійна залежність Дохід=f(О'бєм)

Зрозуміло, що розв'язування ряду економічних задач допускає такі математичні моделі, до яких невідомі або деяка їх частина входять нелінійно. Наприклад, нехай критерієм оптимальності є собівартість, і відповідно дохід, від реалізації одиниці виробленої продукції. Очевидно, що вони залежать від об'єму виробництва. Із збільшенням обсягу продукції собівартість її зменшується. Проте таке зменшення не безмежне. Настає такий момент, коли внутрішні витрати підприємства починають зростати (збільшуються витрати на перевезення, зберігання продукції тощо), що у свою чергу призводить до збільшення собівартості.

Крім того, якщо врахувати в моделях лінійного програмування інші можливі випадки, то ці моделі трансформуються також в нелінійні. Наприклад, припустивши, що в задачі про використання ресурсів обсяг реалізації впливає на прибуток, маємо цільову функцію з нелінійністю.

Отже, лінійні моделі можна вважати першим наближенням реальної задачі. У тих випадках, коли існує широкий вибір допустимих планів і уявлення про характер оптимального зв'язку не зовсім повне, лінійні моделі можуть бути неадекватними.

У більшості випадків нелінійність моделі обумовлюється, як правило, структурними співвідношеннями економічного процесу або непропорційністю зміни витрат, випуску продукції, показників якості тощо.

Наприклад, в транспортних задачах, що виникають на залізниці, в авто та авіаперевезеннях або в інтернет-торгівлі нелінійність пов'язана із залежністю витрат на доставку одиниці продукції від об'єму вантажу (чим важче, тим дорожче). В той же час, підприємства зацікавлені випускати продукцію великими партіями, бо чим більша серія, тим нижча собівартість продукції.У торгівлі ціна товару залежить від об'ємів продажу, спочатку вона трохи вища за номінальну, потім тримається певний час на номіналі, а далі поступово знижується до певної граничної ціни, щоб дати можливість оновити асортимент.

Отже, в нелінійних моделях більш відповідно відображаються реальні ситуації, що дає можливість отримати ефективніші розв'язки.

Все вище окреслене вимагає вводити нелінійні співвідношення як в цільову функцію (ЦФ), так і в обмеження для розв'язування відповідних задач.На відміну від задач лінійного програмування, для розв'язування нелінійних задач не існує універсального методу. Це пов'язано з тим, що нелінійні задачі не мають, як правило, спільних властивостей, які б могли бути покладені в основу такого методу. Для кожного класу задач нелінійного програмування розроблено спеціальні методи. їх порівняння ускладнюється тим, що певний метод може бути досить корисним для розв'язування задач одного класу і зовсім непридатним для розв'язування задач інших класів.

Усі задачі та їх моделі, що не відповідають властивостям ЛП, є задачами простого класу нелінійного програмування (НЛП). До таких задач відносяться:

- ″майже лінійні″(які видаються досить близькими до ЛП, скажімо моделі цілочисельного програмування (ЦЛП), де ЦФ і обмеження лінійні, лише область допустимих розв'язків (ОДР) відрізняється від множини дійсних чисел;
- ″частково-нелінійні″, у яких ЦФ нелінійна при лінійних обмеженнях, або навпаки;
- ″повністю нелінійні″, у яких ЦФ та обмеження нелінійні, тому для них потрібно створювати специфічні методи.

Нелінійні моделі класифікуються залежно від складності отримання глобального оптимуму – все залежить від функціональних властивостей ЦФ та обмежень (ОДР). Тому серед них виокремлені ″гарні″або″приємні″ для розв'язання задачі та відповідні моделі опуклого програмування (ОП) . Всередині цього класу є різновиди: квадратичне (КП) та сепарабельне програмування (СП), тому, що завдяки специфічним властивостям відповідних функцій (ЦФ, обмежень) розв'язувати їх не набагато важче, ніж задачі ЛП.

Для розв'язання задач НЛП симплекс-метод не використовується, тому, що точка екстремуму знаходиться на обмежуючій множині точок чи всередині ОДР, чим ускладнюється її пошук. Варіанти розташування точки екстремуму для задач НЛП, види ЦФ та ОДР проілюстровано на Рис. 2.

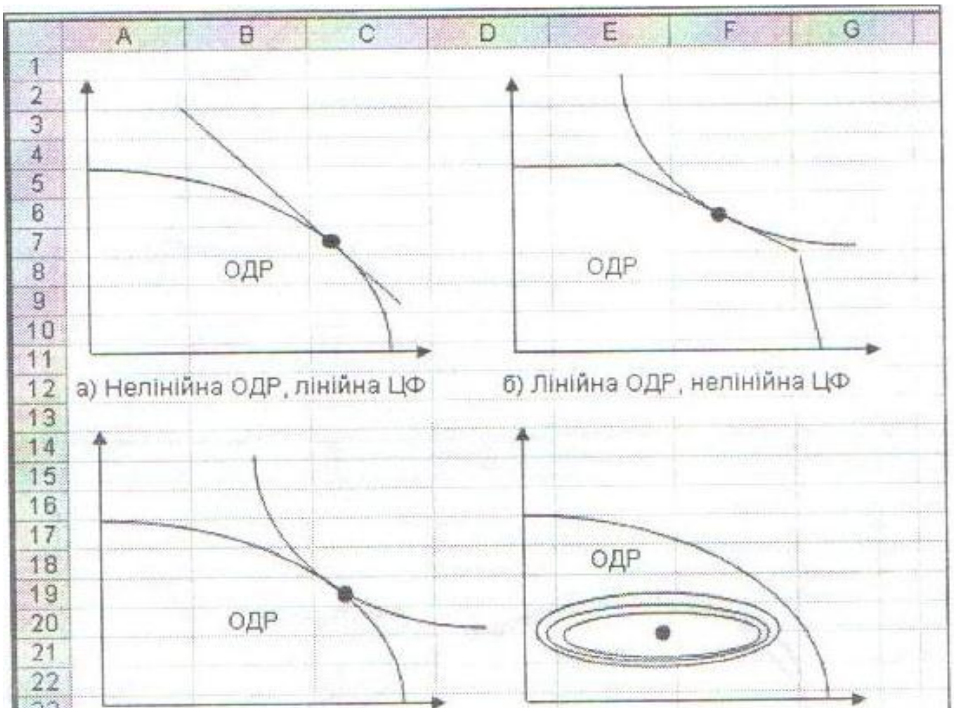


Рис. 2. Види ЦФ,ОДР та варіанти розташування точки оптимуму.

Для пошуку оптимуму нелінійної задачі в Excel використовують вдосконалений метод Флетчера-Рівса (1964, generalizedreducedgradient, GRD) ітераційного типу, розроблений відомим математиком ([2, с. 258]) Л. Лесдоном для програми-надбудови Excel Solver.

Ідея градієнтного методу пошуку екстремуму (запропонована в 1847 р. Коші): вибирається початкова точка (початкове наближення) і обчислюється градієнт, за яким визначається крок і напрям руху до наступної точки для покращення значення ЦФ. У наступних точках ця процедура повторюється, поки градієнт не стане нульовим, що свідчить про досягнення екстремуму. Удосконалення градієнтних методів полягає в прискоренні збіжності ітераційного обчислювального процесу і базується на врахуванні властивостей функції. Базовим серед градієнтних методів пошуку екстремуму нелінійної функції є метод Ньютона. Для квадратичної функції в такій модифікації застосовує другі похідні для оцінювання перших похідних (метод Ньютона-Рафсона).

Нелінійна задача оптимізації є узагальненою задачею математичного програмування (МП), тому, що всі інші задачі, в тому числі задачі ЛП, є частковими варіантами цієї загальної задачі (Рис. 3).

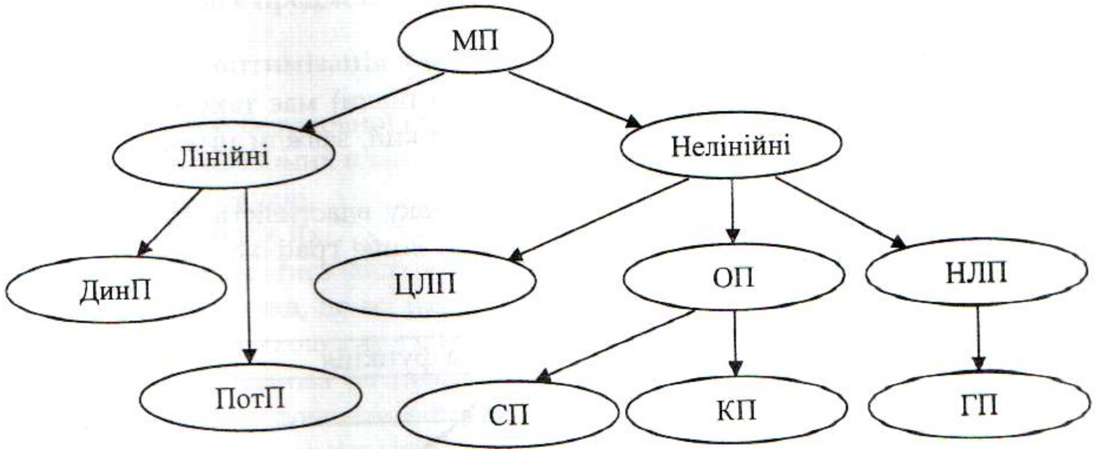


Рис. 3. Моделі математичного програмування

Всю множину нелінійних задач оптимізації з позицій отримання глобального оптимуму можна поділити на три класи відповідно до властивостей ЦФ та функцій-обмежень у порядку зростання складності:

I. Угнуті чи опуклі задачі квадратичного програмування (КП), де досягається глобальний екстремум.

II. Угнуті та опуклі задачі опуклого програмування (ОП), де досягається глобальний оптимум.

III. Задачі нелінійного програмування загального вигляду (НЛП, ГП) де досягається локальний оптимум, серед яких шукаємо глобальний оптимум.

Математична модель задачі НЛП:

I. Знайти план $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, такий, щоб

II. Досягався максимум (чи мінімум) цільової функції $C=f(x_1,x_2,...,x_n)\to\max(\min)$

III. За обмежень $\begin{cases} g_1(x_1,x_2,...,x_n)\le(=,\le)\,b_1 \\ \quad ... \\ g_m(x_1,x_2,...,x_n)\le(=,\le)\,b_m \end{cases}$

та граничних умов – всі $x_i\ge 0,\ j=1,...,n.$

Суть задачі оптимізації визначається за функцією *f*, через яку визначена ЦФ, та функціями $g_i,\ i=1,...,m$, через які задаються обмеження на невідомі $x_j,\ j=1,...,n$. Зокрема, якщо це лінійні функції, маємо звичайну задачу ЛП.

Розглянемо деякі задачі опуклого програмування (ОП). В ОП розрізняють:

- задачі безумовної опуклої оптимізації (на необмеженій опуклій множині), класичні екстремальні задачі, що вивчаються в курсі математичного аналізу,
- задачі умовної опуклої оптимізації (на замкнутих опуклих множинах), що є предметом суто опуклого програмування.

Безумовна оптимізація. Метод найменших квадратів. Особливістю безумовної оптимізації є відсутність обмежень та граничних умов для значень аргументів.

Постановка задачі.

Задана функція $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ від n аргументів. Знайти її екстремум (мінімум чи максимум), використовуючи частинні похідні.

Відомо, що точка, де всі перші частинні похідні дорівнюють нулю, називається стаціонарною точкою, саме в ній знаходиться локальний екстремум, якщо він існує (це необхідна умова або критерій першого порядку). Не всі стаціонарні точки є точками оптимуму, для з'ясування цього факту використовують достатні умови оптимальності (критерій другого порядку), що передбачає обчислення частинних похідних другого порядку для аналізу критичної точки.

На ПЕОМ за рівності нулю частинних похідних подається сигнал про завершення процесу пошуку екстремуму, чим забезпечується отримання локального оптимуму.

Для вгнутої чи опуклої функції стаціонарна точка є точкою глобального екстремуму (максимуму чи мінімуму). Саме за цим фактом виокремлюють моделі опуклого програмування (ОП) у відповідний клас математичного програмування.

Задача опуклої вниз оптимізації. Апроксимація табличної функції. Розглянемо досить поширену задачу апроксимації (наближення) експериментальних точок нелінійною функцією опуклого типу.

Приклад 1. Нехай в результаті експерименту отримано набір з 21 точки координати яких (x, y), побудовано ламану лінію, що нагадує квадратичну функцію ($y = a + bx + cx^2$).

Потрібно побудувати квадратичну функцію, значення якої y_T найменше відрізнялися б від експрементальних значень точкам $y_ф$. Згідно методу найменших квадратів, такою є функція, для якої сума квадратів відстаней між спостереженими і теоретичними значеннями функції буде мінімальною.

Математична модель

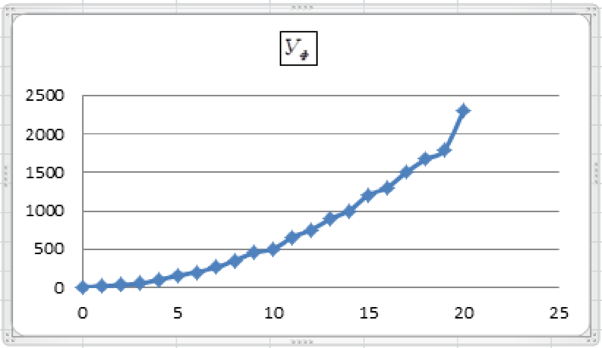
I. Знайти план X=(a, b, c) такий, щоб

II. Оцінка похибки за МНК у вигляді опуклої квадратичної функції

$$f(a,b,c) = 0{,}5 \cdot \left\{ (a + bx_1 + cx_1^2 - 7)^2 + (a + bx_2 + cx_2^2 - 12)^2 + \cdots + (a + bx_{21} + cx_{21}^2 - 2300)^2 \right\} \to \min$$

III. Задача без обмежень та граничних умов.

	A	B	C	D	E
1	a	b	c	$\boxed{\alpha}$	
2	0,0	20,9	0,9	2,5	
3	xi	$\boxed{y_ф}$	$\boxed{y_T}$	$\boxed{(y_ф - y_T)^2}$	АП
4	0	7	0,0	49,0	100%
5	1	15	21,9	47,2	-46%
6	2	35	47,2	149,5	-35%
7	3	50	77,7	765,0	-55%
8	4	100	114,3	205,6	-14%
9	5	150	158,3	68,3	-6%
10	6	200	210,3	106,4	-5%
11	7	260	271,3	127,2	-4%
12	8	350	341,9	65,8	2%
13	9	450	422,8	738,5	6%
14	10	500	514,7	216,8	-3%
15	11	650	618,2	1011,6	5%
16	12	750	733,8	262,1	2%
17	13	890	862,1	777,2	3%
18	14	1000	1003,7	13,4	0%
19	15	1200	1158,9	1686,4	3%
20	16	1300	1328,4	808,5	-2%
21	17	1500	1512,6	159,7	-1%
22	18	1666	1712,0	2116,4	-3%
23	19	1789	1927,0	19039,2	-8%
24	20	2300	2158,0	20161,3	6%
25				24287,6	



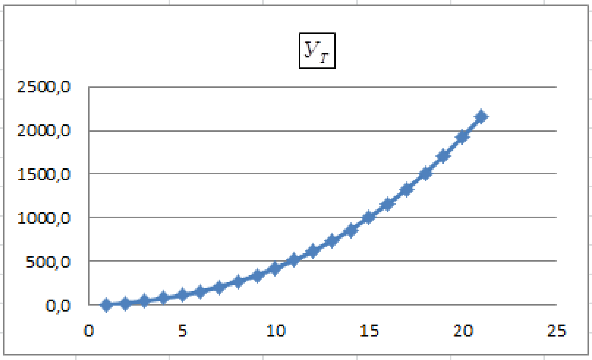


Рис. 4. Розрахунок параметрів та графікифактичної та теоретичної кривих

В результаті отримано функцію $y_T = 20{,}9x + 0{,}9x^2$, графік якої добре відтворює набір експериментальних точок. Отриману функцію можна використати в певній нелінійній моделі без проведення комп'ютерного експерименту для створення таблиці початкових даних.

Умовна оптимізація. Метод множників Лагранжа. Метод множників Лагранжа використовується для розв'язування нелінійної задачі оптимізації з m обмеженнями-рівняннями. Лагранж знайшов метод розв'язування таких задач шляхом переходу від задачі з обмеженнями (задачі на умовний екстремум) до задачі без обмежень (безумовний екстремум). За початковими даними складається *функція Лагранжа,* яка залежить від n невідомих x_i $(i = 1,\dots,n)$ і m множників Лагранжа λ_i за числом обмежень ($j = 1,\dots,m$). Після її диференціювання за n+m невідомими формується система з n+m рівнянь, через які визначається точка, де може існувати умовний екстремум.

Саме ідея використання множників Лагранжа для оцінювання правих частин обмежень на значення ЦФ у свій час надихнула майбутніх Нобелівських лауреатів Л.В. Канторовича знайти названі ним «розв'язуючі множники» або «об'єктивно обумовлені оцінки», а Т. Купманса – «тіньові ціни» для задач лінійного програмування ([1, с. 268]), щоб мати можливість оцінити, зокрема, обмеження на запас ресурсу в лінійній задачі оптимізації.

З економічної точки зору, отримані після розв'язування системи множники Лагранжа λ_i еквівалентні тіньовим цінам (двоїстим оцінкам) в лінійних задачах оптимізації – за ними визначається «цінність» правих частин відповідних обмежень (ресурсів, об'ємів, місткості)у вигляді швидкості зростання (спадання) значення ЦФ при зміні значень правих частин обмежень. Відмінність їх від тіньових цін – за множниками Лагранжа не оцінюють на скільки можна змінити значення правих частин обмежень для збереження структури плану, це роблять експериментальним шляхом.

Виникнення і розвиток нелінійного програмування дозволив застосовувати ідеї методу множників Лагранжа до економічних задач з обмеженнями-нерівностями (теорема Куна-Таккера [3, с. 235]), що реалізовано, зокрема, в програмі *Поиск решения*.

Задача опуклої оптимізації з обмеженням-рівнянням. Приклад 2. На двох машинах треба виготовити задану кількість продукту zтаким чином, щоб загальні витрати були мінімальними. Витрати для кожної машини задаються опуклою функцією $v(x) = a + bx + cx^{2,5}$. Отже невідомими є значення x_1 та x_2, за якими визначається кількість продукції, що буде виготовлена на відповідній машині.

Математична модель

I. Знайти такий план X=(x_1,x_2), щоб

II. ЦФ (загальні витрати) $C = v_1 + v_2 \to \min$, де $v_1 = a_1 + b_1 x + c_1 x^{2,5}$, $v_2 = a_2 + b_2 x + c_2 x^{2,5}$ - функції витрат для кожного зі способів

III. За обмеження (замовлення) $z = x_1 + x_2$, граничні умови $x_1, x_2 \geq 0$.

Це задача на умовний екстремум, де умовою-обмеженням є рівняння $z = x_1 + x_2$. За Лагранжем ця задача умовної оптимізації перетворюється на задачу безумовного екстремуму, яку далі розв'язують класичним методом (пошук першої похідної, прирівнювання її до нуля та перевірка достатніх умов екстремуму для отриманих стаціонарних точок). Суттєвим недоліком «ручного» методу є наявність великого об'єму ручної роботи, що не дозволяє реалізувати цю методику для задач великих розмірностей. Будемо вважати, що для експериментальних даних знайдено коефіцієнти (аналогічно прикладу 1) $a_1 = 2, b_1 = 5, c_1 = 8,\ a_2 = 500, b_2 = 8, c_2 = 0,4$. Як відомо, що сума двох опуклих функцій є опуклою функцією. Сама ідея розв'язування цієї задачі реалізована в сучасних машинних алгоритмах, що дає змогу на практиці розв'язувати практичні задачі нелінійної оптимізації.

	A	B	C	D	E	F
1	Метод множників Лагранжа					
2		A	B	C	D	E
3	1		X1	X2	Мн.Лагранж	z
4	2	ПЛАН1	12,0	88,0	833,9	100
5	3	a	2	500		
6	4	b	5	8		
7	5	c	8	0,4	ЦФ	
8	6	v	4032,3	30282,4	34314,7	
9	7		X1	X2	Мн.Лагранж	z
10	8	ПЛАН2	12	89	846,3	101
11	9	a	2	500		
12	10	b	5	8		
13	11	c	8	0,4	ЦФ	
14	12	v	4052,6	31102,6	35155,3	

Множники Лагранжа знаходяться у звіті *по устойчивости* функції *Поиск решения.* За планом X=(12,88) забезпечується мінімум витрат на виготовлення 100 од. продукту з величиною затрат 34314,7 гр.од. Множник Лагранжа 833,9 вказує на швидкість зростання ЦФ при збільшенні замовлення на 1, що й демонструє варіант 2 (де z=101).

Нелінійна задача ОП про оптимальний план виробництва. Це класична задача ЛП (задача Канторовича), де вважається, що дохід лінійно (пропорційно) залежить від об'єму випуску. У реальній ситуації ця залежність швидше нелінійна, функцію нелінійності можна визначити з допомогою експериментальних точок за МНК.

Приклад 3. Розв'язати задачу про оптимальний план виробництва, де прибуток від реалізації i-того продукту величиною p_i (на відміну від лінійної задачі, де $p_i=c_ix_i$) є нелінійною функцією, заданою експериментальною таблицею. Знайти аналітичний запис цієї функції у формі $p = cx + \Delta,\ \Delta = bx^s$, значення b таs потрібно визначити за МНК, а функцію використати для пошуку оптимального плану.

Визначена функція витрат у вигляді $p_i=c_ix_i - x_i^{0,7}$, де c_i – ціна, x_i – кількість i-того продукту. Друга складова (від'ємне число) показує, що загальний прибуток зменшується за рахунок певних додаткових витрат. Потрібно знайти відповідний план випуску продукції, значення ЦФ та двоїсті оцінки плану, а також зробити порівняльний аналіз лінійного та нелінійного планів. Для цього в існуючі математичну та табличну моделі потрібно внести відповідні зміни та знайти новий розв'язок.

Математична модель (нелінійний варіант)

I. Знайти план $X=(x_1,x_2)$ такий, щоб

II. ЦФ (прибуток) $\mathbf{P=0{,}99x_1+1{,}21x_2-x_1^{0,7}-x_2^{0,7}\to max}$

III. за обмежень

$$\begin{cases} 0{,}6x_1 + 0{,}5x_2 \le 120 \ (\textit{для борошна}) \\ 0{,}05x_1 + 009x_2 \le 75 \ (\textit{для жирів}) \\ 0{,}2x_1 + 0{,}6x_2 \le 50 \quad (\textit{для цукру}) \\ 2x_1 + 2{,}4x_2 \le 500 \quad (\textit{для фінансів}) \end{cases}$$

$\textit{та граничних умов}: x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

Таблична модель:

Лінійний випадок

Ресурси	Хліб	Батон	Запас	Використ	Залишок
Борошно	0,6	0,5	120	120	0
Жири	0,05	0,09	75	11,1	63,9
Цукор	0,2	0,6	50	50	0
Фінанси	2	2,4	500	416,9	83,1
Ціна	0,99	1,21	ЦФ=		
Прибуток	179	28	207		
План	181	23			

Нелінійний випадок

Ресурси	Хліб	Батон	Запас	Використан	Залишок
Борошно	0,6	0,5	120	120	0
Жири	0,05	0,09	75	11,1	63,9
Цукор	0,2	0,6	50	50	0
Фінанси	2	2,4	500	416,9	83,1
Ціна	0,99	1,21	ЦФ=		
Прибуток	141	19	160		
План	181	23			

Отже,структура плану,що залежить від ресурсів, збереглася,але прибуток зменшився. Таким чином,переходом від лінійної до нелінійної оптимізації (ЛП→НЛП) враховуються особливості реальних організаційних чи економічних процесів.

Аналіз методів дослідження розглянутих задач переконливо доводить, що нелінійні функції є більш ефективним механізмом наближення експериментальних даних до реальної ситуації економічного процесу.

Для розв'язання більшості задач доцільно застосовувати програму-оптимізатор *Поиск решения*.

Список використаних джерел

1. Кузьмичов А.І., Медведєв М.Г. Математичне програмування в Excel : Навч. посіб. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2005. – 320 с.
2. Лэсдон Л. Оптимизация больших систем. – М.: Наука, 1975.- 347 с.
3. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование. М.: Наука, 1984. – 392 с.
4. Химмельблау. Прикладное нелинейное моделирование. – М.: Мир, 1975. – 430 с.