

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
имени А. М. ГОРЬКОГО

---

---

В. Н. ЧИГАРЕВ

**РЕШЕНИЕ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ  
АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ  
НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ  
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

КИЕВ — 1963

517  
425

В диссертации исследуется вопрос о построении полинома с коэффициентами, зависящими от двух действительных параметров, реализующего при изменении параметров конформное отображение единичного круга на некоторый класс областей, а также его применение к задачам теории упругости.

Этот полином получен в виде:

$$\omega(\zeta) = C(\zeta + A\zeta^{n/2+1} + B\zeta^{n+1}) \quad (1)$$

где

$$A = \left(2\gamma - \frac{n-2}{n}\right) \frac{4}{n+2}; \quad B = \frac{2}{n(n+1)}; \quad n \text{ и } \gamma -$$

упомянутые параметры, изменяющиеся в пределах ( $n$  — целое четное):

$$8 \leq n \leq \infty; \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq \gamma \leq \frac{3}{2} - \frac{2}{n}. \quad (2)$$

Среди множества областей, образованных отображением круга и кольца функцией (1) при различных значениях  $n$  и  $\gamma$  содержатся близкие к многоугольнику с любым числом сторон, к многоугольнику с отверстием, близким к круговому и т. п., решение задачи кручения для которых имеет техническое значение.

Использование конформного отображения (1) в задачах теории упругости, связанных, как правило, с громоздкими выкладками, позволяет получить однократным решением результат, охватывающий целую серию весьма разнообразных областей. Чтобы получить из него решение, относящееся к какой-нибудь определенной области, достаточно в полученную формулу напряжений или жесткости подставить соответствующие значения параметров. Такие решения экономичны и удобны для приложений, так как позволяют из одной формулы «выбирать» по мере надобности готовые решения для нужных областей за счет изменения параметров.

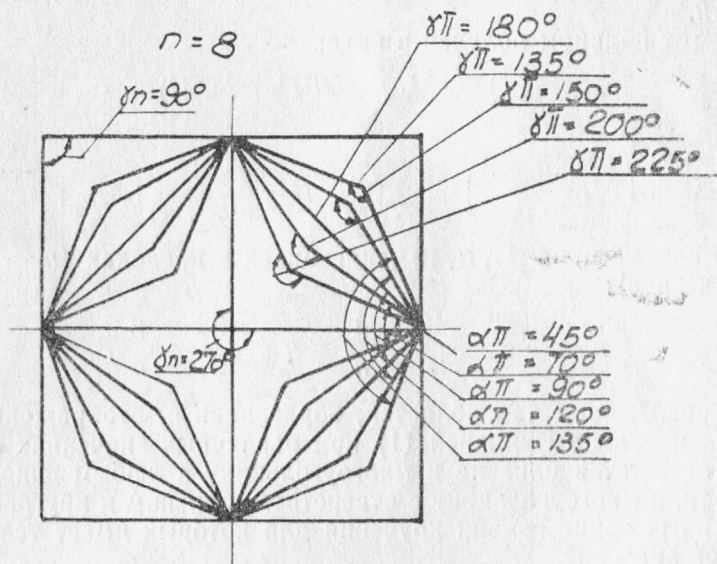
Во вступительной части диссертации описан способ построения такого конформного отображения:

$$\omega(\zeta) = C \int \prod_{k=1}^n (\zeta - a_k)^{\alpha_{k-1}} d\zeta + C_1 \quad (3)$$

отображающий единичный круг плоскости  $\zeta$  на плоскость  $\omega(\zeta)$  при частных значениях констант  $a_k$  и  $\alpha_k$  приводится к виду:

$$\omega(\zeta) = C \int \frac{(\zeta^{n/2} + 1)^{\gamma-1}}{(\zeta^{n/2} - 1)^{1-\alpha}} d\zeta \quad (4)$$

отображающему единичный круг на так называемый «звездообразный»  $n$  — угольник, пример которого при числе сто-



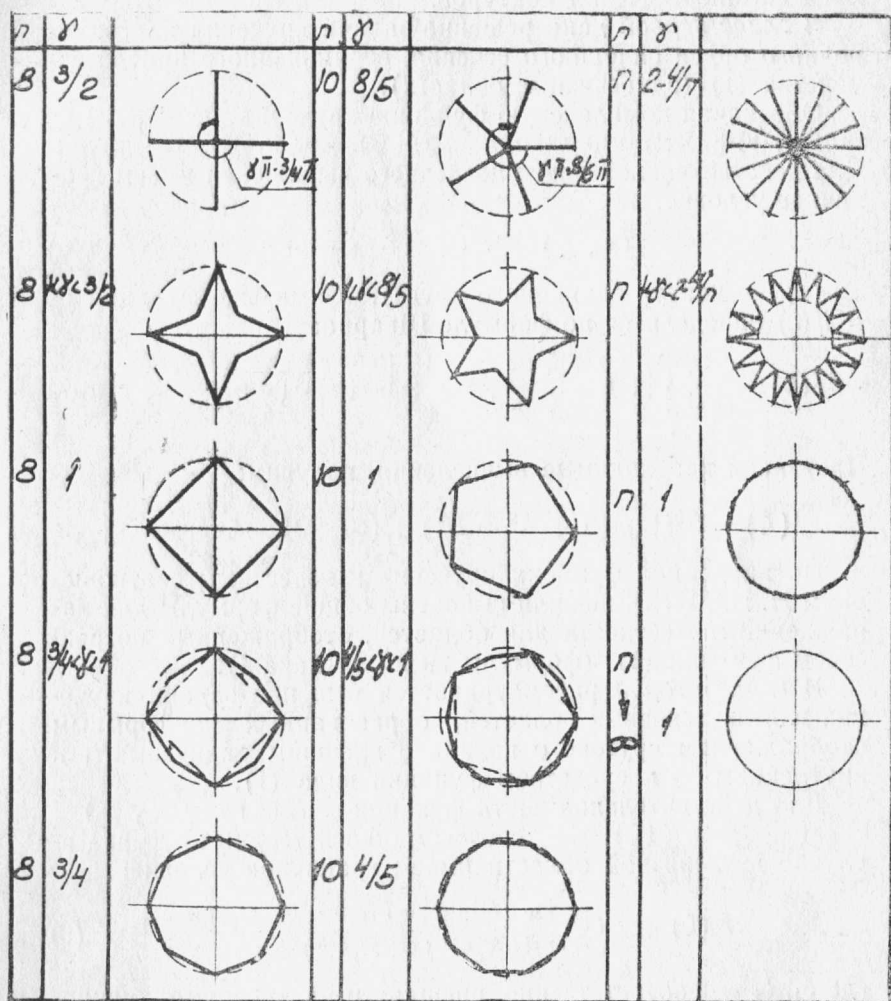
Фиг. 1.

рон  $n = 8$  и некоторых значениях «угловых показателей»  $\alpha$  и  $\gamma$  дан на фиг. 1. Затем интеграл (4), вследствие зависимости  $\alpha = \frac{2}{n}(n-2)\gamma$ , приводится к виду:

$$\omega(\zeta) = \int \frac{(\zeta^{n/2} + 1)^{\gamma-1} d\zeta}{(\zeta^{n/2} - 1)^{1-2/n(n-2)+\gamma}} \quad (5)$$

содержащему только два параметра:  $n$  — число сторон многоугольника и  $\gamma$  — величину угла в долях  $\pi$ .

Области, на которые последний интеграл отображает единичный круг при некоторых значениях  $n$  и  $\gamma$  приведены на фиг. 2.



Фиг. 2.

Однако в решении задач теории упругости использование интеграла (5) сопряжено с рядом неудобств, вследствие чего в дальнейшем используется вместо (5) «отрезок» его разложения в степенной ряд с коэффициентами  $A$  и  $B$ , зависящими от параметров  $n$  и  $\gamma$  в виде (1).

При изменении параметров  $n$  и  $\gamma$  функция (1) дает отображение единичного круга на множество областей, очер-

ченных эпитрохальными кривыми, в том числе на близкие к контуру  $n$ -угольника. В диссертации дано их исследование и примеры построения по точкам, а также установлены пределы допустимых значений  $n$  и  $\gamma$  (2), при которых исключаются самопересечения контуров.

В *главе первой* дано решение задачи кручения для однородного бруса сплошного сечения, ограниченного кривой семейства (1) (односвязные области).

Обозначая комплексную функцию кручения  $f(\zeta) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ , получим  $-if(\zeta) = \psi(x, y) - i\varphi(x, y)$ . Для действительной части последнего выражения имеем граничное условие.

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2} \omega(\sigma) \overline{\omega(\sigma)} \text{ на } \gamma \quad (6)$$

( $\gamma$  — контур единичного круга). Сама же функция  $-if(\zeta)$  определится по формуле Шварца:

$$-if(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \psi(\sigma) \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma} \omega(\sigma) \frac{\overline{\omega(\sigma)} (\sigma + \zeta)}{\sigma - \zeta} \frac{d\sigma}{\sigma} \quad (7)$$

Производя необходимые вычисления, получим:

$$f(\zeta) = C^2 i \left[ \frac{1}{2} (1 + A^2 + B^2) + (A + AB) \zeta^{n/2} + B \zeta^n \right]$$

По найденной функции кручения и известным соотношениям Н. И. Мухелишвили выведены общие формулы для напряжений и жесткости для областей, отображенных посредством функции (1) (формулы 29 и 33 глава I).

В *главе второй* рассматривается решение задачи кручения для двухсвязных областей, образованных конформным отображением кругового кольца с внешним радиусом  $R_1$  и внутренним  $R_2$  посредством функции вида (1).

Для действительной части функции  $-if(\zeta) = \psi(x, y) - i\varphi(x, y) = F(\zeta)$  согласно общей теории кручения в случае двухсвязной области имеем граничное условие:

$$F(\zeta) + \overline{F(\zeta)} \begin{cases} \omega(R_1 e^{i\theta}) \overline{\omega(R_1 e^{i\theta})} + C_1 & \text{на } \delta_1 \\ \omega(R_2 e^{i\theta}) \overline{\omega(R_2 e^{i\theta})} + C_2 & \text{на } \delta_2 \end{cases} \quad (9)$$

где  $\delta_1, \delta_2$  — соответственно, внешняя и внутренняя окружности кольца,  $C_1, C_2$  — постоянные, подлежащие определению. Представляя искомую функцию в виде ряда

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k,$$

вводя это ее представление в (9), по методу сравнения коэф-

коэффициентов при  $\zeta$  в обеих частях (9) определяются как постоянные  $C_1, C_2$ , так и коэффициенты  $a_k$  (формулы 40, 41, гл. II). Искомая функция кручения имеет вид

$$f(\zeta) = i \sum_{k=1}^2 a_{\pm k^{n/2}} \zeta^{\pm k^{n/2}} \quad (10)$$

Далее выведены общие формулы напряжений и жесткости для класса рассматриваемых двухсвязных областей, даны примеры построения эпюр напряжений на контурах сечений при различных  $n$  и  $\gamma$ , а также таблицы их величин и жесткости.

В виде примеров применения выведенных формул рассмотрено напряженное состояние бурильной трубы в месте смятия, кручение вала пильгерстана Таганрогского трубного завода и кручение дрели пильгерстана.

В главе третьей решается иной тип задачи теории упругости — задача о напряженном состоянии пластинки с запрессованными с «натягом» круглыми шайбами.

Несмотря на наличие общей методики и примеров решения задач такого типа, данных в работах Н. И. Мухелишвили, Д. И. Шермана, А. Г. Угодчикова и др., общего решения ее для любого многоугольника в литературе не имеется.

Для решения этой задачи также используется конформное отображение (1) круга на многоугольник при  $\gamma = 1$ . Известным методом задача приводится к первой основной задаче теории упругости типа:

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = f(\sigma) \text{ на } \gamma \quad (11)$$

Несмотря на общую громоздкость обобщенного решения этой задачи, благодаря тому, что функция (1) имеет вид полинома, выражение

$$\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = \zeta^{n+1} \frac{1 + A\zeta^{n/2} + B\zeta^n}{\zeta^n + (n/2 + 1)A\zeta^{n/2} + (n + 1)B}$$

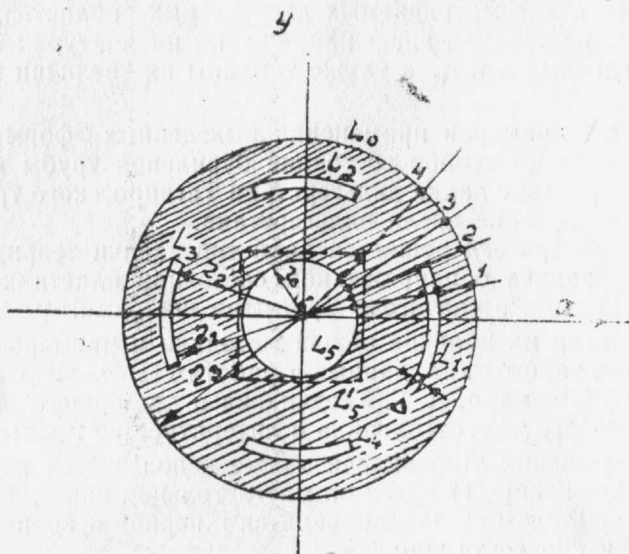
является рациональной функцией с  $(n+1)$ -кратным полюсом на бесконечности, легко представимым рядом Лорана вне единичного круга. Это позволяет относительно просто вычислять интегралы Коши при определении функции напряжений  $\varphi(\zeta)$  и из представления рядами правой и левой частей полученного результата образовать систему  $a_k = I_k - k_k$ , позво-



ляющую вычислить коэффициенты разложения искомой функции. Аналогично определяется функция  $\psi(\zeta)$ . Для частного случая  $n = 20$  дан пример числового расчета.

Таким образом, с помощью конформного отображения (1) получено решение наиболее громоздкой задачи теории упругости для целого семейства эпитрохальных многоугольников.

В главе четвертой рассматривается задача кручения бруса, сечение которого является многосвязной областью (рис. 3). Практически к постановке такой задачи приводит



Фиг. 3.

все еще не решенный и остающийся одним из актуальных вопросов о влиянии внутренних трещин в валах машин на их прочность. Функции  $\psi(x, y)$ , сопряженная с функцией кручения, приближенно определяется в форме гармонического полинома

$$\psi(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^s a_{4n} z^{4n}$$

или суммы подобных полиномов, коэффициенты которых  $a_{4n}$  определяются решением системы уравнений, составленной из условия удовлетворяемости полинома граничному условию задачи кручения в конечном числе точек границы области.

При этом относительно входящих в граничное условие

постоянных  $C_k$  влияющих на отыскание функции кручения, предварительно доказывается теорема о допустимости считать их равными 0 в рассматриваемом случае, так как интеграл

$$\varphi(x, y) = \int \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} dx - \int \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} dy \quad (12)$$

взятый по любому из замкнутых контуров  $L'_k$  обходящих «отверстия» и лежащих в области между контурами  $L_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ) обращается в 0.

Частный вид системы упрощает нахождение ее решения при любом последовательно увеличивающемся числе точек, взятых на контурах и определение функции  $\psi(x, y)$  с любой степенью точности. В частном случае, когда «трещина» вырождается в разрез по дуге окружности предельным переходом при некоторых, описанных в главе IV, условиях устанавливается, что

$$\varphi(x, y) = \text{const.}$$

Этот результат, известный из других соображений, указывает на общую правильность предложенного метода решения задачи.

В той же главе даны еще два примера приложения рассмотренного способа определения функции кручения, имеющие технический интерес: кручение дрели новой формы и уточнение методики расчета валов-шестерен на контактную прочность. В расчете валов, находящихся в зубчатом зацеплении, имеет важное значение определение максимальной величины напряжения, действующего на контактной поверхности зубьев. Однако в виду отсутствия в литературе метода определения напряжения кручения на поверхности зубьев таких валов, постоянно действующая компонента их сложного напряженного состояния — касательное напряжение  $T$ , никем не учитывалась.

В главе четвертой дан метод определения этого напряжения и рекомендована расчетная формула для проверки вала на контактную прочность в виде:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3T} \leq [\sigma]_k \quad (13)$$

В добавлении дано несколько примеров расчета напряжений по методу, изложенному в главе IV.

Коротко полученные в диссертации результаты заключаются:

- 1) в построении и показе практической ценности обобщенных решений некоторых задач теории упругости;
- 2) в применении нового метода решения задачи кручения для наиболее сложного случая, когда область является многосвязной, позволяющего решить актуальный вопрос о



влиянии на прочность валов нескольких внутренних трещин частного вида.

Полученные в работе общие выводы проиллюстрированы приложением к расчету напряжений для некоторых объектов из различных областей техники, как то:

1. Кручение валка пильгерстана.
2. Кручение дрели пильгерстана многоугольного сечения.
3. Кручение дрели пильгерстана другой (новой) формы.
4. Распределение напряжений кручения в бурильной трубе в месте смятия.
5. Распределение напряжений в 10-угольнике с двумя запрессованными дисками.
6. Влияние на кручение вала 4-симметричных отверстий, ограниченных дугами окружностей и отрезками радиусов.
7. Применение к расчету валов с зубчатым зацеплением на контактную прочность.

**Основные результаты диссертации опубликованы в работах:**

1. Об одном методе обобщенного решения задачи кручения для класса областей. «Известия» — сборник статей КВАИУ, 1961.
2. Про кручения валка пильгерного стана. Прикладна механіка, т. VIII, в. 3, вид. АН УРСР, 1962.
3. Про одну задачу Діріхле, ДАН УРСР, № 8, 1963.
4. О напряженном состоянии пластинки с запрессованными шайбами. Труды семинара по прикладной математике. Изд-во АН УССР, т. 2, 1963.
5. Про один метод в задачі кручення та його використання. Вісник КГУ, т. VI, в. 2, 1963.