Annotation

We study integral properties of functions with complicated local structure such that their graphs are self-affine and quasi-self-affine sets. Every such function is defined by system of functional equations depending on finite number of parameters.

УДК 511.72

Працьовитий М. В., Сухоліт Ю. Ю.

ПРО ОДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ТРІЙКОВОЇ СИСТЕМИ З ДВОМА НАДЛИШКОВИМИ ЦИФРАМИ

Вступ. Сьогодні для моделювання та дослідження об'єктів неперервної математики зі складною локальною будовою (множин, функцій, перетворень, мір, динамічних систем тощо) широко використовуються системи зображення (кодування дійсних чисел) зі скінченним, нетрадиційним та надлишковим алфавітом. В результаті отримані системи зображення мають суттєво не нульову надлишковість (числа мають нескінченну кількість зображень), це є зручним для задання об'єктів із фрактальною будовою, динамічних систем з хаотичною поведінкою, сингулярних розподілів з фрактальними носіями тощо. Однією з таких систем є трійково- п'ятіркова, яка використовує алфавіт з двома надлишковими цифрами, її геометрії і найпростішим застосуванням присвячена дана робота. Дослідження таких систем велося і раніше, але детально вивчити геометрію зображень чисел вдалось лише для окремих комбінацій основи та надлишкового набору цифр. Трійково-пятіркова система завдяки своїй відносно нескладній геометрії є багато обіцяючою в плані застосувань в різних галузях математики.

Геометрія трійково-п'ятіркового зображення чисел. Нехай A={0, 1, 2, 3, 4} – множина цифр (алфавіт) традиційної п'ятіркової системи числення.

Л е м а 1. Для будь-кого числа x $\in$ [0;2] існує послідовність (β_k), $\beta_k \in A,$ така, що

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \beta_k \equiv \qquad (1)$$

$$\equiv \Delta_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k \ldots}. \qquad (2)$$

Вираз (1) числа x називають трійково-п'ятірковим представленням, а символічний запис (2) – *трійково-п'ятірковим зображенням* x ($5_3 -$ зображення).

Легко навести приклад числа, яке має різні трійково-п'ятіркові зображення. Наприклад, $\frac{1}{2} = \Delta_{111\ldots} = \Delta_{04111\ldots} = \Delta_{03411\ldots}$. Дані рівності мають місце завдяки тому, що

$$\frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^{k+1}} = \frac{0}{3^k} + \frac{4}{3^{k+1}} \text{ і } \frac{4}{3^k} + \frac{1}{3^{k+1}} = \frac{3}{3^k} + \frac{4}{3^{k+1}}.$$

Л е м а 2. *Не змінює числа взаємозаміна пар двох послідовних цифр*: $\overline{10}$ на $\overline{03}$, $\overline{11}$ на $\overline{04}$, $\overline{20}$ на $\overline{13}$, $\overline{21}$ на $\overline{14}$, $\overline{30}$ на $\overline{23}$, $\overline{31}$ на $\overline{24}$, $\overline{33}$ на $\overline{40}$, $\overline{34}$ на $\overline{41}$, у 5_3 *– зображенні.*

Дане твердження є очевидним в силу рівності $\frac{a}{3^m} + \frac{b}{3^{m+1}} = \frac{3a+b}{3^{m+1}}.$

Питання кількості зображень $5_3 -$ зображень числа $x \in [0,2]$ детально вивчено в роботі [6].

Означення 1. Множина $\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \{x\colon x = \Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m \beta_{m+1} \beta_{m+2} \ldots}, \ (\beta_{m+n})_{n=1}^{\infty} \in L\}$ називається $5_3 -$ циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \ldots c_m$ ($L - A \times A \times A \times \ldots$).

Наступне твердження розкриває геометричний зміст "трійково-п'ятіркових цифр" числа.

Л е м а 3. Циліндри мають наступні властивості.

1.

$$\Delta_{c_1 \ldots c_k} \bigcup_{i=1}^{4} \Delta_{c_1 \ldots c_k i}, \forall (c_m), c_m \in L.$$

2. Кожна циліндрична множина є відрізком, причому

$$\Delta_{c_1c_2\ldots c_k} = \left[a_k; a_k + \frac{2}{3^k}\right]$$, де $a_k = \sum_{i=1}^{k} 3^{-i} \cdot c_i$.

3.
$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1\ldots c_m} = x \equiv \Delta_{c_1\ldots c_m} \in [0;2] \forall (c_m), c_m \in L.$$
4.
$$\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_m} = \Delta_{\beta_1\ldots\beta_m} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} 3^{-i}(\alpha_i - \beta_i) = 0.$$
5.
$\Delta_{c_1\ldots c_m} = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_m 00\ldots} \oplus \Delta_{\beta_1\ldots\beta_m}$, де $\alpha_i + \beta_i = c_i \in A$.

6. Перетин двох циліндричних множин $\Delta_{c_1\ldots c_{k-1}s}$ і $\Delta_{c_1\ldots c_{k-1}(s+1)}$, які належать одній циліндричній множині рангу k, є об'єднанням неперкривних циліндричних множин вищих рангів ($a = \sum_{i=1}^{k} 3^{-i} c_i$):

$$\Delta_{c_1\ldots c_{k-1}s} \cap \Delta_{c_1\ldots c_{k-1}(s+1)} = \left[a + \frac{s+1}{3^k}; a + \frac{s+2}{3^k}\right],$$
$$= \Delta_{c_1\ldots c_{k-1}(s+1)0} \cup \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1\ldots c_{k-1}(s+1)\underbrace{2\ldots 2}_{m}0}\right],$$
$$= \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1\ldots c_{k-1}s\underbrace{2\ldots 2}_{m}4}\right] \cup \Delta_{c_1\ldots c_{k-1}s4}.$$

Задання фрактальних об'єктів. Означення 2. Обмежену множину E метричного простору (M,ρ) називається N - самоподібною, якщо
1.
$E = E_1 \cup \ldots \cup E_j \cup \ldots$,
2.
$E_j \overset{k_j}{\sim} E$, $j = 1,2,\ldots$,
3.
$\alpha_0(E_i \cap E_j) < \alpha_0(E)$, $i \neq j$ [5].

Означення 3. Самоподібна множина $E \subset R^n$ називається самоподібним фракталом, якщо її самоподібна розмірність є дробовим числом [5].

Т е о р е м а 1. Множина $U = \left\{x, x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}, \alpha_i \in \{0,3,4\}\right\}$ є N-самоподібним фракталом, самоподібна розмірність якого співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича і дорівнює $\log_3(1+\sqrt{2})$.

Доведення. Множина U є N-самоподібною множиною відповідно до означення 2. Оскільки $\inf U = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{0}{3^i} = 0$, $\sup U = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{3^i} = 2$, то множина U є обмежена. Доведемо замкненість множини U. Нехай x - гранична точка множини U, то для довільного k знайдеться циліндричний відрізок $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$, який містить x, оскільки в протилежному випадку x належав би до одного із суміжних циліндричних інтервалів і існувало б $\varepsilon > 0$ таке, що $(x-\varepsilon; x+\varepsilon) \cap U = 0$, а це суперечить тому, що x - гранична точка множини U. Переріз $\bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ для довільної послідовності (α_n) містить єдину точку, яка належить U і співпадає з x. Отже, U - замкнена множина. Припустимо, що множина U містить ізольовані точки, $x = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}$ - одна з них. Тоді за означенням ізольованої точки, існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$(x-\varepsilon; x+\varepsilon)\cap[U\setminus\{x\}]=\varnothing. \qquad (3)$$

Виберемо k таким великим, що $\left|\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\right|<\varepsilon$. Тоді $\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\subset(x-\varepsilon; x+\varepsilon)$ і $x\neq x'=\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k(1-\alpha_{k+1})\alpha_{k+2}\alpha_{k+3}\ldots}\in(x-\varepsilon; x+\varepsilon)$, що суперечить (3). Отже, U - замкнена множина, яка не має ізольованих точок, тобто є досконалою за означенням. Тоді самоподібна розмірність множини U співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича відповідно до теореми 1.2.2. [5, с.62-63]. Обчислимо її

1. $U \overset{1/3}{\sim} \left[0,\frac{2}{3}\right]\cap U$,

2. $$\begin{cases} U \overset{1/3}{\sim} \left[1,\frac{11}{9}\right)\cap U, \\ U \overset{1/3}{\sim} \left[\frac{12}{9},2\right)\cap U. \end{cases}$$

Отже, отримаємо $\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\ldots$. Можемо скласти рівняння для знаходження самоподібної розмірності множини U

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x+2\left(\frac{1}{3^2}\right)^x+2\left(\frac{1}{3^3}\right)^x+\ldots=1,$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x+2\underbrace{\left(\left(\frac{1}{3^x}\right)^2+\left(\frac{1}{3^x}\right)^3+\ldots\right)}_{\text{суманескінченноспадної геометричноїпрогресії}}=1,$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x+2\cdot\frac{\frac{1}{3^{2x}}}{1-\frac{1}{3^x}}=1, \quad \frac{1}{3^x}+\frac{2}{3^x\left(3^x-1\right)}=1,$$

звідки $3^x=1-\sqrt{2}\ \Rightarrow\ x\in\varnothing$, $3^x=1+\sqrt{2}\ \Rightarrow\ x=\log_3\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Отже, $\alpha_0(U)=\alpha_S(U)=\log_3\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Оскільки $\alpha_S(U)=\log_3\left(1+\sqrt{2}\right)$, то відповідно до означення 3 множина U буде N-самоподібним фрак талом.

Використана література:

1. *Гончаренко Я. В., Микитюк І. О.* Представлення дійсних чисел в системах з надлишковим набором цифр та їх використання // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – К. : НПУ імені Драгоманова, – 2004. – № 5. – С. 242-254.
2. *Микитюк І. О.* Двійково-десяткова система числення і фрактальні розподіли з нею пов’язані // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2002. – № 3. – С. 412-419.
3. *Микитюк І. О.* Геометрія двійково-п’ятіркового зображення числа // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, – 2005, № 6. – С. 301-310.
4. *Микитюк І. О., Працьовитий М. В.* Двійкова система числення з надлишковими цифрами і її відповідна метрична теорія чисел // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, – 2003, № 4. – С. 270-290
5. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – К. : Вид-го НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
6. *Сухоліт Ю. Ю.* Трійкова система числення з двома надлишковими цифрами // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2011. – № 12. – С. 121-134.
7. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – К. : Наук. думка, 1992. – 208 с.

Аннотация

Данная работа посвящена применению троичной системы счисления с двумя избыточными цифрами к заданию и исследованию фрактальных линейных множеств, возникающие в результате запрета использования группы цифр алфавита.

Annotation

We study the use of ternary scale with two redundant digits to specifying and studying linear fractal sets resulting of prohibition of the use of digits from the alphabet.

УДК517.51

Василенко Н. А.

ПРО РОЗПОДІЛ ЗНАЧЕНЬ НЕПЕРЕРВНОЇ НІДЕ НЕ ДИФЕРЕНЦІЙОВНОЇ ФУНКЦІЇ СЕРПІНСЬКОГО

В 1914 р. В.Серпінським було опубліковано наступний приклад неперервної ніде не диференційовної функції.

Нехай $A_5 = \{0,1,2,3,4\}$ – алфавіт п'ятіркової системи числення. Визначимо на A_5 дискретну функцію

$$\gamma(\alpha) = \begin{cases} 0, \text{ якщо} & \alpha = 0, \\ 1, \text{ якщо} & \alpha \in A_5 \setminus \{0,4\}, \\ 2, \text{ якщо} & \alpha = 4. \end{cases} \tag{1}$$

Для кожної послідовності $(\alpha_k) \in L \equiv A_5^\infty = A_5 \times A_5 \times \dots$ визначимо послідовність (c_k) наступним чином

$$c_1 = 0, \qquad c_k = \begin{cases} c_{k-1}, & \text{якщо} \quad \alpha_{k-1} \in A_5 \setminus \{2\}, \\ 1 - c_{k-1}, & \text{якщо} \quad \alpha_{k-1} = 2. \end{cases} \tag{2}$$

Розглянемо на [0,1] функцію, аргумент якої подається п'ятірковим дробом:

$$x = \frac{\alpha_1}{5} + \frac{\alpha_2}{5^2} + \dots + \frac{\alpha_k}{5^k} + \dots \equiv \Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\dots}, \quad \alpha_k \in A_5, \tag{5}$$

а значення функції має трійковий розклад:

$$f(x) = \frac{\beta_1}{3} + \frac{\beta_2}{3^2} + \dots + \frac{\beta_k}{3^k} + \dots \equiv \Delta^3_{\beta_1\beta_2\dots\beta_k\dots}, \quad \beta_k \in \{0,1,2\} \equiv A_3, \tag{6}$$

де

$$\beta_k = \begin{cases} \gamma(\alpha_k), & \text{якщо} \quad c_k = 0, \\ 2 - \gamma(\alpha_k), & \text{якщо} \quad c_k \neq 0. \end{cases} \tag{7}$$

До формул (7), можна дати інший (еквівалентний) запис перетворювача цифр β_k

$$\beta_k = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \left[\begin{array}{lll} \alpha_k = 0 & i & c_k = 0, \\ \alpha_k = 4 & i & c_k = 1, \end{array}\right. \\ 1, & \text{якщо} \quad \alpha_k \in \{1,2,3\}, \\ 2, & \text{якщо} \quad \left[\begin{array}{lll} \alpha_k = 0 & i & c_k = 1, \\ \alpha_k = 4 & i & c_k = 0. \end{array}\right. \end{cases} \tag{8}$$

Зауваження 1 Легко бачити, що β_k, взагалі кажучи, залежить не лише від α_k, але і від $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1})$, але може і не залежити, якщо всі $\alpha_i \in \{1,2,3\}$, $i = \overline{1, k-1}$.

Дослідженню властивостей функції Серпінського присвячено роботи [1],[7], тому нагадаємо лише деякі з них, які далі будуть використані.

Множиною рівня y_0 функції f називається множина $f^{-1}(y_0) = \{x : f(x) = y_0\}$.

Лема 1. [6] Якщо $y_0 = \Delta^3_{d_1 d_2 \dots d_m(1)}$ ($m \in \mathrm{N}_0$), то для множини рівня y_0 має місце рівність $f^{-1}(y_0) = C[5,V] \equiv \{x : \alpha_i(x) \in V = A_5 \setminus \{0,4\}\}$, отже, вона має властивості [6]:

1) є континуальною; 2) ніде не щільною множиною; 3) нульової міри Лебега;4) розмірність Хаусдорфа-Безиковича якої дорівнює $\log_5 3$