МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени А. М. ГОРЬКОГО

На правах рукописи

ПАСЕЧНИК Екатерина Матвеевна

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

(13.00.02. Методика преподавания математики)

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук

КИЕВ — 1976

Работа выполнена на кафедре математики и методики преподавания математики Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького.

Научный руководитель - кандидат педагогических наук, доцент БЕВЗ Г.П.

Официальные оппоненты:

Доктор педагогических наук, профессор ТЕСЛЕНКО И.Ф.

Кандидат педагогических наук, доцент ТАРАСЮК В.Е.

Внешний отзыв - Харьковский государственный педагогический институт им. Г.С.Сковороды, кафедра элементарной математики и методики преподавания математики

Автореферат разослан " 5 " мая 1976 г.

Защита состоится " " 1976 г. на заседании Ученого совета Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького / Киев-30, ул.Пирогова, 9/.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь совета

"Среднее образование должно обеспечить прочное знание основ наук, усвоение принципов коммунистического мировоззрения, трудовую и политехническую подготовку в соответствии с возрастающим уровнем развития науки и техники, с учетом потребностей общества, способностей и желаний учащихся...",[1]- записано в Программе КПСС.

В связи со стремительным ростом и широким использованием математических методов в самых различных областях человеческой деятельности проблема математического образования становится особенно острой и актуальной. Высокий уровень развития современной математической науки, проникновение математических методов во все сферы деятельности человека предъявляют новые требования к содержанию и методам обучения этому предмету в средней школе.

Недавние изменения в программах по математике для средней школы имели своей целью пополнить каждый школьный раздел математики идеями, которые отражают основные тенденции развития современной науки и доступны для усвоения их детьми соответствующего возраста.

Большое внимание новыми программами уделено элементам аналитической геометрии, под которыми следует понимать круг знаний, дающий первые представления:

а/ о методе координат / на прямой, плоскости и в пространстве/ ;

б/ об аналитическом методе изучения геометрических фигур / исследовании формы и положения геометрических образов с помощью аналитических соотношений, определяемых уравнениями, неравенствами, функциями/. И это не случайно. Пополнение знаний школьников сведениями из аналитической геометрии дает возмож-

---

[1]/ Программа КПСС, М., Политиздат, 1973, с.123.

ность избежать неопределенности и неточности в трактовании некоторых основных понятий /прямая, точка, плоскость и т.д./, изучаемых в средней школе. Учащимся предоставляется возможность овладеть сравнительно несложными для них и в то же время эффективными методами решения геометрических вопросов: методом координат и векторного исчисления.

Использованию координатного метода в школьном курсе не уделялось достаточного внимания, несмотря на то, что в математике он разработан давно и благодаря своим преимуществам получил широкое распространение.

Проблеме изучения элементов аналитической геометрии в курсе математики средней школы уделялось внимание со стороны ученых, методистов. Вопрос о введении элементов аналитической геометрии в школу нашел отображение в материалах Всероссийских съездов преподавателей математиков / 1911 - 1914 г.г./.

Об изучении элементов аналитической геометрии в школьном курсе математики написано ряд работ и несколько диссертаций. Отдельные аспекты внедрения сведений из аналитической геометрии при обучении школьников математике нашли отражение в диссертациях Л.С.Барановской /"Элементы анализа и аналитической геометрии в программах средней школы", 1940/, Н.Г.Федина /"Координатный метод и элементы аналитической геометрии в курсе математики средней школы", 1952/, Т.В.Семеновой /"Привитие учащимся аналитической культуры на факультативных занятиях по математике в УШ классе средней школы", 1968/,И.Ч.Баркова /"Элементы аналитической геометрии в средней школе", 1949/, Е.С.Петровой /"Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии на факультативных занятиях в средней школе", 1970/ и др. Но почти все они рассматривают вопрос соответственно традиционным программам по математике для средней школы. Последние три из названных диссертаций посвящены изучению элементов аналитической геометрии на факультативных занятиях в УШ, IX и X-XI классах.

На наше мнение, данные работы не лишены некоторых недостатков. Неприемлемо предложение Н.Г.Федина полностью растворить элементы аналитической геометрии в традиционном курсе школьной математики. Неверно и утверждение Н.Г.Федина об отсутствии в дореволюционной школе программы по началам аналитической геометрии. Рекомендуемый Е.С.Петровой для изучения в школе круг вопросов из аналитической геометрии чрезмерно широк: его обьем равен обьему знаний первокурсников высших технических учебных заведений.

Безусловно, указанные исследования не могли учесть потребностей проводимой в настоящее время перестройки содержания математического образования в средней школе, а также особенностей развития современной математики.

В связи с включением в последние годы в программы по математике для средней школы ряда новых сведений по аналитической геометрии возникла необходимость изучить целесообразность расширения диапазона элементов аналитической геометрии, в частности ознакомления с координатным и векторным методами при решении как теоретических, так и практических вопросов, обосновать место и содержание упражнений с использованием методов аналитической геометрии, исследовать наиболее эффективные методы и способы решения задач прикладного характера, разработать методику обучения учащихся приемам работы, играющих большую роль в формировании их знаний, умений и навыков, а также исследовать необходимость расширения круга вопросов из аналитической геометрии, изучаемых в математических классах и на факультативных занятиях.

На данный момент методика преподавания в средней школе элементов аналитической геометрии детально не разработана, пособия касаются вопросов традиционных програм и сегодняшних потребностей учителя математики удовлетворить не могут.

Целью нашей работы явился поиск наиболее целесообразного содержания и методики изучения элементов аналитической геометрии, рассматриваемых в курсе математики средней школы либо впервые, либо в более широком аспекте в связи с введением новых програм.

При исследовании вопроса обращалось особое внимание: I/ на возможные пути установления наиболее целесообразных приемов преподавания элементов аналитической геометрии в курсе математики средней школы; 2/ разрабатывались методические предложения по изучению актуальных вопросов аналитической геометрии /рассмотрение предложений проводилось в органической связи с курсом школьной математики, который изучается и будет изучаться по новой программе/; 3/ разрабатывалась система упражнений, методика их решения; 4/ проверялось восприятие учащимися подобранного материала в ходе проводимых экспериментов; 5/ изучались пути установления связи между элементами аналитической геометрии и школьными предметами как математическими, так и не математическими.

В процессе исследования проблемы было рассмотрено:

I. Современное состояние преподавания в средней школе сведений из аналитической геометрии и ее методов.

2. Содержание элементов аналитической геометрии, изучаемых на уроках математики, а также на факультативных занятиях и в классах с углубленным изучением математики.

3. Пути и формы использования элементов аналитической геометрии, ее методов в отечественной и некоторой зарубежной учебно-методической литературе.

Выводы работы о том:

а/ в какой степени доступны учащимся элементы аналитической геометрии, предусмотренные программой;

б/ насколько расширяют эти сведения математические знания учащихся, их математический кругозор;

в/ какие трудности вызывает у учащихся усвоение новых математических понятий, в том числе координатного и векторного методов и их использование при решении задач и упражнений практического характера и как их преодолевать;

г/ конкретные рекомендации дидактического характера относительно изучения в школе элементов аналитической геометрии;

д/ возможность дидактической обработки материала сделаны автором на основании широкого анализа учебной, научной и методической литературы по вопросам аналитической геометрии, а также 25-летнего опыта работы в средней школе и Днепропетровском госуниверситете, двухлетнего опыта проведения факультативных занятий в школе, наблюдений за уроками учителей, студентов-практикантов. Существенные ответы на поставленные перед исследователем вопросы получены в ходе эксперимента, проведенного в средних школах № 9, 36, 80, 81, 100 г.Днепропетровска, в ШЮМ при ДГУ, а также в сельских школах Апостоловского и Павлоградского районов Днепропетровской области.

Предлагаемая диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, библиографии.

Во введении аргументирована актуальность рассматриваемых вопросов, определены задачи исследования и методы их решения.

Глава I. Метод координат в курсе математики V-VIII классов

Начало главы содержит экскурс в историю возникновения метода координат, его развития, а также внедрения в школьный курс математики. Такой подход позволяет более четко понять особенности постановки вопроса в современных условиях обучения учащихся средней школы, наметить пути наиболее эффективного решения рассматриваемой проблемы.

С точки зрения приложения методов аналитической геометрии в школьном курсе в работе анализируется учебно-методическая литература. Установлено, что проблема внедрения элементов аналитической геометрии в школьный курс математики отечественной средней школы неоднократно выносилась на повестку дня. Особенное внимание уделялось ей при проведении реформ математического образования.

Необходимость введения элементов аналитической геометрии детерминирована тенденцией сближения школьного обучения с наукой. Многие ученые /Ф.Клейн, А.Пуанкаре, Э.Борель и др./ в свое время критиковали отставание школьной математики от науки. За введение элементов аналитической геометрии в курс математики средней школы выступали известные отечественные математики и методисты: М.В.Остроградский, П.Л.Чебышев, В.Я.Буняковский, В.Е.Сердобинский, К.Ф.Лебединцев, К.М.Щербина, Д.М.Синцов.

За построение курса геометрии на векторной основе стоят некоторые зарубежные ученые, как например, Г.Шоке, Ж.Дьедонне, Ж.Папи.

Многие видные советские ученые и методисты: Н.А.Глагольев, В.Л.Гончаров, Я.С.Дубнов,А.Я.Хинчин, А.Н.Колмогоров, И.М.Яглом, И.Ф.Тесленко, М.И.Ягодовский, В.Г.Болтянский, З.А.Скопец и др. неоднократно высказывались в печати за внедрение в курс математики средней школы элементов аналитической геометрии.

Анализ программ по математике для отечественной средней школы с точки зрения введения элементов аналитической геометрии показывает, что в средней школе до сих пор отсутствует система и последовательность. Так, например, в V классе метод координат изучается в начале учебного года и почти не используется до VI класса, отсутствует система упражнений, которая бы привлекла геометрический материал. Программа по математике не согласуется с программой по физике: векторы изучаются в курсе математики VII класса, а в курсе физики используются уже в VI. Векторный метод не применяется при решении текстовых алгебраических задач, недостаточно внимание некоторым другим системам координат.

Один из главных недостатков учебников по математике, используемых в средней школе, в рассматриваемом аспекте - отсутствие системы в применении координатного и векторного методов к решению задач различных разделов. Проводимая в настоящее время перестройка содержания математического образования в средней школе реализует в известной степени неоднократно высказанные идеи изучения элементов аналитической геометрии в общеобразовательной школе. Новая программа по математике предлагает вводить элементы аналитической геометрии в школе не только в основном курсе математики, но и на факультативных занятиях и математических классах, что свидетельствует об актуальности этих сведений и необходимости разработки методики их преподавания.

На современном этапе перестройки школьного математического образования заслуживает внимания критическое изучение опыта зарубежной школы. Приведенные в исследовании примеры преподавания элементов аналитической геометрии в зарубежной средней школе убедительно свидетельствует о целесообразности их изучения, начиная с раннего возраста. Некоторые зарубежные учебники для средних школ содержат примеры удачного применения методов аналитической геометрии, последовательности в их изучении при переходе из класса в класс.

Ряд вопросов из аналитической геометрии, встречающихся в зарубежной учебно-методической литературе, довольно интересно изложен и может быть использован в отечественной школе. Однако система упражнений должна соответствовать принципам и методам обучения в советской школе.

Изучение таких вопросов, как оси координат, абсцисса и ордината точки на плоскости, построение точки по ее координатам и т.п. действующая программа по математике предлагает в У классе, а не в УI-УШ, как это было до сих пор. Успешное усвоение учащимися данного материала может обеспечить лишь осуществление специальной пропедевтики в младших классах. Она должна включать решение задач с помощью простейших графиков, систематическое построение на базе практического материала столбчатых и линейных диаграмм, использование линейных диаграмм в виде вертикальных и горизонтальных отрезков. Постепенно переходя в У классе к более сложным диаграммам, графикам, следует подвести учащихся к понятию координатной плоскости. Для прочного усвоения новых понятий и связанных с ними терминов необходимо выполнить достаточное количество упражнений, провести хотя бы одну экспериментальную работу, связанную с построением простейших графиков на координатной плоскости, что несомненно поможет пятиклассникам не только глубже усвоить построение точки по ее координатам, простейших графиков, но и обогатит их познаниями и умениями решения задач из практической жизни, откроет возможность применять изученное к исследованию явлений природы.

Проведенные исследования подтвердили, что усвоению определения места нахождения точек на плоскости помогает практическая работа "Применение координатного метода к определению координат рабочего места ученика в классе", изучению прямоугольной системы координат в V классе способствуют выполнение работы "Съемка плана участка с магистрали". Целесообразно также провести совместно с учителем географии комплексную экскурсию, во время которой учащимся предлагают определить координаты объекта /точки/, расстояния к которому недоступно. В диссертации разработана методика проведения таких практических работ и экскурсий, даны рекомендации для учителя средней школы.

Специальная методика помогает устранить характерные ошибки, допускаемые пятиклассниками в письменных работах по рассматриваемым темам. Эффективность предлагаемой методики подтверждает проведенный в средних школах города и области эксперимент.

Согласно новым программам теперь учащиеся на два года раньше, то есть в VI классе, знакомятся с понятием функции и ее графика. Наиболее доходчивым для учащихся считаем определение графика функции, которое дает правило его построения. Позже, когда школьники усвоят понятия области определения функции и множества значений функции, целесообразно остановиться на следующем определении графика функции:

График числовой функции $y=f(x)$ - это множество точек плоскости, для которых абциссы есть допустимые значения аргумента x, а ординаты - соответствующие значения функции y.

При этом следует обратить особое внимание на графики функций: они могут представлять собой сплошные линии, отдельные отрезки, изолированные точки.

Так как в школьный курс математики введено, кроме графика функции, и понятие графика уравнения с двумя переменными /VI класс/, то в процессе его изучения необходимо остановиться на отдельных особенностях этих графиков. Эти два понятия отличаются тем, что не каждое уравнение вида $F(x,y)=0$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между областью определения X и множеством значений Y.

Поэтому график уравнения $F(x,y)=0$ не всегда является графиком функции $y=f(x)$.

Но график функции - это и график некоторого уравнения. Для того чтобы множество пар (x,y) было графиком некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы на множестве не было двух пар (x_1,y_1) и (x_1,y_2) с одинаковым первым числом и вторыми различными. Всякий график функции $y=f(x)$ прямая, параллельная оси Oy, пересекает его только в одной точке. А график уравнения $F(x,y)=0$ прямая, параллельная оси Oy может пересекать не менее, чем в одной точке, так как графиком уравнения с двумя переменными есть множество точек, координаты которых его удовлетворяют. О графиках уравнения говорят в основном тогда, когда речь идет о применении алгебры к геометрии, а о графиках функции - геометрии к алгебре. Следует сказать даже шестиклассникам, что графиком уравнения могут быть не только сплошные линии, отдельные отрезки, изолированные точки, но и полуплоскость/ $\sqrt{x^2+2xy+y^2}=x+y$ /, произвольная плоская фигура, которую не принято считать линией.

При построении графика уравнения с двумя переменными следует показать учащимся, что данная задача содержит две основные, а именно:

1/ Дан график как множество точек /фигура/ с определенными геометрическими свойствами. Составить уравнение этой фигуры.

2/ Дано уравнение с переменными x, y. Построить график, соответствующий уравнению.

На данном этапе изучения математики в восьмилетней школе графический способ решения уравнений и их систем должен стать одним из центральных. Предлагая этот способ, надо создать в ходе урока проблемную ситуацию, которая бы убедила учащихся в необходимости его использования.

В VI классе утверждение, что график функции, заданной формулой $y = kx$, есть прямая, проходящая через начало координат, следует устанавливать эмпирически, так как теоретическая подготовка учащихся еще недостаточна. Возможность доказательства этого положения представляется только в VIII классе.

Согласно действующей программы по математике в VI-VIII классах усилено внимание ознакомлению с уравнениями прямой, отрезка, луча, а также параболы, гиперболы, окружности, эллипса. Изучение этих вопросов проводится индуктивно-дедуктивным методом, обоснование теоретических положений о прямой и кривых второго порядка надо отнести на факультативные занятия, в математические классы и на занятия математического кружка.

Следует отметить, что традиционно неравенства не относятся к аналитической геометрии. Однако они в школе неразрывно связаны с графиками уравнений, поэтому их обойти нельзя. Практика показывает, что учащиеся значительно лучше и быстрее усваивают материал о неравенствах и их системах, если к их изучению применять геометрический подход.

Изучение решения линейных неравенств с двумя переменными и их систем возможно в восьмилетней школе лишь при помощи геометрического толкования на координатной плоскости. Это толкование следует давать, исходя из аналитической реализации известного положения: "Произвольная прямая p разбивает множество точек плоскости, которые ей не принадлежат, на два непустых множества так, что: а/ произвольные две точки, принадлежащие разным множествам, разделены прямой p; б/ произвольные две точки, принадлежащие одному и тому же множеству, не разделены прямой p".

На основании данных положений нами разработана и исследована в ходе эксперимента в школе методика изложения этих вопросов, отличная от методики, данной в школьном учебнике "Алгебра" для VIII класса.

Среди графических способов решения текстовых задач следует различать конструктивные или чисто графические и графико-вычислительные или вычислительные. Использование этих методов дает возможность показать учащимся наглядно функциональную связь между данными и искомыми величинами, которые входят в условие задачи, ориентирует не только в выборе неизвестного, а часто и облегчает ход размышлений при нахождении решения задачи. К тому же, рисунок нередко дает возможность расширить задачу, создает условия для творческого конструктивного мышления учащихся.

Предлагаются практические советы по применению графических методов к решению ряда текстовых задач, которые рассматривались в ходе эксперимента в СШ № 9 г.Днепропетровска.

Глава 2. Элементы аналитической геометрии в курсе стереометрии IX-X классов и методика их изучения

Дальнейшее развитие координатного метода связано с применением векторов, что определяет стремительный прогресс в самой геометрии, так как открывается возможность свойства и отношения пространственных форм выражать при помощи чисел, функций, уравнений, подчинить геометрические объекты и их преобразование общим законам алгебры и анализа.

Согласно новым программам по математике значительно увеличился как объем сведений о векторах, операциях над ними, использования векторов для решения задач, так и время, отводимое на их изучение.

Суть векторного метода заключается в том, что геометрические отношения переводятся на язык векторов. Полученные при этом векторные равенства преобразуются, после чего выполняется обратное действие - перевод векторного языка на язык геометрии. Здесь наблюдается следующая схема рассуждений, аналогичная ситуации при использовании координатного метода.

Дано $\Longrightarrow$ Доказать или вычислить

Перевод на язык векторов /координат/

Преобразование векторных /алгебраических/ равенств

Перевод векторных /алгебраических/ равенств на язык геометрии

При изучении начальных сведений о векторном аппарате целеобразно приучать учащихся записывать перевод геометрических отношений на язык символов геометрии и язык векторов. Эти записи полезно заносить в такую, например, таблицу:

№№ п/п	На геометрическом языке	На векторном языке
I	$a \parallel b$	$\vec{a} = k \cdot \vec{b}$
2	$A = B$	$\vec{AB} = 0$ или $\vec{OA} = \vec{OB}$
3	A, B, C на прямой	$\vec{AB} = k \cdot \vec{AC}$

и т.д.

постепенно пополняя ее в процессе изучения векторов двумерного и трехмерного пространств.

Начальные сведения о векторах учащиеся получают в УП классе, а на уроках физики они необходимы уже в VI классе. Пополняя сведения о векторном аппарате, следует показать учащимся, что вектор является инструментом, который помогает устанавливать новые математические факты, а векторный метод рядом с другими, например, координатным, может успешно применяться при изучении школьных курсов не только математики, но и физики.

Следует заметить, что в геометрии средней школы рассматриваются лишь свободные векторы. А вот векторы связанные, скользящие в новых учебниках по геометрии не упоминаются. А между тем на уроках физики, начиная с VI класса, о таких векторах идет речь. Чтобы избежать недоразумений, следует учащихся хотя бы кратко ознакомить на уроках математики со связанными и скользящими векторами. Хороший пример в данном вопросе дают учебники по математике польской средней школы.

С целью обеспечения усвоения терминологии и символики, приобретения навыков действий над векторами следует рассматривать с учащимися упражнения, связанные с понятием вектора, суммы векторов и операций умножения вектора на число. Основой для постановки таких задач служат чаще всего известные учащимся свойства геометрических фигур. Освоение векторного метода легче обеспечить на более простых плоских фигурах, когда внимание учащихся не отвлекается трудностями геометрического характера. Полезно при этом обратить внимание учащихся на следующее:

1/ За начало и конец вектора наиболее рационально принимать известные точки, например, вершины данных фигур.

2/ Векторы размещать на известных и искомых отрезках заданной фигуры.

3/ Направление векторов может быть произвольным, но для коллинеарных целесообразно давать одно и то же.

4/ Для установления связи между данными и искомыми векторами следует использовать правила операций над векторами или их свойства.

Разумеется не должно быть и речи о заучивании учащимися подобных планов решения. Предполагается, что они будут усвоены постепенно в процессе решения задач. В.Г.Болтянский резонно утверждает, что обучение математике преследует сейчас не столько цель запоминания доказательств, "сколько овладение общими методами математики и логики".[I]

Понятие вектора в пространстве имеет такой же смысл, как и на плоскости. Поэтому рассмотрение векторного аппарата в пространстве целесообразно провести путем сравнений и аналогий. Определение вектора в пространстве аналогично определению вектора на плоскости: вектор рассматривается как параллельный перенос.

При ознакомлении учащихся с записью операций над пространственными векторами в координатной форме важное значение приобретают таблицы, при помощи которых можно обобщать, сравнивать, устанавливать связь с векторным аппаратом на плоскости, что является важнейшим источником ассоциаций, обеспечивающих глубокое и прочное усвоение материала учащимися.

Из свойств скалярного произведения особенную роль играет дистрибутивное. Подход к его изучению может быть различным. Целесообразным является рассмотрение дистрибутивности скалярного произведения векторов перед изучением теорем о перпендикулярности прямой к плоскости. При решении задач нужно знакомить учащихся с некоторыми векторными формулами, как например: $\vec{OM}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB})$, $\vec{OM}=\frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})$, которые существенно упрощают решение задач.

Итак, изучение векторного аппарата будет успешным, если его использовать к решению как теоретических вопросов стереометрии, так и задач на доказательство, содержательных геометрических задач.

Полезно обратить внимание учащихся на некоторую аналогию между векторной алгеброй и алгеброй чисел.

I В.Г.Болтянский, Анализ - поиск решения задачи, "Математика в школе", 1974, № I.

	Числа	Векторы
	Коммутативный закон умножения	
I	$ab = ba$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
	Ассоциативный закон умножения	
2	$abc = a(bc) = b(ac)$	$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$

и т.д.

Прямоугольная система координат в пространстве и связанные с ней вопросы / координаты точек пространства, расстояние между двумя точками, скалярное произведение векторов, нахождение угла между двумя векторами, уравнение плоскости, уравнение прямой/ раньше в средней школе не рассматривались.

Прежде чем объяснить учащимся понятие координат точки пространства, надо обобщить путем повторения следующие вопросы: взаимно однозначное соответствие между координатами точек прямой и множеством действительных чисел, между координатами точек плоскости и множеством пар действительных чисел. А затем дать учащимся понятие о координатах точки пространства. Следует подать в школе прямоугольную систему координат пространства, вводя понятие координатного базиса.

При этом можно ввести такие определения.

I. Векторное пространство называется одномерным, если существует один вектор $\vec{e}$ такой, что любой другой вектор $\vec{v}$ однозначно представляется в виде $\vec{v} = m\vec{e}$, где $m \in D$.

2. Векторное пространсто называется двумерным, если существуют два вектора $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ такие, что любой вектор $\vec{v}$ однозначно разлагается по этим векторам в виде $\vec{v} = m\vec{e_1} + n\vec{e_2}$, где $m, n \in D$

3. Векторное пространство называется трехмерным, если существует три вектора $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ такие, что любой вектор однозначно представляется в виде $\vec{v} = m\vec{e_1} + n\vec{e_2} + k\vec{e_3}$, где $m, n, k \in D$.

в математических классах либо на занятиях математического кружка можно рассмотреть и n -мерное пространство.

Важным в курсе математики средней школы является вопрос о нахождении расстояния между двумя точками пространства по их координатам.

Понятие сферы согласно программе изучается в X классе. Так как уравнение этой фигуры тесно связано с формулой расстояния между двумя точками, целесообразно изучать его в разделе "Поверхности вращения и тела вращения".

Изучая взаимное размещение сферы и плоскости в X классе, кроме доказательства теорем "по традиции" можно использовать доказательство при помощи координатного метода.

Новая программа по математике предлагает ознакомить учащихся с новым для школы вопросом - уравнением плоскости.

Изучение понятия уравнения плоскости, по всей вероятности, лучше начинать с уравнения вида $Ax+By+Cz+D=0$, так как учащиеся встречались с ним уже в курсе алгебры; кроме того, теоретическое изложение его несложно, а применение к задачам удобно. Можно начать обьяснение материала с вопроса: Какой геометрический образ соответствует уравнению $ax+by+cz=k$?

Далее следует остановиться на доказательстве утверждений:

I. Каждое уравнение первой степени с тремя переменными вида $Ax+By+Cz+D=0$, в котором хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля, определяет плоскость.

2. В прямоугольной системе координат каждая плоскость определяется уравнением первой степени с тремя переменными вида $Ax+By+Cz+D=0$, в котором хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля.

В IX классе учащиеся изучают взаимное размещение двух плоскостей. Рассматривается два случая: а/плоскости разные и имеют общую прямую; б/ плоскости параллельны. При изучении темы "Координатный метод в пространстве" полезно остановиться на нахождении угла между плоскостями, условиях параллельности и перпендикулярности плоскостей. Причем следует рассмотреть аналитическое задание этих условий. Последняя задача будет облегчена, если исходить из равенства: $\cos\varphi = \dfrac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$

Как показывает практика, учащиеся допускают много ошибок при решении стереометрических задач. Обьясняется это в первую очередь неглубоким знанием частью учащихся основных теорем геометрии. Недостаточное развитие пространственных представлений также не позволяет учащемуся видеть необходимые связи между элементами пространственных фигур. Устранению значительного количества ошибок, допускаемых школьниками при решении стереометрических задач, а также облегчению усвоения ими процесса решения могут способствовать координатный и векторный методы.

Конечно, не все задачи удобно решать с помощью указанных методов, но есть и такие, к которым иные методы не подходят. При этом они очень важны. Назрела необходимость пересмотра системы стереометрических задач для средней школы. Авторы новых учебников частично это сделали. Но работу в данном направлении следует продолжить.

В исследовании предложено решение с применением координатно-векторного метода и таких задач:

А. Каждое ребро параллелепипеда равно a. В одной из вершин параллелепипеда, в гранях его три угла острые, по 2α каждый. Определите обьем параллелепипеда.

Б. В прямой круговой цилиндр вписан параллелепипед, большая сторона которого равна a. Диагональ параллелепипеда образует с большей боковой гранью угол β, а с плоскостью основания - угол α. Определите площадь боковой поверхности цилиндра.

Раньше к решению подобных задач применяли только традиционные школьные методы. Но опыт работы показывает, что с помощь векторов и метода координат учащиеся решают подобные задачи быстрее и дают более рациональное обьяснение к ним.

Глава 3. Элементы аналитической геометрии на факультативных занятиях и в математических классах

Введение в школах факультативных занятий позволяет гармонично соединять обязательное для всех математическое образование с потребностями учащихся, которые имеют склонности к математике. Факультативные занятия по математике пользуются большой популярностью. Анализ статистических данных свидетельствует, что учащиеся, имея возможность посещать факультативные занятия по многим предметам, отдают предпочтение именно математике.

Характерные особенности факультативного курса математики четко выяснены в работах А.М.Арсеньева[1/], Г.Г.Масловой и В.М.Монахова[2/] и других авторов, которые справедливо считают факультативные занятия своеобразной лабораторией для проникновения нового содержания и методов обучения в обязательную школьную программу.

Автор настоящего исследования, ведая шефской работой в математических классах средней школы № 80 г.Днепропетровска, наблюдал за проведением здесь эксперимента по усвоению учащимися сведений из курса аналитической геометрии. Аналогичный эксперимент осуществлялся в математических классах в средних школах № 36, II8 и в школе юных математиков при Днепропетровском госуниверситете, а также на факультативных занятиях в средней школе № 9 г.Днепропетровска.

В программе для математических классов /VIII класс/ на раздел "Метод координат на плоскости" отведено I6 часов. К основным его вопросам относятся: координаты точек на прямой, плоскости, в пространстве; расстояние между двумя точками; деление отрезка в данном отношении; кривые второго порядка, уравнение линии, прямая в пространстве. К сожалению, в программе отсутствуют такие важные вопросы

1/ Арсеньев О.М., Факультативные занятия в школе, "Советская педагогика", I968, № 8

2/ Маслов Г.Г., Монахов В.М. "О перспективах развития факультативных занятий по математике в школе" "Советская педагогика", [illegible] из аналитической геометрии, как определение площади треугольника по координатам его вершин, полярная система координат. Их предлагает учащимся программа для факультативных занятий, которая включает также метод координат на плоскости, отводя в общей сумме 20 часов на изучение "Элементов аналитической геометрии" I/.

Проведенные исследования подтвердили целесообразность внедрения в практику факультативных занятий и классов с углубленным изучением математики некоторых задач, которые наилучшим образом решаются с помощью метода координат и векторного аппарата. Хотя в пособиях для факультативных занятий эти задачи нашли отражение, но методика их почти не разработана. Диссертация содержит подробные методические рекомендации по вопросам: нахождения расстояния между двумя точками, деления отрезка в данном отношении, нахождения площади треугольника, нахождения центра массы тела, а также задач нахождения уравнения линии.

Понятие линии и ее уравнения - важные вопросы математики. С наиболее простыми из них - гиперболой, параболой, окружностью, эллипсом и их уравнениями учащиеся встречаются в различных разделах математики, при изучении физики, астрономии, черчения. Программа для математических классов предлагает изучать тему: "Уравнение линии. Задачи на геометрические места точек". И это не случайно, ибо перевод геометрических понятий на язык координат позволяет геометрические задачи, имеющие определенные характеристические свойства рассматривать при помощи уравнений, которые изучаются в курсе средней школы и для решения которых существуют общие формулы.

При решении таких задач на факультативных занятиях мы исходили из того, что:

I/ с уравнением линии учащиеся встречаются в восьмилетней школе /уравнение прямой, параболы, гиперболы, окружности/:

I/ Журнал "Математика в школе", № I, I975.

2/ понятие геометрического места точек, или по современной терминологии "множества точек плоскости", которые имеют определенные характеристические свойства , также известны учащимся /окружность/.

Методику составления уравнения линии можно проиллюстрировать, например, на такой задаче:

Найдите центр и радиус окружности, которая проходит через точку / 2; I/ и касается обеих осей координат.

При решении задач на составление уравнений линии необходимо обратить внимание учащихся на то, что относительно любой точки можно сказать принадлежит она линии или нет. Для проверки достаточно подставить ее координаты в уравнение линии. Если числовые значения координат точки удовлетворяют уравнению, тогда точка лежит на линии.

После рассмотрения решения нескольких задач на составление уравнения линии по ее характеристическим свойствам предлагаем учащимся схему решения:

I/ Выбираем соответствующую систему координат.

2/ Аналитически выражаем характеристические свойства линии.

3/ Полученные соотношения между координатами точек, если это возможно, упрощаем.

С уравнениями линий, которые имеют определенные характеристические свойства, тесно связаны уравнения кривых второго порядка: гиперболы, параболы, окружности и эллипса.

Их изучение математическая литература предлагает вести по-разному. Так, большинство учебников [I] рекомендует изучать параболу, гиперболу, окружность и эллипс как множества точек,

I/ Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии, М., "Наука", I968, Білоусова В.П. та інш., Аналітична геометрія, К., "Радянська школа", I957; Ефимов Н.В., Краткий курс аналитической геометрии, М., "Наука", I969.

которые имеют определенные характеристические свойства

Другие[1] показывают эллипс как деформацию окружности с заданными коэффициентом пропорциональности.

В диссертациях И.Я.Баркова, Е.С.Петровой, Т.В.Семеновой значительное место отводится изучению на факультативных занятиях кривых второго порядка. Так, например, И.Я.Барков рассматривает задачу: "Составить уравнение геометрического места точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояния к даной точке F и к данной прямой AB есть величина постоянная и равна e, где $e > 1$.

С этой задачи начинают изучение кривых второго порядка в немецкой школе.

Автор данной работы проводил эксперимент по изучению кривых второго порядка с учащимися VIII класса и в математических девятых классах. Во время эксперимента для проверки усвоения указанных вопросов учащимся предлагалось:

1/ изучение канонических уравнений гиперболы, параболы, окружности, эллипса, исходя из их характеристических свойств;

2/ изучение уравнений тех же кривых в зависимости от величины e.

Первое задание воспринимается учащимися легче, ибо при этом им приходится иметь дело с общими методами математики. Построение кривых второго порядка становится им более понятным, а исследование некоторых свойств уравнений – более доступным. Кроме того, благодаря такому подходу связь между алгеброй и геометрией усиливается.

После исторического экскурса надо объяснить учащимся, что при пересечении любого кругового конуса секущей плоскостью α, которая не проходит через его вершину, получим линию l, названную коническим сечением. При этом различают три вида линий:

1/ Пахалов [illegible] и др. "Аналитическая геометрия", М., Учпедгиз, [illegible]; журнал "Квант", М., "Наука", 1975, № 1.

эллипс, параболу, гиперболу.

Изучение канонических сечений лучше начинать с параболы. Сейчас с ней учащихся знакомят в VI классе. В раздел "Одночлены" входит "Функция $y=ax^2$ и ее график". Новая программа предлагает знакомить учащихся VII класса с функцией $y=ax^2+bx+c$ и ее графиком, причем изучение этого материала осуществляется в такой последовательности: 1/ $y=ax^2+c$, 2/ $y=a(x+m)^2$, 3/ $y=a(x+m)^2+k$. Поэтому изучение параболы на факультативных занятиях и в математических классах следует начинать с повторения.

Повторив свойства и построение параболы $y=ax^2+bx+c$ целесообразно перейти к параболе, заданной каноническим уравнением.

Желательно ввести некоторые понятия, а именно: фокус, директрисса, фокальный параметр, фокальная ось параболы. Полезно исследовать форму параболы.

При рассмотрении вопроса построения параболы различными способами полезна демонстрация фрагмента "Некоторые способы построения параболы" из диафильма "Парабола в природе и технике".

Уравнения эллипса и гиперболы целесообразно выводить одновременно. Начинать объяснение следует из определений, причем полезно показать и векторный метод получения их уравнений.

С целью развития в учащихся творческой активности, критического отношения к выбору способа доказательства математического утверждения полезно сопоставить на занятии использование координатного и векторного методов при доказательстве теорем и решении задач на доказательство. Для более глубокого восприятия их решения целесообразно начинать изучение из рассмотрения несложных теорем.

Наибольшую возможность глубокого изучения прямой, ее уравнения предоставляют факультативные занятия и математические классы. В математической литературе находим вывод уравнения прямой при помощи векторного аппарата, так и без него.

Как показывает опыт работы с учащимися СШ № 9 г. Днепропетровска и школы юных математиков при ДГУ, лучше всего начинать изучение уравнения прямой с угловым коэффициентом, ибо с ним учащиеся уже несколько знакомы.

/Изучение различных видов уравнения прямой в зависимости от способа их задания возможно и в варианте, изложенном автором в работе "Метод координат на площині"/.

Дальше надо ознакомить учащихся с уравнением прямой, которая проходит через данную точку с заданным угловым коэффициент и уравнением прямой, которая проходит через две заданные точки.

Возможно изучение различных видов уравнения прямой, избрав за основное $y-y_1=k(x-x_1)$. А векторный метод в использовании к выводу уравнений прямой можно свести к следующему алгоритму:

1/ определить координаты произвольной точки M_0 искомой прямой;

2/ избрать произвольную точку M прямой с координатами x; y

3/ записать координаты вектора $\overrightarrow{M_0M}$;

4/ из условия задачи найти вектор $\vec{p}$, коллинеарный вектору $\overrightarrow{M_0M}$, или перпендикулярный ему;

5/ записать в координатной форме условие коллинеарности или перпендикулярности векторов

Требовать от учащихся запоминания составлений уравнений по алгоритму не следует. В процессе решения, как правило, учащиеся запоминают после решения нескольких задач схему составления уравнения прямой.

При изучении темы полезно все виды уравнений прямой свести в таблицу:

Условие	Вид уравнения	Название уравнения
$A \neq 0,\ B = 0,\ C = 0$	$x = 0$	Уравнение оси ординат
$A = 0,\ B \neq 0,\ C = 0$	$y = 0$	Уравнение оси абсцисс
$A \neq 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0$	$y = kx + b$	Уравнение прямой с угловым коэффициентом
$A = 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0$	$y = b$	Прямая, параллельная оси абсцисс и удалена от нее на b единиц
$A \neq 0,\ B = 0,\ C \neq 0$	$x = a$	Прямая, параллельная оси ординат и удалена от нее на a единиц
$A \neq 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0$	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	Уравнение в "отрезках"
$A \neq 0,\ B \neq 0,\ C = 0$	$y = kx$	Уравнение прямой, проходящей через начало координат

Решения ряда задач, связанных со степенной, показательной и логарифмической функциями, значительно упрощается, если графики указанных функций строить в системе координат с логарифмическими шкалами на осях. С некоторыми вопросами данной тематики, как показывает наш эксперимент, учащихся можно ознакомить не только на занятиях математического кружка или факультативных занятиях, но и на уроках в обычных общеобразовательных средних школах, так как во многих случаях более удобны логарифмическая и полулогарифмическая сетки, которые можно использовать для построения на них графиков, номограмм, графического решения уравнений и систем и т.д.

Учащимся следует продемонстрировать изображение в логарифмической системе координат зависимостей вида $y = Cx^n$, часто встречаемых на практике; показать решение с помощью графиков на плоскости логарифмических координат таких практических задач, как возведение числа в квадрат, куб, извлечение квадратного или кубического корней.

Параллельное использование прямоугольной и логарифмической систем координат на занятиях позволит учащимся убедиться в преимуществах второй системы при решении ряда задач математики. При изучении логарифмической системы координат целесообразно рассмотрение задач на построение эмпирических формул наиболее простого вида.

Новая программа по математике предлагает знакомить учащихся VIII класса с таблицами десятичных логарифмов и вычислением выражений при помощи таблиц. Эта тема хорошо освещена во многих пособиях. Но при изучении ее полезно было бы объяснить учащимся технику логарифмических вычислений с помощью графика функции $y=10^x$, построенного как в прямоугольной так и в полулогарифмической системах координат. Полезно познакомить учащихся на факультативных занятиях и в математических классах с косоугольной и полярной системами координат.

Методика данного вопроса изложена в работе автора "Метод координат на площині".

В диссертации обоснованы содержание и место темы: "Прямая в пространстве", при рассмотрении которой наиболее рационально использовать координатно-векторный метод. Целесообразно с учащимися рассмотреть уравнения прямой в пространстве в таком порядке: векторное параметрическое уравнение прямой $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{u}$; параметрические

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt; \end{cases}$$

канонические $\dfrac{x-x_0}{\ell} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$;

уравнения прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1};$$

прямую, как линию пересечения двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

В нашей работе приведены образцы решения упражнений на прямую в пространстве. Этот материал рекомендуем для классов с углубленным изучением математики и математических кружков. В результате проведенной экспериментальной работы подтверждена возможность успешного усвоения учащимися элементов аналитической геометрии. Расширение круга сведений аналитической геометрии в школьном курсе математики позволяет более корректно подать большую часть вопросов геометрии, а использование координатно-векторного метода упрощает решение значительного количества сложных задач этого курса, способствует повышению качества знаний учащихся, эффективности процесса обучения.

Результаты проведенного исследования позволяют сделать следующие выводы:

I. С методом координат на плоскости следует уже ознакомить учащихся У класса, а в УI-УП классах целесообразно сделать этот метод основным при изучении функций, уравнений.

В УI-УП классах надо систематически обращаться к графическому методу при изучении свойств функций, вводить понятие графика уравнения, использовать графики при решении уравнений, их систем. Систему графических упражнений, содержащуюся в учебниках алгебры для УI и УП классов, необходимо дополнить нестандартными задачами.

2. При решении неравенств и их систем в восьмилетней школе целесообразно исходить из их геометрической интерпретации на координатной плоскости.

3. На первом этапе изучения уравнения и графика прямой в школе /УI-УП классы/ оправдано объяснение материала индуктивно-дедуктивным методом. А в УШ классе надо предложить учащимся строгое доказательство того положения, что графиком линейной функции есть прямая. Возможность для этого предоставляется

после изучения подобия треугольников и тригонометрических функций. Различные виды уравнений прямой рекомендуются для рассмотрения на факультативных занятиях и в математических классах.

4. Желательно ознакомить восьмиклассников с логарифмической и полулогарифмической системами координат и их использованием при изображении графиков степенных, показательных и логарифмических функций, а также с составлением эмпирических формул функциональных зависимостей с помощью применения графиков.

5. С элементами аналитической геометрии тесно связан векторный метод. С учащимися средней школы необходимо выяснить:
1/ определение вектора как параллельного переноса; 2/ понятие равных и противоположных векторов, их построение; 3/ векторные операции, скалярное произведение и его свойства; 4/ применение векторного аппарата для решения геометрических задач как на плоскости, так и в пространстве.

6. Учащихся IX-X классов следует ознакомить с прямоугольной системой координат в пространстве и связанными с ней следующими основными вопросами: координаты точек пространства, расстояние между двумя точками, скалярное произведение векторов, нахождение величины угла между двумя векторами, уравнение плоскости, условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей, вид уравнения плоскости в зависимости от способа ее задания относительно прямоугольной системы координат в пространстве.

7. Очень важно ознакомление учащихся средней школы с уравнениями кривых второго порядка и их изображением на координатной плоскости. Без них немыслимо изучение не только многих разделов математики, но и таких школьных предметов, как физика, астрономия, география, черчение. Полезно проводить изучение кривых второго порядка в последовательности:парабола,гипербола, эллипс.

С эллипсом можно наглядно познакомить учащихся еще в VII классе на уроках алгебры при изучении графиков уравнений. Более глубоко этот вопрос рассматривается на факультативных занятиях и в математических классах. Знание эллипса целесообразно использовать в X классе при изучении обьемов тел и определенного интеграла, на уроках физики и астрономии.

Вывод канонических уравнений параболы и гиперболы целесообразно отнести на факультативные занятия и в математические классы. Здесь же рекомендуем углубленно изучить вопрос о построении графиков и кривых второго порядка и рассмотреть их свойства.

8. Изучение уравнений прямой в пространстве целесообразно проводить в математических классах. При этом рекомендуем такую последовательность ознакомления: параметрические уравнения прямой, канонические, уравнение прямой, проходящей через две данные точки, заданные двумя общими линейными уравнениями. Желательно рассмотреть такие важные понятия, как угол между двумя прямыми, условие перпендикулярности и параллельности прямой и плоскости, условие того, что прямая принадлежит плоскости. Рационально при изложении данного материала использование векторного аппарата и иллюстрирование решением задач.

9. Так как успех в формировании научных понятий школьников в значительной степени зависит от теоретической и методической подготовки учителя математики, необходимо в вузовских курсах методики преподавания математики, на практических занятиях по геометрии и алгебре особое внимание уделять разделам аналитической геометрии и векторного аппарата, связанными с программными вопросами школьного курса математики.

Результаты исследования диссертантом докладывались на научно-методических конференциях преподавателей Днепропетровского госуниверситета, на научно-теоретических конференциях кафедры математики и методики математики при ДГПИ. По теме диссертации автор выступал с докладами и лекциями на областных педагогических чтениях /Днепропетровская область/, на районных конференциях учителей математики г.Днепропетровска и Днепропетровской области, на областных курсах усовершенствования квалификации учителей математики при Днепропетровском институте квалификации учителей. Сообщения получили одобрения. Основные результаты исследований опубликованы в следующих работах:

I. Метод координат на плоскости, Днепропетровск, изд-во ДГУ, I969 на укр. языке.

2. Краткое пособие по математике с анализом ошибок абитуриентов, державших экзамены в вузы города Днепропетровска в I966-I967 г.г., Днепропетровск, изд-во ДГУ, I967 / в соавторсте с Задорожным И.И., Соломко И.П./

3. Решение некоторых задач по геометрии и анализ ошибок, допускавшихся абитуриентами, Днепропетровск, изд-во ДГУ, I969 /в соавторстве с Лейбиной Л.П., Яценко Н.Я./.

4. Математика. Методические указания, учебные и контрольные задания, Днепропетровск, изд-во ДГУ, I969 / в соавторстве с Лейбиной Л.П., Яценко Н.Я./.

5. О приемных экзаменах в вузы СССР- Днепропетровский государственный университет, ж. Математика в школе, М., № 2, I970.

6. Тригонометрия, Областная типография Днепропетровского обл. управления по печати, I97I.

7. Экзаменационные письменные работы по математике, Днепропетровск, изд-во ДГУ, I973 г. на украинском языке / в соавторстве Грицаенко Н.П. и др./.

8. Графики некоторых функций. Решение неравенств, Днепропетровск, изд-во ДГУ, I969 /в соавторстве с Лейбиной Л.П., Яценко Н.Я./.

9.Некоторые вопросы методики проведения практических занятий по аналитической геометрии, статья в сб."Вопросы педагогики и методики преподавания в высшей школе", изд-во ДГУ, 1974 / в соавторстве с Погодичевой Н.А./.

10.Элементы номографии на занятиях по методике математики, статья в сб. "Вопросы педагогики и методики преподавания в высшей школе", изд-во ДГУ,1974.

11.Задачи по элементарной математике с решениями и анализом, Днепропетровск, изд-во ДГУ, 1974 / в соавторстве с Лейбиной Л.П./.

12.Элементы теории множеств на факультативных занятиях и методика их изложения, К., "Радянська школа", 1974 на укр. языке /в соавторстве с Грицаенко Н.П./.

13.Экзаменационные письменные работы по математике, Днепропетровск, изд-во ДГУ, 1975, на укр. языке / в соавторстве с Грицаенко Н.П. и др./.

14.Специализированный, математический,статья в газете "Днепровская правда" от 4 июля 1971 г.

15.Учатся будущие математики, статья в газете "Днепр вечерний" от 27 мая 1972 г. /в соавторстве с Белой Н.А./.

16. Растить будущих ньютонов, статья в газете "Днепр вечерний" от 8 мая 1973 г.

17. Университет - школе, статья в газете "Зоря" от 30 июля 1974 г.

Подписано к печати 22. 04. 1976 г.
г. Днепропетровск, ул. Генерала Пушкина 4.
Ротапринт ДГУ. Зак. 23 Тир. 200