Министерство просвещения УССР
Киевский государственный педагогический институт
им. А.М. Горького

На правах рукописи

Владимир Владимирович Терлецкий

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И КОМПЛЕКСНЫМ ПАРАМЕТРОМ

№ 01.003 /дифференциальные и интегральные уравнения/

/Диссертация написана на русском языке/

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико - математических наук

Киев - 1973

Работа выполнена в Киевском государственном педагогическом

институте им. А.М.Горького

Научные руководители :

доктор физико - математических наук,
профессор С.Ф. ФЕЩЕНКО,

доктор физико - математических наук,

профессор Н.И. ШКИЛЬ.

Официальные оппоненты :

доктор физико - математических наук,

профессор Ю.А. РЯБОВ,

кандидат физико - математических наук,

доцент Н.И. ТЕРЕЩЕНКО.

Ведущее учреждение - Белорусский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. В.И. Ленина.

Автореферат разослан "______" 1974г.

Защита диссертации состоится "_____" 1974г./14ч.,ауд.431/ на заседании Учёного Совета физико - математического факультета Киевского государственного педагогического института

им. А.М.Горького.

Отзывы просим присылать по адресу :

252030 г. Киев - 30, ул. Пирогова, 9.

С диссертацией можно познакомиться в библиотеке института.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ СОВЕТА

кандидат физико - математических наук,

доцент /И. ТЫЧИНА/

Многие вопросы физики и техники приводят к решению краевых задач, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений и некоторыми краевыми условиями, задающими значения этих решений в двух /"билокальные" условия/ и больше /"полилокальные" условия / точках отрезка вещественной оси, на которой принимает значения независимая переменная. Исследованию данного вопроса посвящены труды многих ученых.

Фундаментальные результаты в этой области были получены Е.Л. Буницким, Ш.Ж.Вале - Пусеном, Х.Вильдером,А.С.Смогоржевским, З.Ф. Суриковой, М.Г.Крейном, М.В.Келдышем, М.А.Красносельским, А.Ю.Левиным, О.А.Олейник и др.

Однако точное решение упомянутых краевых задач удается получить лишь в отдельных случаях. Поэтому на практике прибегают к различным приближенным методам, среди которых наиболее распространенными являются итерационные методы с их различными модификациями,асимптотические и численные методы.

Реферируемая работа посвящена применению асимптотических методов к решению краевых задач,описываемых системами обыкновенных линейных дифференциальных уравнений,содержащих комплексный параметр.

Асимптотические методы,зародившиеся еще в работах Ж.Лиувилля, А.Пуанкаре, Л.Шлезингера, Ж.Биркгофа, Я.Д.Тамаркина, в настоящее время находят широкое применение при решении различных типов задач.

Построению решений дифференциальных уравнений в виде асимптотических и равномерно сходящихся рядов посвящены работы М.Н.Боголюбова, А.Н.Тихонова, В.Трджидзинского, Ю.А.Митропольского,Н.П.Еругина, С.Ф.Фещенко, И.З.Штокало, К.Я.Латышевой,В.В.Хорошилова, Л.И. Донской, Ю.Л.Далецкого, С.Г.Крейна, И.М.Рапопорта, Н.И.Шкиля,М.В. Федорюка, И.А.Павлюка,В.Вазова, Н.Я.Лященко, Н.Левинсона, Ю.С.Богданова, М.Я.Рассулова.

Идея асимптотического решения краевой задачи состоит в том, что строится не само точное решение, а его асимптотическое разложение. Хотя при этом степенные ряды, при помощи которых представляются решения, являются расходящимися, однако формальное решение, полученное путем обрыва рядов на m - м члене оказывается весьма пригодным для целого ряда практических расчетов, а также исследования качественной картины. Построенное таким образом решение имеет асимптотический характер в том смысле, что оно стремится к соответствующему точному решению не с увеличением m, а при стремлении к предельному значению некоторого параметра, по степеням которого построен асимптотический ряд.

Преимущество асимптотических рядов заключается и в том, что ими удобно пользоваться при вычислениях на ЭВМ.

Одними из первых исследований посвященных асимптотическому построению решений краевых задач, были работы Я.Д.Тамаркина. Как известно, асимптотические решения дифференциальных уравнений существенно зависят от поведения корней уравнения

$$\det\left[A^{(0)}(\tau) - \lambda E\right] = 0 , \qquad /1/$$

которое аналогично характеристическому уравнению для случая дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Я.Д.Тамаркин рассмотрел краевую задачу

$$L(y) \equiv \frac{d^n y}{d\tau^n} + \rho a_1(\tau,\rho)\frac{d^{n-1}y}{d\tau^{n-1}} + \dots + \rho^{n-1} a_{n-1}(\tau,\rho)\times \qquad /2/$$

$$\times \frac{dy}{d\tau} + \rho^n a_n(\tau,\rho) = 0,$$

$$K_i(y) \equiv \sum_{s=0}^{n} \rho^{(s)} K_i^{(s)}(y) = 0, \qquad /3/$$

где $K_i^{(s)}(y) = \sum_{k=1}^{n}\left\{ \alpha_{ik}^{(s)} y^{(k-1)}(a) + b_{ik}^{(s)} y^{(k-1)}(b) + \int_a^b \beta_i(\tau) y(\tau)\, d\tau \right.$

$$(i = 1, 2, \dots, n;\ s = 0, 1, \dots, n),$$

в случае простых характеристических корней, соответствующих уравнению / 2 /. Им получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций задачи / 2/,/ 3 /, а также доказана теорема о разложимости произвольной функции в ряд.

Краевые задачи исследовались также в работах С.Ф.Фещенко. С.Ф.Фещенко рассмотрел систему линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами и разработал метод асимптотического представления интегралов неоднородных систем в случае "резонанса" и "нерезонанса", когда корни характеристического уравнения простые. Им доказана известная теорема об асимптотическом расщеплении систем линейных дифференциальных уравнений на подсистемы более низкого порядка.

Однако теорема С.Ф.Фещенко не дает возможности получить асимптотического решения системы дифференциальных уравнений, когда среди характеристических корней появляются кратные, каждому из которых отвечает кратный элементарный делитель. Ввиду значительной сложности случай кратных корней долгое время оставался не исследованным, хотя первые частичные результаты для систем второго порядка были получены Я.Д.Тамаркиным. Лишь в последнее время этот случай был всесторонне исследован в работах Н.И.Шкиля, А.Г.Илюхина, Н.Н.Моисеева, Й.Сибуйя, И.И.Старуна, В.К.Григоренко, в работах автора [1] -[5] и др. Оказалось, что способы построения асимптотических рядов,представляющих интегралы дифференциальных уравнений, зависят также от поведения элементарных делителей,которые соответствуют кратному характеристическому корню.

В работах Н.И.Шкиля исследовалась система

$$\frac{dy}{dt} = A(\tau,\varepsilon)y(\tau,\varepsilon) + \varepsilon B(\tau,\varepsilon)e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \qquad /\ 4\ /$$

где $A(\tau,\varepsilon) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A^{(s)}(\tau)$ -действительная $(n \times n)$

матрица, ρ - малый действительный параметр, $\tau = \rho t$ -действительная переменная, принимающая значения на сегменте $[0, L]$, причем предполагалось, что характеристические корни разбиваются на p взаимно не пересекающихся групп, и в каждой группе находится один корень постоянной кратности k_j $(j = 1, 2, \dots, p)$

Для системы /4/ Н.И.Шкилем построено общее асимптотическое решение в случаях, когда каждому корню отвечает один элементарный делитель кратности k_j, несколько (ℓ) элементарных делителей и простые элементарные делители. Рассмотрены явления "резонанса" и "нерезонанса". При этом доказана асимптотическая сходимость формальных решений к точному, если выполняются условия

$$Re\, \lambda_j^{(0)}(\tau) \leq 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, p), \tag{5}$$

где $\lambda_j^{(0)}(\tau)$ -характеристические корни уравнения /I/.

Для многих практических задач, в частности для краевых, необходимо знать фундаментальную матрицу системы

$$\frac{dy}{d\sigma} = A(\tau, \rho)\, y(\tau, \rho), \tag{6}$$

где $\tau \in [a, b]$ -независимая переменная, ρ - малый по модулю комплексный параметр, $\tau = \sigma \rho$. Заметим, что интегрировать систему /6/ методом последовательных приближений невозможно, т.к., перейдя в /6/ к дифференцированию по τ, получим

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\rho} A(\tau, \rho)\, y(\tau, \rho). \tag{7}$$

Из /7/ следует, что при $A^{(0)}(\tau) \neq 0$ последовательные приближения

$$y_s(\tau, \rho) = \frac{1}{\rho} \int_a^{\tau} A(t, \rho)\, y_{s-1}(t, \rho)\, dt$$

неограниченно возрастают при $\rho \to 0$. Следовательно, ряд $\sum_{s=0}^{\infty} y_s(\tau, \rho)$ будет расходится для всех достаточно малых $|\rho|$.

Всвязи с этим первая глава рефирируемой работы посвящена асимптотическому представлению фундаментальной матрицы решений системы/6/ в случае, когда характеристическое уравнение /I/ имеет корни постоянной кратности на сегменте $[a, b]$. При этом предполагается, что параметр ρ комплексный и малый по модулю.

В § I и § 2 приводятся основные положения из линейной алгебры, общей теории дифференциальных уравнений, а также изложена постановка задачи.

§ 3 посвящен построению фундаментальной матрицы решений системы /6 / в случае, когда уравнение /I/ имеет один корень кратности n и ему отвечает n простых элементарных делителей.

В § 4 рассматривается вопрос об асимптотическом представлении фундаментальной матрицы решений системы /6/, когда уравнение / I / имеет один корень кратности n и ему отвечает один элементарный делитель той же кратности. В конце параграфа решается пример.

Следует подчеркнуть, что ввиду предположения о возможной расходимости рядов, представляющих коэффициенты системы / 6 / и формального построения асимптотических разложений фундаментальной матрицы решений, очень большое значение имеют теоремы об асимптотическом стремлении формальной фундаментальной матрицы к истинной фундаментальной матрице решений системы /6/.

В процессе практического использования асимптотических рядов всегда возникает вопрос, сколько членов ряда необходимо использовать, чтобы получить требуемую точность.

Всвязи с этим § 5 посвящен доказательству асимптотических свойств формальной фундаментальной матрицы решений системы / 6 /. Благодаря рассмотрению комплексного параметра, удалось значительно ослабить ограничения, накладываемые на систему /6/, по сравнению с/5/. Этот результат сформулирован в виде следующей леммы.

Л е м м а . Если функция

$$\omega^{(0)}(\tau) = \int_0^{\tau} \lambda^{(0)}(t)\,dt$$

такова, что $\varphi \le \theta(\tau) \le \Psi$,

где $\theta(\tau) = \arg \omega^{(0)}(\tau)$, φ и Ψ -постоянные числа, удовлетворяющие условию $|\Psi - \varphi| < \pi$,

то в комплексной плотности ρ существует такой сектор

$$S = \begin{cases} \Psi - \frac{3}{2}\pi < \alpha \\ \varphi - \frac{\pi}{2} > \alpha \end{cases} \qquad (\alpha = \arg \rho),$$

в котором

$$Re\ \frac{1}{\rho}\omega^{(0)}(\tau) < 0$$

/8/

В конце параграфа доказана такая теорема.

Т е о р е м а I. Если $A^{(s)}(\tau)$ $(s = 0, 1, 2, \ \ )$ бесконечно дифференцируемы по $\tau \in [a, b]$, а $A^{(1)}(\tau)$ такова, что ее элемент $\{a^{(1)}(\tau)\}_{n1} \neq 0$, то при выполнении условий леммы формальная матрица

$$\Phi(\tau, \rho) = U(\tau, \mu) H(\tau, \rho)$$

будет асимптотическим представлением истинной фундаментальной матрицы $Y(\tau, \rho)$, т.е. будет иметь место оценка

$$Y(\tau, \rho) = \Phi_m(\tau, \rho) + O(\rho^{\frac{m+1-n(n-1)}{n}}),$$

где $$\Phi_m(\tau, \rho) = \sum_{s=0}^{m} \mu^s U^{(s)}(\tau) H_m(\tau, \rho), \quad \mu = \sqrt[n]{\rho}, \qquad /9/$$

причем квадратная $(n \times n)$ матрица $H_m(\tau, \rho)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d H_m(\tau, \rho)}{d\sigma} = \sum_{s=0}^{m} \mu^s \Lambda^{(s)}(\tau) H_m(\tau, \rho).$$

Хотя правая часть выражения /9/ и содержит отрицательные степени малой величины $|\rho|$, однако при увеличении m всегда можно достигнуть требуемой точности.

В § 6 построено асимптотическое представление фундаментальной матрицы системы дифференциальных уравнений / 6 /при наличии нескольких (p) характеристических корней $\lambda_j^{(0)}(\tau)$ кратности k_j $(j=1,2,\dots,p)$,каждому из которых отвечает один элементарный делитель той же кратности.

Выше упоминалось,что,используя теорему С.Ф.Фещенко,систему /6/ можно расщепить на p подсистем и свести данный случай к предыдущему. Однако теорема С.Ф.Фещенко справедлива при выполнении условия

$$Re\,(A^{(0)}(\tau)y,y)\leq 0$$

Поэтому,чтобы избежать его, в § 6 указан способ построения асимптотического представления фундаментальной матрицы решений нерасщепленной системы. Здесь же получена асимптотическая оценка вида

$$y(\tau,\rho)=\Phi_m(\tau,\rho)+O\left(\rho^{\frac{m+1-k(k-1)}{k}}\right), \qquad /10/$$

где $k=\max\limits_{1\leq j\leq p} k_j$

В § 7 и § 8 построено асимптотическое представление фундаментальной матрицы системы /6/ в предположении,что характеристическое уравнение / I / имеет один корень кратности n и ему отвечает $p>1$ элементарных делителей кратности k_j $(j=1,2,\dots,p$, $k_1+k_2+\dots+k_p=n)$. Здесь рассмотрены два случая,когда

$k_1=k_2=\dots=k_p=k$ и $k_1>k_2>\dots>k_p$.

Для обоих случаев получена асимптотическая оценка вида /Io /.

Во второй главе исследуются асимптотические решения краевых задач,порожденных системой уравнений вида / 6/ и краевыми условиями

$$K(y)\equiv\sum_{i=1}^{z}P_i(\rho)\,y(a_i,\rho)=0.$$

Задача /6/, /II/,при $z=2$,называется "билокальной" краевой задачей, в случае,когда $z>2$ — "полилокальной" краевой задачей.

Используя результаты §§ 3-7, в § 9 указан способ построения асимптотического представления матрицы Грина "билокальной" краевой задачи, а также получена ее асимптотическая оценка, когда характеристическое уравнение / I / имеет один корень кратности n и ему отвечает один элементарный делитель той же кратности, в случае p характеристических корней кратности k_j $(j=1,2,\dots,p)$, каждому из которых отвечает один элементарный делитель кратности k_j, а также в случае одного кратного корня, которому соответствует несколько кратных элементарных делителей.

В § 10 указан способ построения асимптотических представлений собственных значений "билокальной" краевой задачи. Решение вопроса о существовании собственных значений упомянутой краевой задачи сводится к нахождению корней уравнения

$$[N_0]+[N_1]e^{\frac{1}{\rho}m_1}+\dots[N_\ell]e^{\frac{1}{\rho}m_\ell}=0,$$

где $[N_j]=\sum_{s=0}^{m}\rho^s N_j^{(s)}+O(\rho^{\frac{m+1-k(k-1)}{k}})$ $(j=1,2,\dots,\ell)$ /I2 /

Здесь доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 2. Если $N_0^{(0)}$ и хотя бы одно из чисел $N_j^{(0)}$ $(j=1,2,\dots,\ell)$ отличны от нуля, кроме того m_j $(j=1,2,\dots,\ell)$ удовлетворяют условию $m_j=n_j\omega$, где n_j – натуральные числа, то собственные значения однородной краевой задачи разбиваются на γ групп и в каждой группе имеют место асимптотические представления

$$\rho_{\nu\tau}=\frac{\omega}{\delta_\tau+2\pi i\nu}+O(\nu^{-\frac{m+1-k(k-1)}{k\alpha_\tau}}),\qquad /I3 /$$

где $i=\sqrt{-1}$; $\nu=\nu_0,\ \nu_0+1,\dots$; $\tau=1,2,\dots,\gamma$, δ_τ,α_τ –постоянные, которые определяются из уравнения / I2/.
В конце параграфа решается пример.

В § II строятся асимптотические представления собственных векторов "билокальной" краевой задачи, которые соответствуют собственным значениям / I3 /, а также решается пример,иллюстрирующий изложенную теорию.

§ I2 посвящен решению "полилокальной "краевой задачи (272). Здесь определены условия,при которых существует матрица Грина, а также исследована методика построения ее асимптотического представления, получены асимптотические формулы для собственных чисел и собственных векторов с указанием их асимптотических оценок,решаются примеры.

Известно,что многие практические задачи приводят к решению дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами.

Всвязи с этим § I3 посвящен решению краевой задачи вида /6/, /II/, когда коэффициенты системы дифференциальных уравнений имеют разрывы первого рода в некоторых точках конечного интервала вещественной оси. Эти задачи интересны тем,что построенные решения на интервалах непрерывности определяются таким образом,чтобы они удовлетворяли краевым условиям,заданным в точках разрыва. В этом параграфе получены асимптотические формулы для матрицы Грина,собственных чисел и собственных векторов краевой задачи. В конце параграфа решается пример.

Результаты,изложенные в диссертации,докладывались на семинаре по дифференциальным уравнениям в Институте математики АН БССР, на семинаре по дифференциальным уравнениям Киевского государственного университета им.Т.Г.Шевченко, на семинаре по исследованию нелинейных цепей,систем и сред при Киевском политехническом институте, на отчетных конференциях профессорско-преподавательского состава Киевского государственного педагогического института им.А.М.Горького .

Основные положения диссертации изложены в следующих публикациях:

I. В.В.Терлецкий. Асимптотическое решение системы линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами в комплексной области. ДАН УССР,сер.А,I0,I972 / на укр.языке/.

2. Н.И.Шкиль,В.В.Терлецкий. О краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексным параметром.Диф. уравн.,4,1973.

3. В.В.Терлецкий. О применении асимптотических методов к решению задач на собственные значения. ДАН УССР,сер.А,6,1973 / на укр. языке/.

4. Н.И.Шкиль,В.В.Терлецкий. Об асимптотическом решении краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В сб.: "Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений",К.,1973.

5. В.В.Терлецкий. Асимптотическое решение краевой задачи с разрывными коэффициентами. В сб.:"Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений",К.,1973.

БЮ - 02044.Подписано к печати 21.12.73.Заказ №1,т.200

Винницкий пединститут,лаборатория фотоофсетной печати