МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им.А.М.ГОРЬКОГО

На правах рукописи

Ю.С.РАМСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

/001 - математический анализ/

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1968

Работа выполнена на кафедре математики Киевского государственного педагогического института им.А.М.Горького.

Научный руководитель - кандидат физико-математических наук, доцент Н.Я. ЛЯЩЕНКО

Официальные оппоненты:

1. Доктор физико-математических наук, профессор САУЛЬЕВ Владислав Климентьевич.
2. Кандидат физико-математических наук, доцент БОНДАРЕНКО Павел Степанович.

Ведущее предприятие / научно-исследовательское учреждение/ Институт математики АН УССР.

Автореферат разослан "   "   1968 г.

Защита диссертации состоится "   "   1968 г. на заседании Ученого Совета Киевского государственного педагогического института им.А.М. Горького /бульвар Шевченко 22/24/.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке.

Ученый секретарь Совета

Как известно, численное интегрирование состоит в приближенной замене интеграла линейной комбинацией некоторого количества значений подинтегральной функции и ее производных, т.е.

$$\int\limits_{D} p(x) f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=1}^{N_i} A_{ki}^{(l)} f^{(i)}(x_{ki}^{(l)}) + R_l(f), \qquad /1/$$

где D - область n-мерного евклидового пространства E_n, x - вектор в пространстве E_n, $p(x)$ -весовая функция, $A_{ki}^{(l)}$ - коэффициенты формулы /действительные числа/, $x_{ki}^{(l)}$ - узлы формулы, находящиеся в области определения функции $f(x)$, $R_l(f)$ - остаточный член формулы. Каждому значению $l = 1, 2, 3, \ldots$ отвечают свои значения узлов $x_{ki}^{(l)}$ и коэффициентов $A_{ki}^{(l)}$.

Диссертация посвящена изучению сходимости формулы /1/, т.е. исследованию условий, при выполнении которых можно гарантировать стремление $R_l(f)$ к нулю при $l \to \infty$, и построению новых квадратурных и кубатурных формул, которые при одинаковой затрате вычислительного труда дают более высокую точность в сравнении с рядом ранее известных формул.

Вопросами сходимости квадратурных формул занимались многие авторы. Так, Т.И. Стилтьес доказал сходимость квадратурных формул Гаусса для непрерывных функций, В.И. Стеклов исследовал сходимость формул механических квадратур в зависимости от закона изменения величины $\omega(n) = \sum_{k=1}^{n} |A_k|$ при возрастании числа n, Я.В. Успенский, А.М. Журавский, А.Н. Иванова в ряде случаев доказали сходимость квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности для интегралов с бесконечными пределами интегрирования.

Г. Полиа [1] принадлежит постановка общей задачи в теории сходимости квадратурных формул: дан некоторый класс /множество/ $\mathcal{F}$ функций $f(x)$, интегрируемых по Риману; найти необ -

ходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять узлы и коэффициенты квадратурной формулы, чтобы для любой функции $f \in \mathcal{F}$ имела место сходимость квадратурного процесса. Сам Полиа в [1] решает эту задачу для множества P всех полиномов, множества C всех непрерывных функций и множества $\mathcal{R}$ всех интегрируемых $(\mathcal{R})$ функций, заданных на $[a,b]$. Для ряда важных классов функций задача Полиа решена С.М. Лозинским [2].

Методами функционального анализа Л.В. Канторовичем [3] получена теорема, дающая необходимые и достаточные условия сходимости квадратурного процесса для любой непрерывной функции.

Используя характерные представления остаточных членов квадратурных формул для тех или иных структурных классов функций, В.И.Крылов [4,5] устанавливает необходимые и достаточные условия сходимости квадратурных формул для непрерывно и абсолютно непрерывно дифференцируемых функций, а также для функций, у которых производная любого указанного порядка имеет ограниченное изменение.

В.И.Крыловым и Т.К. Арлюк [6], Н.П. Кеда и Л.А. Яновичем [7] та же задача решается для квадратурных формул, которые наряду со значениями подинтегральной функции используют значения ее производных до некоторого порядка.

Указанная выше задача в случае кубатурных формул для двойных интегралов для некоторых классов функций решена в работах В.И.Крылова, Л.А.Яновича [8], [9], Р.М.Алиева [10].

Вопросам сходимости кубатурных формул для абстрактных классов функций посвящены ряд работ С.Л.Соболева [11,12].

Важной задачей численного интегрирования является построение новых формул, имеющих те или иные преимущества в отношении точности, удобства или достоинств в применении к тем или иным задачам, или относящихся к новым, не рассматривавшимся ранее случаям. За последние десятилетия усилился интерес к тому, чтобы научиться достаточно точно и как можно с меньшей затратой труда находить численные значения различных видов интегралов, с которыми приходится встречаться в самых различных вопросах.

Большинство квадратурных формул построены для случаев, когда подинтегральная функция является произвольной гладкой функцией. В ряде случаев вычислителю известно о подинтегральной функции дополнительные сведения, которые можно использовать для улучшения процесса вычисления и получения требуемой точности с меньшей затратой труда.

Л.В. Канторовичем [13] построены видоизмененные формулы Гаусса, специально приспособленные для случаев, когда подинтегральная функция является четной или нечетной. При таком видоизменении точность квадратурных формул для упомянутых классов функций значительно возрастает. Р.Б. Аккерман [14] для четных и нечетных классов функций построила квадратурные формулы типа А.А. Маркова.

Построению и исследованию квадратурных формул для периодических функций посвящены работы А.Х.Турецкого [15], Н.П.Кеда [16] и др.

Вычислению интегралов от функций, содержащих быстро колеблющиеся множители, посвящены работы В.И.Крылова [17], С.Л.Соболева, Н.П. Еругина [18], М.В. Николаевой [19]. Для вычисления интегралов этого типа В.И.Крылов, С.Л. Соболев, Н.П.Еругин выполняли разложение его на сумму нескольких последовательных главных частей. М.В. Николаева предлагает быстро колеблющийся множитель принимать за вес, а второй множитель заменять интерполяционным многочленом.

В настоящей диссертации для некоторых классов функций построено целый ряд новых квадратурных и кубатурных формул, которые дают возможность получить нужную точность при меньшей затрате вычислительного труда, в сравнении с многими известными формулами. Отметим, что эти формулы применимы также и к интегралам с подинтегральными функциями, принадлежащими более широким классам, чем те, для которых они построены. И в этом последнем случае предлагаемые формулы позволяют вычислять интегралы с требуемой точностью при меньших затратах вычислительного труда, чем при применении целого ряда уже ранее известных формул.

Диссертация состоит из введения и четырех глав.

Во введении дается обзор литературы, по рассматриваемым в диссертации вопросам и краткое изложение результатов диссертации.

В первой главе "Сходимость кубатурных процессов для некоторых классов функций" для некоторых классов функций $/A_{m,n}[a,b;c,d], C_{m,n}[a,b;c,d], \tilde{C}_{m,n}[a,b;c,d]/$ устанавливаются необходимые и достаточные условия сходимости следующих кубатурных процессов:

$$\iint_{D} p(x,y) f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{N} A_k^{(N)} f(x_k^{(N)}, y_k^{(N)}) + R_N(f) \qquad /2/$$

и

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} p(x,y) f(x,y)\, dx\, dy = \sum_{k=1}^{N} \sum_{p=0}^{r} \sum_{q=0}^{\ell} A_{kpq}^{(N)} f^{(p,q)}(x_k^{(N)}, y_k^{(N)}) + R_N(f), \qquad /3/$$

где $N = 1,2,3\ldots$, $\mathcal{D}$ - область плоскости x, y, причем $\mathcal{D} \subset [a,b;\,c,d]$, функция $p(x,y)$ определена и суммируемая в области $\mathcal{D}$, точки $(x_k^{(N)}, y_k^{(N)})$ из области определения функции $f(x,y)$.

Через $A_{m,n}[a,b;\,c,d]$ обозначим класс определенных в прямоугольнике $[a,b;\,c,d]$ функций $f(x,y)$, которые имеют там абсолютно непрерывную смешанную производную

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(x,y) \quad /m \geq 0,\, n \geq 0/.$$

Класс функций, имеющих в прямоугольнике $[a,b;\,c,d]$ непрерывную смешанную производную $\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(x,y)$ $/m,n \geq 0/$ обозначим через $C_{m,n}[a,b;\,c,d]$.

Через $\widetilde{C}_{m,n}[0,1;\,0,1]$ обозначим класс I-периодических по x и по y функций $f(x,y)$, которые имеют в квадрате $[0,1;\,0,1]$ непрерывные смешанные производные до порядка $\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(x,y)$ $/m,n \geq 0/$.

В § I доказано 5 теорем. Вот некоторые из них:

Теорема I. Для сходимости кубатурного процесса /2/ для любой функции $f \in A_{r,\ell}[a,b;\,c,d]$ необходимо и достаточно, чтобы

1/ процесс сходился для любого многочлена переменных x и y ;

2/ существовало число M /$M<\infty$/ такое, что при $N = 1,2,3,\ldots,$ $i=0,1,2,\ldots,r$; $j=0,1,2,\ldots,l$; $a\le\xi\le b$ и $c\le\eta\le d$ выполнялись неравенства

$$\left|\sum_{k=1}^{N} A_k^{(N)} E(\xi - x_k^{(N)})(\xi - x_k^{(N)})^r (y_k^{(N)} - d)^j\right| \le M,$$

$$\left|\sum_{k=1}^{N} A_k^{(N)} E(\eta - y_k^{(N)})(x_k^{(N)} - b)^i (\eta - y_k^{(N)})^l\right| \le M,$$

$$\left|\sum_{k=1}^{N} A_k^{(N)} E(\xi - x_k^{(N)}) E(\eta - y_k^{(N)})(\xi - x_k^{(N)})^r (\eta - y_k^{(N)})^l\right| \le M,$$

где $E(x) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sign} x)$.

Из теоремы I при $r = l = 0$ следует доказанная раньше Л.А.Яновичем [9] теорема, дающая необходимые и достаточные условия сходимости кубатурного процессы /2/ для абсолютно непрерывных функций двух переменных.

Теорема 3. Для сходимости кубатурного процесса /2/ /считаем, что $\mathcal{D}$ является квадратом [0,1; 0,1] / для любой функции $f \in \tilde{C}_{m,n}[0,1;\ 0,1]$ достаточно, чтобы

1/ процесс сходился для любого тригонометрического многочлена переменных x и y ;

2/ существовало число M такое,что при $N = 1,2,3,\ldots$ выполнялись неравенства

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{N} A_k^{(N)} \mathcal{B}_m^*(x_k^{(N)} - t_1) \right| dt_1 \le \mathcal{M};$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{N} A_k^{(N)} \mathcal{B}_n^*(y_k^{(N)} - t_2) \right| dt_2 \le \mathcal{M};$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{N} A_k^{(N)} \mathcal{B}_m^*(x_k^{(N)} - t_1) \mathcal{B}_n^*(y_k^{(N)} - t_2) \right| dt_1\, dt_2 \le \mathcal{M},$$

где $\mathcal{B}_k^*(x) = \mathcal{B}_k(x)$ при $x \in [0,1)$, $\mathcal{B}_k^*(x+1) = \mathcal{B}_k^*(x)$, $\mathcal{B}_k(x)$ - многочлен Бернулли.

В этом параграфе рассматривается также кубатурный процесс для тройных интегралов:

$$\iiint_V p(x,y,z) f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \sum_{k=1}^{N} A_k^{(N)} f(x_k^{(N)}, y_k^{(N)}, z_k^{(N)}) + \mathcal{R}_N(f), \qquad /4/$$

где V - область пространства x, y, z ,содержащаяся в параллелепипеде $[a, a_1; b, b_1; c, c_1]$, а функция $p(x,y,z)$ суммируемая у V.

Для абсолютно непрерывных функций трех переменных построено характерное представление /лемма 2/, которое используется при доказательстве следующей теоремы:

Теорема 4. Для сходимости кубатурного процесса /4/ для любой абсолютно непрерывной в параллелепипеде $[a, a_1; b, b_1; c, c_1]$ функции $f(x, y, z)$ необходимо и достаточно, чтобы

1/ процесс сходился для любого многочлена переменных x, y, z;

2/ существовало число $\mathcal{M}$ /$\mathcal{M} < \infty$/ такое, что при $N = 1, 2, 3, \ldots$; $a \le \xi \le a_1$; $b \le \zeta \le b_1$; $c \le \zeta \le c_1$ для частных сумм коэффициентов $A_k^{(N)}$ выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{N} A_k^{(N)} E(x_k^{(N)}-\xi) E(y_k^{(N)}-\eta) E(z_k^{(N)}-\zeta) \right| \le M .$$

Для кубатурного процесса /4/ установлены /теорема 5/ необходимые и достаточные условия сходимости для абсолютно непрерывно дифференцируемых функций трех переменных.

В § 2 устанавливаются необходимые и достаточные условия сходимости кубатурного процесса /3/, в котором наряду со значениями подинтегральной функции используются также значения ее смешанных производных в отдельных узлах.

Теорема 7. Для сходимости кубатурного процесса /3/ для любой функции $f \in C_{r,l}[a,b;c,d]$ необходимо и достаточно, чтобы

1/ процесс сходился для любого многочлена переменных x и y;

2/ существовало число M такое, что при $N=1,2,3,\ldots$, $i=0,1,\ldots,r-1$; $j=0,1,\ldots,l-1$ выполнялись неравенства

$$\left\{ \int_a^b \left| \sum_{k=1}^{N} \sum_{p=0}^{r-1} \sum_{q=0}^{l-1} A_{kpq}^{(N)} \frac{(y_k^{(N)}-c)^{j-q}}{(j-q)!} K_{r-p}(x_k^{(N)}-t_1) \right| dt_1 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{N} \left| \sum_{q=0}^{l-1} A_{krq}^{(N)} \frac{(y_k^{(N)}-c)^{j-q}}{(j-q)!} \right| \right\} \le M ;$$

$$\left\{ \int_c^d \left| \sum_{k=1}^{N} \sum_{p=0}^{r-1} \sum_{q=0}^{l-1} A_{kpq}^{(N)} \frac{(x_k^{(N)}-a)^{i-p}}{(i-p)!} K_{l-q}(y_k^{(N)}-t_1) \right| dt_2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{N} \left| \sum_{p=0}^{r-1} A_{kpl}^{(N)} \frac{(x_k^{(N)}-a)^{i-p}}{(i-p)!} \right| \right\} \le M ;$$

$$\left\{ \int_a^b\int_c^d \left| \sum_{k=1}^{N}\sum_{p=0}^{r-1}\sum_{q=0}^{l-1} A_{kpq}^{(N)} K_{r-p}(x_k^{(N)}-t_1) K_{l-q}(y_k^{(N)}-t_2) \right| dt_1 dt_2 + \right.$$

$$+\int_a^b \left| \sum_{k=1}^{N}\sum_{p=0}^{r-1} A_{kpl}^{(N)} K_{r-p}(x_k^{(N)}-t_1) \right| dt_1 +$$

$$\left. +\int_c^d \left| \sum_{k=1}^{N}\sum_{q=0}^{l-1} A_{krq}^{(N)} K_{l-q}(y_k^{(N)}-t_2) \right| dt_2 + \sum_{k=1}^{N} \left| A_{krl} \right| \right\} \le M,$$

где
$$K_n(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \text{для} \quad t \ge 0 \\ 0 & \text{для} \quad t < 0 \end{cases},$$

а $(x_k^{(N)}-a)^{i-p}$ и $(y_k^{(N)}-c)^{j-q}$ принимаем равными нулю, если соответственно числа $i-p$ или $j-q$ отрицательны.

Доказана также соответствующая теорема для функций класса $C_{m,n}[a,b;c,d]$ при $m>r,\ n>l$.

<u>Теорема 8</u>. Для сходимости кубатурного процесса /3/ для любой функции $f \in \tilde{C}_{m,n}[0,1;0,1]$ / $D=\{x,y;\ 0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1\}$ / достаточно, чтобы

1/ процесс сходился для всякого тригонометрического многочлена переменных x, y ;

2/ существовало число M такое, что при N =1,2,3,..., выполнялись неравенства

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{N}\sum_{p=0}^{r} A_{kp0}^{(N)} \frac{B_{m-p}^{*}(x_k^{(N)}-t_1)}{(m-p)!} \right| dt_1 \le M,$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{N}\sum_{q=0}^{l} A_{k0q}^{(N)} \frac{B_{n-q}^{*}(y_k^{(N)}-t_2)}{(n-q)!} \right| dt_2 \le M,$$

$$\int_0^1\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{N} \sum_{p=0}^{r} \sum_{q=0}^{l} A_{kpq}^{(N)} \frac{B_{m-p}^{*}(x_k^{(N)}-t_1)}{(m-p)!} \frac{B_{n-q}^{*}(y_k^{(N)}-t_2)}{(n-q)!} \right| dt_1\, dt_2 \le M .$$

Теорема 9. Для сходимости кубатурного процесса /3/ для любой функции $f \in A_{m,n}[a,b;c,d]$ $/m \ge r;\ n \ge l/$ необходимо и достаточно, чтобы

I/ процесс сходился для любого многочлена переменных x, y;

2/ существовало число M такое, что при $N = 1, 2, 3, \ldots$, $i = 0, 1, \ldots, m$; $j = 0, 1, \ldots, n$ и произвольных $t_1 \in [a,b]$ и $t_2 \in [c,d]$ выполнялись неравенства

$$\left| \sum_{k=1}^{N} \sum_{p=0}^{r} \sum_{q=0}^{l} A_{kpq}^{(N)} K_{m-p+1}(x_k^{(N)}-t_1) \frac{(y_k^{(N)}-c)^{j-q}}{(j-q)!} \right| \le M ;$$

$$\left| \sum_{k=1}^{N} \sum_{p=0}^{r} \sum_{q=0}^{l} A_{kpq}^{(N)} K_{n-q+1}(y_k^{(N)}-t_2) \frac{(x_k^{(N)}-a)^{i-p}}{(i-p)!} \right| \le M ;$$

$$\left| \sum_{k=1}^{N} \sum_{p=0}^{r} \sum_{q=0}^{l} A_{kpq}^{(N)} K_{m-p+1}(x_k^{(N)}-t_1) K_{n-q+1}(y_k^{(N)}-t_2) \right| \le M ,$$

где $$K_n(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \text{для } t \ge 0 \\ 0 & \text{для } t < 0 \end{cases},$$

а $(x_k^{(N)}-a)^{i-p}$ и $(y_k^{(N)}-c)^{j-q}$ принимаем равными нулю, если соответственно числа $i-p$ или $j-q$ отрицательны.

В этой главе устанавливается также ряд вспомогательных лемм, формулировки которых здесь не приводим.

Во второй главе "Квадратуры наивысшей алгебраической степени точности для функций, у которых несколько первых производных в начальной точке отрезка интегрирования равны нулю" строятся квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности для функций, у которых несколько первых производных в начальной точке отрезка интегрирования равны нулю.

Через $C_n^{(r)}[a,b]$ обозначаем класс непрерывно дифференцируемых до порядка n функций, обладающих свойством

$$f^{(i)}(a)=0 \quad /i=0,1,\ldots,r/, \qquad /5/$$

а через $\widetilde{\varphi}(x)$ - многочлены, удовлетворяющие условию /5/.

В § I строятся формулы вида

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \qquad /6/$$

точные для всех многочленов $\widetilde{\varphi}(x)$ степени $\le 2n+r$.
Здесь весовая функция $p(x)\ge 0$, а $f(x)\in C_m^{(r)}[a,b]$ $/m\ge r/$.

Теорема 2. Для того, чтобы формула /6/ была точной для всех многочленов $\widetilde{\varphi}(x)$ степени $\le 2n+r$ необходимо и достаточно, чтобы она была точна для всех многочленов $\widetilde{\varphi}(x)$ степени $\le n+r$ и многочлен $\omega(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)$ был ортогональный на $[a,b]$ по весу $p(x)(x-a)^{r+1}$ ко всем многочленам степени $\le n-1$.

Итак, узлы формулы /6/ при любом n являются корнями соответствующих ортогональных многочленов, а коэффициенты A_k положительные и выражаются формулой

$$A_k=\frac{1}{(x_k-a)^{r+1}\omega'^2(x_k)}\int_a^b p(x)(x-a)^{r+1}\frac{\omega^2(x)}{(x-x_k)^2}\,dx.$$

Коэффициенты формулы /6/ можно выразить также через коэффициенты обычных формул Гаусса, а именно:

$$A_k = \frac{D_k}{(x_k - a)^{r+1}},$$

где D_k - соответствующий коэффициент формулы Гаусса с весом $p(x)(x-a)^{r+1}$.

Квадратурная формула для рассматриваемого класса функций сходится.

<u>Теорема 3</u>. Для любой функции $f \in C^{(r)}_{2n+r+1}[a, b]$ существует точка $\eta \in [a, b]$, что для остаточного члена квадратурной формулы /6/ наивысшей алгебраической степени точности справедливо равенство

$$R(f) = \frac{f^{(2n+r+1)}(\eta)}{(2n+r+1)!} \int_a^b p(x)(x-a)^{r+1}\omega^2(x)\,dx.$$

В § 2 рассматриваются квадратурные формулы с одним и двумя фиксированными узлами вида

$$\int_a^b p(x) f(x)\,dx \approx A f(a) + \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \qquad /7/$$

и

$$\int_a^b p(x) f(x)\,dx \approx B f(a) + C f(b) + \sum_{k=1}^{n} B_k f(x_k), \qquad /8/$$

где весовая функция $p(x) \geq 0$ и $f(x)$ удовлетворяет условию

$$f^{(i)}(a)=0 \quad /i=1,2,\ldots,r/. \qquad /9/$$

Через $\bar{C}_n^{(r)}[a,b]$ обозначаем класс непрерывно дифференцируемых до порядка n функций, удовлетворяющих условию /9/, а через $\bar{\mathcal{P}}(x)$ - многочлены, удовлетворяющие этому условию.

Узлы x_k и коэффициенты A и A_k, B, C и B_k определяем из условия, чтобы формулы /7/ и /8/ были точными для многочленов $\bar{\mathcal{P}}(x)$ как можно более высокой степени.

Выбором узлов x_k и коэффициентов A и A_k можно добиться, чтобы формула /7/ была точна для всех многочленов $\bar{\mathcal{P}}(x)$ степени $\leq 2n+r$, но ни при каком выборе узлов и коэффициентов формула /7/ не может быть точной для всех многочленов $\bar{\mathcal{P}}(x)$, степень которых $2n+r+1$. Обычная же формула А.А. Маркова вида /7/ имеет алгебраическую степень точности лишь $2n$.

<u>Теорема 4</u>. Для того, чтобы формулы /7/ была точна для всех многочленов $\bar{\mathcal{P}}(x)$ степени $\leq 2n+r$ необходимо и достаточно, чтобы

1/ она была точна для всех многочленов $\bar{\mathcal{P}}(x)$ степени $\leq n+r$;

2/ многочлен $\omega(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)$ был ортогональный на $[a,b]$ по весу $p(x)(x-a)^{r+1}$ ко всем многочленам степени $\leq n-1$.

Для вычисления коэффициентов A_k предлагается несколько выражений. Вот одно из них:

$$A_k=\frac{a_n}{(x_k-a)^{r+1}\,a_{n-1}\,\mathcal{P}_n'(x_k)\,\mathcal{P}_{n-1}(x_k)} \quad /k=1,2,\ldots,n/,$$

где $\varphi_n(x)$ /$n=1,2,\dots$/ система ортонормированных на $[a,b]$ многочленов по весу $p(x)(x-a)^{r+1}$, a_n – старший коэффициент в $\varphi_n(x)$. Тогда

$$A=\int_a^b p(x)\,dx-\sum_{k=1}^{n}A_k .$$

<u>Теорема 5.</u> Если $f\in \bar{C}^{(r)}_{2n+r+1}[a,b]$, то существует такая точка $\xi\in[a,b]$, что для остаточного члена квадратурной формулы /7/ справедливо равенство

$$R(f)=\frac{f^{(2n+r+1)}}{(2n+r+1)!}\int_a^b p(x)(x-a)^{r+1}\omega^2(x)\,dx .$$

<u>Теорема 6.</u> Для того, чтобы формула /8/ имела наивысшую алгебраическую степень точности /была точна для всех многочленов $\bar{\varphi}(x)$ степени $\le 2n+r+1$ / необходимо и достаточно, чтобы

1/ она была точна для всех многочленов $\bar{\varphi}(x)$ степени $\le n+r+1$;

2/ многочлен $\omega(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)$ был ортогональный на $[a,b]$, по весу $p(x)(x-a)^{r+1}(x-b)$ ко всем многочленам степени $\le n-1$.

Для коэффициентов формулы /8/ получены следующие выражения:

$$C=\frac{1}{\omega(b)(b-a)^{r+1}}\int_a^b p(x)(x-a)^{r+1}\omega(x)\,dx,$$

$$\mathcal{B}_k = \frac{1}{(x_k-b)(x_k-a)^{r+1}\,\omega'(x_k)} \int_a^b p(x)(x-a)^{r+1}(x-b)\,\omega(x)\,dx \quad /k=1,2,\dots,n/$$

и

$$\mathcal{B} = \int_a^b p(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} \mathcal{B}_k - C.$$

Для коэффициентов $\mathcal{B}_k$ можно получить и другое, более удобное для вычислений, выражение

$$\mathcal{B}_k = \frac{\alpha_n}{(x_k-a)^{r+1}\,\alpha_{n-1}\,\Pi_n'(x_k)\,\Pi_{n-1}(x_k)\,(x_k-b)},$$

где $\Pi_n(x)$ $/n=1,2,\dots/$ ортонормированная по весу $p(x)(x-a)^{r+1}(x-b)$ на $[a,b]$ система многочленов, а α_n - старший коэффициент в $\Pi_n(x)$.

Получено выражение для остаточного члена формулы /8/.

Хотяформулы /6/, /7/ и /8/ выводились для функций, удовлетворяющих соответственно условиям /5/ и /9/, но они применимы также к интегралам от любой r раз непрерывно дифференцируемой в точке $x=a$ функции, не удовлетворяющей соответственно условиям /5/ или /9/. Для этого подинтегральную функцию необходимо предварительно надлежащим образом преобразовать.

В § 3 приводятся численные примеры на применение предлагаемых формул и дается сравнение с результатами вычислений по обычным формулам типа Гаусса и А.А. Маркова.

В третьей главе "Квадратурные формулы с производными подинтегральной функции" для некоторых классов функций методом неопределенных коэффициентов строятся простые, по возможности высшей алгебраической степени точности, квадратурные формулы, которые наряду со значениями подинтегральной функции используют также значения ее производных.

В § 1 строятся квадратурные формулы вида:

$$\int_{a-h}^{a+h} f(x)dx = h\Big\{A_0 f(a) + \sum_{k=1}^{n} A_i\big[f(a+a_i h) + f(a-a_i h)\big]\Big\} +$$

$$+h^2\sum_{j=1}^{m} B_j\big[f'(a+b_j h) - f'(a-b_j h)\big] + R, \qquad /10/$$

где A_0, A_i – положительные рациональные числа, B_j – рациональные, величины a_i, b_j – рациональные и удовлетворяют соотношениям

$$0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n \le 1,$$

$$0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_m \le 1,$$

а подинтегральная функция удовлетворяет условию

$$f''(a) = f^{IV}(a) = \ldots = f^{(2\ell)}(a) = 0. \qquad /11/$$

Класс функций, имеющих на сегменте $[a-h, a+h]$ непрерывные производные до порядка n включительно и удовлетворяющих условию /11/ обозначаем через $\hat{C}_n^{(2\ell)}[a-h, a+h]$.

Коэффициенты A_0, A_i, B_j и величины a_i, b_j $/i = 1,2,\ldots,n;$ $j = 1,2,\ldots,m/$ определяются из условия, чтобы формула /10/ была точна для всех многочленов из класса $\hat{C}_n^{(2\ell)}[a-h, a+h]$, степень которых $\le 2r+1$ $/r = \ell+m+n/$.

Остаточный член R построенных формул вида /10/ дается в виде

$$R = \frac{f^{(2r+2)}(\xi)}{(2r+1)!} \int_{a-h}^{a+h} R_x\left[(x-t)^{2r+1} E(x-t)\right] dt,$$

где $E(x) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sign} x)$ и $\xi \in [a-h, a+h]$.

Детально исследуются в основном трехчленные и пятичленные квадратурные формулы вида /10/. Вот две из них:

$$\int_{a-h}^{a+h} f(x)\,dx = 2hf(a) + \frac{h^2}{2(l+1)(2l+3)}\left[f'(a+h) - f'(a-h)\right] - \qquad /12/$$

$$- \frac{4l+7}{(2l+3)!\,(l+1)(l+2)(2l+3)(2l+5)} h^{2l+5} f^{(2l+4)}(\xi);$$

$$\int_{a-h}^{a+h} f(x)\,dx = \frac{h}{(2l+3)(2l+5)}\Big\{8(l+1)(l+2)f(a) + (4l+7)\left[f(a+h) + f(a-h)\right] - \qquad /13/$$

$$-h\left[f'(a+h) - f'(a-h)\right]\Big\} + \frac{16}{(2l+7)!\,(2l+3)(2l+5)} h^{2l+7} f^{(2l+6)}(\xi).$$

Из формул /12/ и /13/ при $l=0$ получаем квадратурные формулы, построенные ранее другим методом Ш.Е. Микеладзе [20].

В конце параграфа дается перечень построенных формул при $l = 1$ и $l = 2$.

В § 2 для функций $f(x) \in C_n^{(l)}[a, a+h]$ строятся формулы для вычисления повторных интегралов вида

$$J_\lambda = \underbrace{\int_a^{a+h} dx \int_a^x dx \ldots \int_a^x}_{\lambda} f(x)\,dx \qquad /\lambda \geq 1/$$

без предварительного сведения их к одномерным определенным интегралам с помощью известной формулы Дирихле.

Предлагаемые формулы ищутся в таком виде

$$\mathcal{J}_\lambda = h^\lambda \sum_{i=1}^{n} A_i f(a+\alpha_i h) + h^{\lambda+1} \sum_{j=1}^{m} B_j f'(a+\beta_j h) + R, \qquad /14/$$

где $A_i, B_j, \alpha_i, \beta_j$ $/ i=1,2,\ldots,n; j=1,2,\ldots,m /$ рациональные числа, причем $A_i > 0$, $\alpha_i, \beta_j \in (0,1]$,а $f(x) \in$ $\in C^{(\ell)}_{r+2}[a, a+h]$ $/ r = \ell+m+n /$.

Коэффициенты A_i, B_j и величины α_i, β_j определяются из условия, чтобы формула /14/ была точна для всех многочленов $\varphi(x) \in C^{(\ell)}_n[a, a+h]$,степень которых $\leq r+1$.

Отдельно рассмотрен случай, когда члены с производными $f'(a+\beta_j h)$ отсутствуют. В этом случае построены одночленные, двучленные и трехчленные квадратурные формулы и вычислены их остаточные члены. Эти формулы имеют соответственно вид

$$\mathcal{J}_\lambda = \frac{(\ell+1)!\,(\lambda+\ell+2)^{\ell+1}}{(\lambda+\ell+1)!\,(\ell+2)^{\ell+1}} h^\lambda f\left(a+\frac{\ell+2}{\lambda+\ell+2}h\right) +$$

$$+ \frac{\lambda}{(\lambda+\ell+3)!\,(\ell+3)(\ell+\lambda+2)} h^{\ell+\lambda+3} f^{(\ell+3)}(\xi), \quad \xi \in [a, a+h]; \qquad /15/$$

$$\mathcal{J}_\lambda = h^\lambda \frac{(\ell+1)!}{(\lambda+1)(\ell+\lambda+2)} \left[\frac{\lambda(\ell+\lambda+3)^{\ell+2}}{(\ell+2)^{\ell+1}} f\left(a+\frac{\ell+2}{\ell+\lambda+2}h\right) + (\ell+2) f(a+h)\right] -$$

$$- \frac{\lambda(\lambda+1)}{(\ell+3)(\ell+4)(\ell+\lambda+3)(\ell+\lambda+4)!} h^{\ell+\lambda+4} f^{(\ell+4)}(\xi), \quad \xi \in [a, a+h]; \qquad /16/$$

$$J_\lambda = h^\lambda\left[A_1 f\left(a+\frac{\ell+1}{\ell+\lambda+3}h\right)+A_2 f\left(a+\frac{(\ell+2)(\ell+2\lambda+5)}{(\ell+\lambda+3)(\ell+\lambda+4)}h\right)+A_3 f(a+h)\right]+\mathcal{R}, \qquad /17/$$

где

$$A_1=\frac{\lambda(\ell+2)!(\lambda+1)(\ell+\lambda+3)^{\ell+2}}{(\ell+\lambda+2)!(\ell+1)^{\ell+1}(\ell+3)(\lambda+2)^2},\quad A_3=\frac{(\ell+3)!\ (\lambda+4-\ell\lambda)}{(\ell+\lambda+2)!(\ell+3)(\lambda+1)(\lambda+2)^2},$$

$$A_2=\frac{\lambda(\ell+1)!(\ell+\lambda+3)^{\ell+2}(\ell+\lambda+4)^{\ell+3}}{(\ell+\lambda+2)!(\ell+2)^{\ell+1}(\ell+2\lambda+5)^{\ell+1}(\lambda+1)(\lambda+2)^2(\ell+3)}.$$

Остаточный член $\mathcal{R}$ имеет вид

$$\mathcal{R}=\left[\mathcal{M} f^{(\ell+5)}(\xi)-\mathcal{N} f^{(\ell+5)}(\eta)\right]h^{\ell+\lambda+5},\quad \xi,\eta\in[a,a+h],$$

где $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ положительные константы, не зависящие от h.

Из формулы /17/ при $\lambda = 1$ и $\ell = 1$ следует квадратурная формула Филиппи [21], а из /16/ при $\lambda = 1$ и $\ell = 0$ – формула Симпсона.

Кроме того, в § 2 рассматриваются формулы, содержащие производные подинтегральной функции. Построены одно- и двучленные формулы:

$$J_\lambda=\frac{\ell!(\ell+\lambda+2)^\ell}{(\lambda+\ell+1)!(\ell+1)^\ell}h^{\lambda+1}f'\left(a+\frac{\ell+1}{\lambda+\ell+2}h\right)+$$

$$+\frac{\lambda+1}{(\ell+\lambda+3)!(\ell+2)(\ell+\lambda+2)}h^{\lambda+\ell+3}f^{(\ell+3)}(\xi),\quad \xi\in[a,a+h];$$

$$J_\lambda=\frac{(\ell+1)!(\ell+\lambda+3)^\ell}{(\lambda+\ell+2)!}h^\lambda\left[\frac{(\ell+2)(\lambda+1)(\ell+\lambda+3)}{(\ell+3)^{\ell+1}}f\left(a+\frac{\ell+3}{\ell+\lambda+3}h\right)-\right.$$

$$- \frac{\lambda}{(\ell+2)\ell} h f'(a + \frac{\ell+2}{\ell+\lambda+3} h)] + \mathcal{R},$$

где
$$\mathcal{R} = [M_1 f^{(\ell+4)}(\xi) - N_1 f^{(\ell+4)}(\eta)] h^{\ell+\lambda+4}, \quad \xi, \eta \in [a, a+h],$$

M_1 и N_1 – положительные, не зависящие от h, константы.

Из построенных в § 2 формул при конкретных значениях λ получаем формулы для вычисления повторных интегралов определенной кратности. Так при $\lambda = 1$ получаем формулы для вычисления интеграла $\int_a^{a+h} f(x)dx$.

В заключение параграфа приводится список построенных формул для $\lambda = 1$ и $\lambda = 2$ при $\ell = 0, 1, 2$.

Построенные в третьей главе формулы применимы не только для классов функций $\hat{C}_n^{(2\ell)}[a-h, a+h]$ и $C_n^{(\ell)}[a, a+h]$. По этим формулам можно вычислять интегралы с достаточно высокой точностью и в том случае, когда подинтегральные функции не принадлежат указанным выше классам, но на отрезке интегрирования принадлежат классу $C_{2\ell}[a, b]$ /для симметричных формул/ или $C_\ell[a, b]$ /для несимметричных формул/. В последнем случае необходимо предварительно сделать очевидное преобразование подинтегральной функции. По формулам § 2 очень удобно вычислять интегралы на промежутке $(a, a+h)$ от функций, допускающих четное или нечетное дифференциальное продолжение на промежуток $(a-h, a)$.

§ 3 содержит численные примеры. Результаты вычислений сравниваются с результатами вычислений по формулам трапеций, Симпсона, Эйлера-Маклорена, Дж.Г.Синикидзе [22], В.Ромберга

[23]. Сравнение показывает, что даже для функций класса $C_n[a,b]$ для получения определенной точности предлагаемые формулы требуют меньшей затраты вычислительного труда, чем по вышеназванным формулам.

В четвертой главе "Некоторые кубатурные формулы для вычисления двойных интегралов" некоторые результаты третьей главы распространяются на двойные интегралы с областью интегрирования прямоугольником. Построено ряд симметричных относительна центра прямоугольника кубатурных формул различной степени точности. Часть из этих формул наряду со значениями подинтегральной функции используют также значения ее частных производных. Для всех построенных формул вычислены остаточные члены. Вот две из них:

$$\int_{a-h}^{a+h}\int_{b-sh}^{b+sh} f(x,y)\,dx\,dy=\frac{h^2 s}{9}\Big\{16f(a,b)+5\Big[f\Big(a+\sqrt{\tfrac{3}{5}}h,\ b+\sqrt{\tfrac{3}{5}}sh\Big)+$$

$$+f\Big(a+\sqrt{\tfrac{3}{5}}h,b-\sqrt{\tfrac{3}{5}}sh\Big)+f\Big(a-\sqrt{\tfrac{3}{5}}h,b+\sqrt{\tfrac{3}{5}}sh\Big)+f\Big(a-\sqrt{\tfrac{3}{5}}h,b-\sqrt{\tfrac{3}{5}}sh\Big)+O(h^8),$$

где $f(x,y)$ такая, что $f_{x^2y^2}(a,b)=0$;

$$\int_{a-h}^{a+h}\int_{b-sh}^{b+sh} f(x,y)\,dx\,dy=\frac{h^2 s}{125}\Big\{304f(a,b)+49\Big[f\Big(a+\sqrt{\tfrac{5}{7}}h,\ b+\sqrt{\tfrac{5}{7}}sh\Big)+$$

$$+f\Big(a+\sqrt{\tfrac{5}{7}}h,b-\sqrt{\tfrac{5}{7}}sh\Big)+f\Big(a-\sqrt{\tfrac{5}{7}}h,b+\sqrt{\tfrac{5}{7}}sh\Big)+f\Big(a-\sqrt{\tfrac{5}{7}}h,b-\sqrt{\tfrac{5}{7}}sh\Big)\Big]\Big\}-$$

$$-\frac{7}{135}h^4s^2\Big[f_{xy}\Big(a+\sqrt{\tfrac{3}{7}}h,b+\sqrt{\tfrac{3}{7}}sh\Big)-f_{xy}\Big(a+\sqrt{\tfrac{3}{7}}h,\ b-\sqrt{\tfrac{3}{7}}sh\Big)-$$

$$-f_{xy}\left(a-\sqrt{\tfrac{3}{7}}h,\ b+\sqrt{\tfrac{3}{7}}sh\right)+f_{xy}\left(a-\sqrt{\tfrac{3}{7}}h,\ b-\sqrt{\tfrac{3}{7}}sh\right)\Big]+O(h^{10}),$$

причем $f(x,y)$ такая, что $f_{x^2}(a,b)=f_{y^2}(a,b)=0$.

Если же подинтегральная функция не удовлетворяет дополнительным условиям /равенство нулю соответствующих производных/, то ее предварительно преобразовуют. Эффективность полученных формул иллюстрируется численным примером.

Основные результаты диссертации изложены в работах [24] - [33] и докладывались на II и III Республиканских научных конференциях молодых математиков Украины /Киев, 1965, 1966 гг./, на семинаре академика АН БССР В.И.Крылова по вычислительной математике /Минск, Институт математики АН БССР, 1966 г./, на Республиканском семинаре при Научном Совете по кибернетике АН УССР /Киев, Университет им.Т.Г.Шевченко, 1967 г./, на научных конференциях кафедр Киевского педагогического института им. А.М.Горького /Киев, 1965, 1966, 1967 гг./.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Polya, Über die Konvergenz von Quadraturverfahren, Mathem. Zeitschrift, 1933, v. 37.

2. С.М.Лозинский, О формулах механических квадратур, ИАН СССР, сер. матем., 4, 1940.

3. Л.В. Канторович, Функциональный анализ и прикладная математика, УМН, 3:6 /28/, 1948.

4. В.И. Крылов, Сходимость механических квадратур в классах функций различного порядка дифференцируемости, ДАН СССР, 1955, 101, № 5.

5. В.И.Крылов, Т.К. Арлюк, О сходимости квадратурных процессов, содержащих значения производных от интегрируемых функций, ДАН БССР, 1963, 7, 11.

6. В.И.Крылов, Приближенное вычисление интегралов, Физматгиз, М., 1959.

7. Н.П. Кеда и Л.А. Янович, Сходимость квадратурного процесса для дифференцируемых периодических функций, ДАН БССР, 1967, 11, № 4.

8. В.И.Крылов, Л.А. Янович, Об условиях сходимости кубатурного процесса для непрерывно дифференцируемых функций, ДАН БССР, 1961, 5, 11.

9. Л.А. Янович, Сходимость кубатурного процесса для абсолютно непрерывных функций, ДАН БССР, 1962, 6, 2.

10. Р.М. Алиев, Наилучшие квадратурные и кубатурные формулы для некоторых классов функций, Диссертация, Азербайджанский политехнический ин-т, Баку, 1965.

11. С.Л. Соболев, Различные типы сходимости кубатурных и квадратурных формул, ДАН СССР, 1962, 146, № 1.

12. С.Л. Соболев, Сходимость формул приближенного интегрирования функций из $L_2^{(m)}$, ДАН СССР, 1962, № 6.

13. Л.В. Канторович, Об особых приемах численного интегрирования четных и нечетных функций, Тр.Матем.ин-та АН СССР, 1949, 28.

14. Р.Б.Аккерман, Квадратурные формулы типа формул Маркова, Тр.Матем. ин-та им.В.А. Стеклова, 53, 1959.

15. А.Х. Турецкий, О формулах квадратур, точных для тригонометрических полиномов, Уч.зап. Белорусского ун-та, сер. матем. 1959, вып 1/49/.

16. Н.П.Кеда, К теории квадратур для периодических функций, ДАН БССР, 1961, 5, № 9.

17. В.И. Крылов, Приближенное вычисление интегралов от функций, содержащих быстро колеблющиеся множители, ДАН СССР, 1956, 108, № 6.

18. Н.П. Еругин, С.Л.Соболев, Приближенное интегрирование некоторых колеблющихся функций, Прикл. матем. и механ. 1950, 14.

19. М.В. Николаева, О приближенном вычислении осциллирующих интегралов, Тр.Матем.ин-та АН СССР, 1949, 28.

20. Ш.Е. Микеладзе, Численные методы математического анализа, М., 1953.

21. S. Filippi, Eine einfache Integrationsformel hoher Genauigkeit, Elem. Math., 1963, 18, №3.

22. Дж. Г.Саникидзе, Интерполирование с разделенными разностями, сообщения АН Гр. ССР, 1960, т.25.

23. W. Romberg, Vereinfachte numerische Integration, Kgl. norske videnskab. forhandl., 1955, v. 28, № 7.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

24. Ю.С.Рамський, Збіжність кубатурних процесів для деяких класів функцій, тези доповідей звітно-наукової конференції кафедр Київського державного педінституту ім.О.М.Горького за 1964 р. /физико-математичні науки/, К., 1965.

25. Ю.С. Рамський, Збіжність кубатурних процесів для деяких класів функцій, Друга наукова конференція молодих математиків України, Вид. "Наукова думка", К., 1966.

26. Ю.С.Рамський, Деякі формули для наближеного обчислення кратних інтегралів, Матеріали третьої наукової конференції молодих математиків України, К., 1966.

27. Ю.С. Рамский, О сходимости кубатурных процессов для абсолютно непрерывных и абсолютно непрерывно дифференцируемых функций, Вычислительная математика, Межведомственный научный сборник, Вып.2, Изд-во Киевского ун-та, 1966.

28. М.Я. Лященко, Ю.С.Рамський, Деякі кубатурні формули для обчислення подвійних інтегралів, Тези доповідей звітно-наукової конференції кафедр Київського державного педінституту ім.О.М.Горького за 1965 р. /фізико-математичні науки/, К., 1966.

29. Ю.С. Рамський, Формули для наближеного обчислення кратних інтегралів, там же.

30. Ю.С.Рамський, Формули чисельного інтегрування Маркова для одного класу функцій, Київський педінститут ім.О.М.Горького, Звітно-наукова конференція кафедр інституту за 1966 р. /тези доповідей/, фізико-математичні науки, К., 1967.

31. Ю.С.Рамский, Квадратурные формулы с производными подинтегральной функции, Вычислительная математика, Межведомственный научный сборник, Вып.3, Изд-во Киевского университета, 1967.

32. Н.Я. Лященко, Ю.С.Рамский, Некоторые кубатурные формулы для вычисления двойных интегралов, Вычислительная математика, Межведомственный научный сборник, Вып.3, Изд-во Киевского ун-та, 1967.

33. Ю.С.Рамский, К вопросу сходимости кубатурных процессов, Вычислительная и прикладная математика, межведомственный научный сборник, Вып.4, Изд-во Киевского ун-та, 1967.

БФ 26318. Подписано к печати 30.I.1968 г. формат бумаги 60x90 I/16
Объем I,75 печ.л. Заказ № 102/20 . Тираж 160 экз.

Учебно-производственный комбинат при УСХА