знаходить застосування в теорії ймовірностей, теорії чисел, теорії динамічних систем, математичному аналізі. Продовжують з'являтися нові роботи, присвячені певним її узагальненням та модифікаціям.

К доповіді буде запропоновано означення функції, яка за конструкцією «схожа» на функцію Такагі, представлено її диференціальні та екстремальні властивості. Така функція будується з використанням двоосновної системи кодування дійсних чисел з різнознаковими основами.

Нехай $A_2 = \{0,1\}$ – алфавіт двійкової системи числення; $L_2 = A_2 \times A_2 \times \ldots \times A_2 \times \ldots$ − простір послідовностей елементів алфавіту. На відрізку $[0; \frac{1}{2}]$ визначимо функцію T^* рівністю: $T^*(x) = T^*\left(\Delta^{\tilde{2}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\omega_n(x)\frac{(-1)^{\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j(x)}}{2^{n-1}}\right)$, де зображення числа $x = \Delta^{\tilde{2}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}$ – це G_2-зображення дійсних чисел [2] за умови, що $g_0 = \frac{1}{2}$, відповідає розкладу

$$x = \Delta^{\tilde{2}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots} = \frac{\alpha_1}{2} + (-1)^{\alpha_1}\frac{\alpha_2}{2} + \cdots + (-1)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}}\frac{\alpha_n}{2} + \cdots, \alpha_n \in A_2\ ;$$

$$\omega^n(x) = \omega^n\left(\Delta^{\tilde{2}}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}\right) = \Delta^{\tilde{2}}_{\alpha_{n+1}(x)\alpha_{n+2}(x)\ldots}$$

Теорема 1. Функція T^*є неперервною ніде не диференційовною на $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ та задовольняє систему функціональних рівнянь $T^*\left(\frac{i}{2} + (-1)^i\frac{x}{2}\right) = x + (-1)^i T^*(x), i \in A_2$.

Список використаних джерел

1. Takagi T. A simple of the continuous function without derivative. *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan.* 1903. Vol. 1, P. 176-177.
2. Працьовитий М.В., Лисенко І.М., Маслова Ю.П. Метрична та ймовірнісна теорія G_2-зображення дійсних чисел. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України.* 2019. №3, Т.16. С. 114-131.

Гончаренко Я.В.
кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Дивляш Н.В.
аспірантка,
Український державний університет імені Михайла Драгоманова

ОЦІНКА НЕВІДОМИХ ПАРАМЕТРІВ СИНГУЛЯРНИХ РОЗПОДІЛІВ

Отримання статистичних оцінок невідомих параметрів розподілів ймовірностей на основі вибіркових спостережень – одна з найпоширеніших задач математичної статистики. Від статистичних оцінок як правило вимагаються, щоб вони задовольняли умови незміщеності, консистентності та ефективності. Існує багато методів отримання оцінок та дослідження їх властивостей, але практично всі відомі методи розраховані на застосування в класах дискретних або абсолютно неперервних розподілів. В класі сингулярних розподілів дані задачі практично не розглядались.

В даній роботі узагальнено результати статті [1] і представлено метод обгрунтування ефективності статистичної оцінки отриманої модифікованим методом максимальної правдоподібності для одного класу сингулярних розподілів.

Розглянемо багатопараметричний клас розподілів, породжений випадковою величиною

$$\varsigma = \Delta^{s}_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_k\ldots} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\eta_k}{s^k},$$

$s \geq 2$, з незалежними однаково розподіленими цифрами s-кового зображення η_i, що набувають значень 0, 1, …, s-1, з ймовірностями $p_0, p_1, \ldots, p_{s-1}$ відповідно, причому $0 \leq p_i \leq 1$, $\sum\limits_{i=0}^{s-1} p_i = 1$.

Функцію розподілу такої випадкової величини можна записати у вигляді [1]:

$$F_\varsigma = b_{\eta_1} + \sum_{k=2}^{\propto} b_{\eta_k}\prod_{j=1}^{k-1} p_{\eta_j}, \qquad (1)$$

де $b_{\eta_k} = \sum\limits_{i=0}^{\eta_k - 1} p_i$, $b_0 = 0$, η_k – k-та цифра в s-ковому розкладі x.

Позначивши через ρ_i – статистичну оцінку p_i, $i = \overline{0, s-2}$, отримаємо клас багатопараметричних розподілів $F(x, \rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{s-2})$.

У роботі [2] було розглянуто клас однопараметричних розподілів, породжених розподілом випадкової величини з незалежними однаково розподіленими двійковими цифрами: $\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\eta_k}{2^k}$, де η_k – незалежні однаково розподілені випадкові величини, які набувають значень 0 та 1 з ймовірностями p_0 та $p_1 = 1 - p_0$, $p_0 \in [0;1]$, відповідно. При цьому в якості параметра було прийнято $P\{\eta_k = 1\} = p_1$. Для такого класу розподілів, було запропоновано модифікацію методу максимальної правдоподібності, отримано за допомогою нього оцінку невідомого параметра і доведено її незміщеність, консистентність та ефективність.

У даній роботі пропонується розв'язання аналогічної задачі для багатопараметричного розподілу, породженого випадковою величиною з незалежними однаково розподіленими цифрами свого s-кового зображення.

Позначимо $N_j(x, m)$ – кількість цифр j, що зустрічається в s-ковому розкладі x до m-го місця включно.

Доведено наступне твердження:

Теорема 1. Оцінка $\hat{\rho}_j = (mn)^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} N_j(x_i, m)$, $j = \overline{0, s-2}$ є незміщеною та консистентною оцінкою параметра ρ_j.

Далі постало питання про ефективність такої оцінки. Цю властивість досить складно довести, використовучи одцінки дисперсії, що існують для дискртених та абсолютно неперервних розподілів. Тому для доведення ефективності спочатку було розглянуто статистику (функцію від вибірки):

$$T(X_n) = (T_0, T_1, \ldots, T_{s-2}), \text{ де } T_j = \sum_{i=1}^{n} N_j(x_i, m), \quad j = \overline{0, s-2}. \qquad (2)$$

Показавши, що умовний розподіл $P\left\{\bigcap_{i=1}^{n}\left(\varsigma_i \in \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\right) \middle| T(\varsigma_i) = \overline{k_0}\right\}$, де ς_i – випадкова величина, щоо має розподіл типу (1), $\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$ – циліндричний відрізок рангу m, $\overline{k_0} = (k_0, k_1, \ldots, k_{s-2})$, $k_j \in \{0, 1, \ldots, mn\}$, не залежить від параметра ρ, було доведено твердження:

Теорема 2. Статистика (2) є достатньою для оцінки параметра ρ.

Також потрібно було довести, що статистика (2) є повною. Для доведення повноти статистики (2) необхідно було показати, що система функцій $y(\bar{k}) = y(k_0, k_1, \ldots, k_{s-2})$ є лінійно незалежною, тобто система рівнянь виду:

$$\sum_{\bar{k}} y(\bar{k}) C^{\bar{k}}_{mn} \rho_0^{k_0} \rho_1^{k_1} \ldots \rho_{s-2}^{k_{s-2}} (1 - \rho_0 - \rho_1 - \ldots - \rho_{s-2})^{mn - k_0 - k_1 - \ldots - k_{s-2}} = 0 \quad \forall \rho_j \in (0;1),$$

де $y(\bar{k}) = y(k_0, k_1, \ldots, k_{s-2})$, $k_i \in \{0, \ldots, mn\}$, має єдиний (нульовий) розв’язок. Розглянувши $(mn+1)^{s-1}$ довільних фіксованих значень $\rho_t = (\rho_{0,t}, \rho_{1,t}, \ldots, \rho_{s-2,t})$, $\rho_{i,t} \in (0;1)$, та підставивши ці значення в останню рівність, отримали систему відносно $y(\bar{k})$ однорідних рівнянь виду:

$$\sum_{\bar{k}} \sum_{\rho_e} y(\bar{k}) C^{\bar{k}}_{mn} \rho_{0,t}^{k_0} \rho_{1,t}^{k_1} \ldots \rho_{s-2,t}^{k_{s-2}} (1 - \rho_{0,t} - \rho_{1,t} - \ldots - \rho_{s-2,t})^{mn - k_0 - k_1 - \ldots - k_{s-2}} = 0,$$

де $t = \overline{0, (mn+1)^{s-1} - 1}$, $\overline{k_0} = (k_0, k_1, \ldots, k_{s-2})$, $k_j \in \{0, 1, \ldots, mn\}$, $\overline{\rho_t} = (\rho_{0,t}, \rho_{1,t}, \ldots, \rho_{s-2,t})$, $\rho_{i,t} \in (0;1)$, $i = \overline{0, s-2}$.

Дослідивши визначник основної материці даної системи, було показано, що при $\rho_{i,t} \in (0;1)$ він відмінний від нуля.

Враховуючи це та відоме твердження про достатню повну статистику [3, С.178], була доведена основна теорема роботи.

Теорема 3. Оцінка $\hat{\rho}_j = (mn)^{-1} \sum_{i=1}^{n} N_j(x_i, m)$, $j = \overline{0, s-2}$, є ефективною оцінкою параметра ρ_j.

Список використаних джерел

1. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
2. Гончаренко Я. В., Дивляш Н. В. Статистичні методи оцінки параметра для одного однопараметричного класу сингулярних розподілів салемівського типу Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – К.: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2014, 16(1). – С. 81-94.
3. Боровков А.А. Математическая статистика. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1984. – 144 с.