Секція

Сучасні проблеми математики

Барановський О.М.
кандидат фіз.-мат. наук,
Інститут математики НАН України
Працьовитий М.В.
доктор фіз.-мат. наук, професор,
Український державний університет імені Михайла Драгоманова

ПРО ОДИН КЛАС НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ ЗІ СКЛАДНИМИ ЛОКАЛЬНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

Постановка проблеми, мета і завдання дослідження

У доповіді розглядається нескінченно-параметрична сім'я неперервних функцій, кожна з яких має складні локальні властивості: вона є сингулярною (монотонною або немонотонною), ніде не монотонною, недиференційовною або майже скрізь недиференційовною. Для конструювання і дослідження цієї сім'ї функцій використовується так зване E-зображення дійсного числа, тобто його кодування засобами нескінченного алфавіту за допомогою рядів Енгеля — додатних рядів, членами яких є числа, обернені до накопичувальних добутків натуральних чисел.

Як відомо [1, 2], для будь-якого дійсного числа x з проміжку $(0, 1]$ існує єдина така послідовність (g_n) цілих невід'ємних чисел, що це число можна записати у вигляді ряду, загальний член якого є оберненим до добутку

$$(2 + g_1)\,(2 + g_1 + g_2)\;\ldots\;(2 + g_1 + g_2 + \ldots + g_n).$$

Цей ряд називається *рядом Енгеля*, а зображення дійсного числа x у такому вигляді — його *E-зображенням*, при цьому число $g_n = g_n(x)$ називається *n-м символом* (або *цифрою*) цього зображення.

Нехай (u_n) — нескінченна послідовність дійсних чисел, яка має такі властивості:

1) сума ряду із загальним членом u_n дорівнює 1;

2) абсолютна величина u_n менша за 1 для будь-якого цілого невід'ємного n;

3) залишок r_n вказаного ряду лежить в інтервалі $(0, 1)$.

Вивчається функція f, задана таким чином (див. подробиці в статті [3]). Нехай число x із проміжку $(0, 1]$ задане своїм E-зображенням із символами $g_n = g_n(x)$. Тоді значення функції $y = f(x)$ визначається рядом спеціального вигляду, загальний член якого є добутком членів згаданої вище послідовності (u_n) і залишків r_n.

Метою роботи є опис локальних і глобальних властивостей функції f, зокрема її структурних, екстремальних, диференціальних, інтегральних і фрактальних властивостей.

Аналіз попередніх досліджень

Серед функцій, неперервних на відрізку $[0, 1]$, більшість має складну локальну структуру. Це, зокрема, сингулярні функції (тобто функції, похідна яких дорівнює нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега), ніде не монотонні функції (не мають жодного як завгодно малого проміжку монотонності), ніде не диференційовні функції (не мають похідної в жодній точці) тощо.

Для моделювання і дослідження таких математичних об'єктів часто використовують нескінченні ряди, нескінченні добутки, ланцюгові дроби тощо. Зокрема, такий підхід застосовувався до класичних прикладів таких функцій: це сингулярні функції Кантора [4], Салема [5, 6], Мінковського [7], Серпінського [8], ніде не диференційовні функції Вейєрштрасса [9], Такаґі [10], Серпінського [11], Буша–Вундерліха [12, 13] та ін.

Останнім часом для цього також використовуються системи функціональних рівнянь, системи ітерованих функцій, різноманітні системи кодування чисел (системи зображення чисел) і автомати зі скінченною пам'яттю (перетворювачі цифр одного зображення в цифри іншого).

Також для вивчення таких функцій ефективно можуть бути використані ідеї та інструменти теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу) [9, 4], зокрема поняття самоподібної множини і поняття розмірності Гаусдорфа–Безиковича.

Раніше в роботах [14, 15] досліджувався у певному розумінні схожий об'єкт, заданий за допомогою зображення чисел зі скінченним алфавітом і самоподібною геометрією (а саме: s-кового зображення і Q-зображення). На відміну від s-кового зображення і Q-зображення E-зображення має нескінченний алфавіт і несамоподібну геометрію. Це породжує певні труднощі (іноді непереборні) при розв'язанні окремих метричних та ймовірнісних задач, які є значно простішими для самоподібних та N-самоподібних зображень.

Виклад основних результатів

Теорема 1. Функція f є неперервною в кожній точці інтервалу $(0, 1)$, в точці $x = 0$ — справа, а в точці $x = 1$ — зліва.

Теорема 2. Якщо всі члени послідовності (u_n) є невід'ємними, то f є:

1) функцією розподілу ймовірностей на відрізку $[0, 1]$, причому функцією розподілу випадкової величини, E-символи η_k якої є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, що мають розподіл $\mathbf{P}\{\eta_k = n\} = u_n$;

2) строго зростаючою, якщо $u_n > 0$ для будь-якого цілого невід'ємного n;

3) чисто абсолютно неперервною або чисто сингулярною функцією.

Теорема 3. Якщо послідовність (u_n) нулів не містить, але в ній є від'ємні члени, то функція f є ніде не монотонною на відрізку $[0, 1]$, тобто не має жодного як завгодно малого проміжку монотонності.

Також у роботі описано екстремуми функції f, її множини рівнів, «симетрії» графіка (тобто автомодельні властивості функції) і запропоновано оцінку інтеграла Лебега (див. подробиці в статті [3]).

Висновки та перспективи подальших досліджень

Існують певні труднощі в розвитку як індивідуальної, так і загальної теорії функцій зі складною поведінкою. У першу чергу, вони пов'язані з відсутністю ефективних способів їхнього аналітичного задання, а також відповідного інструментарію для їхнього дослідження.

У роботі для конструювання і дослідження однієї нескінченно-параметричної сім'ї неперервних функцій зі складними локальними властивостями успішно використовується E-зображення дійсного числа (тобто його кодування засобами нескінченного алфавіту за допомогою рядів Енгеля — додатних рядів, членами яких є числа, обернені до накопичувальних добутків натуральних чисел).

Ідеї й результати цієї роботи можуть бути корисні для дослідження інших класів функцій зі складною поведінкою, пов'язаних з різноманітними нескінченносимвольними системами зображення дійсних чисел.

Список використаних джерел

1. Engel F. Entwicklung der Zahlen nach Stammbrüchen. *Verh. d. 52. Versamml. dtsch. Philologen u. Schulmänner Marburg 1913*. Leipzig : Teubner, 1914. P. 190–191.
2. Працьовитий М. В., Гетьман Б. І. Ряди Енгеля та їх застосування. *Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки*. 2006. № 7. С. 105–116.
3. Baranovskyi O., Pratsiovytyi M. One class of continuous functions with complicated local properties related to Engel series. *Funct. Approx. Comment. Math. Advance Publication*. 2022. P. 1–20.
4. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. Київ : Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. 296 с.
5. Salem R. On some singular monotonic functions which are strictly increasing. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1943. Vol. 53, no. 3. P. 427–439.
6. Takács L. An increasing continuous singular function. *Amer. Math. Monthly*. 1978. Vol. 85, no. 1. P. 35–37.
7. Minkowski H. Zur Geometrie der Zahlen. *Verh. d. 3. Int. Math.-Kongr. Heidelb. 1904*. Leipzig : Teubner, 1905. S. 164–173.
8. Sierpiński W. Un exemple élémentaire d'une fonction croissante qui a presque partout une dérivée nulle. *Giorn. Mat. Battaglini (3)*. 1916. Vol. 54. P. 314–334.
9. Турбин А. Ф., Працевитый Н. В. Фрактальные множества, функции, распределения. Киев : Наук. думка, 1992. 208 с.
10. Takagi T. A simple example of the continuous function without derivative. *Tōkyō Sūgaku-Butsurigakkwai Hōkoku*. 1901. Vol. 1. P. 176–177.
11. Працьовитий М. В., Василенко Н. А. Розподіли ймовірностей на графіках одного класу ніде не диференційовних функцій. *Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины*. 2013. Т. 26. С. 159–171.
12. Bush K. A. Continuous functions without derivatives. *Amer. Math. Monthly*. 1952. Vol. 59, no. 4. P. 222–225.
13. Wunderlich W. Eine überall stetige und nirgends differenzierbare Funktion. *Elem. Math.* 1952. Bd. 7, H. 4. S. 73–79.
14. Працьовитий М. В., Калашніков А. В. Про один клас неперервних функцій зі складною локальною будовою, більшість з яких сингулярні або недиференційовні. *Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины*. 2011. Т. 23. С. 180–191.
15. Працьовитий М. В., Калашніков А. В. Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з *Q*-зображенням дійсних чисел. Укр. мат. журн. 2013. Т. 65, № 3. С. 405–417.