Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006, № 7.— С. 230–244.

УДК 511.33

Про фрактальну оцінку кількості циліндричних двійкових зображень числа з допомогою одного спеціального ряду

Я. В. Гончаренко, І. О. Микитюк
(Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова)

Анотація. В роботі розглядається зображення дійсних чисел за допомогою одного спеціального ряду (циліндричне зображення), алфавіт якого складається з двох символів. Розв'язується задача про кількість циліндричних двійкових зображень дійсного числа одиничного відрізка. Вивчено фрактальні властивості множини чисел, що мають: 1) континуальну кількість циліндричних зображень; 2) скінченну (зокрема не більше 2) кількість зображень.

Abstract. In this paper we consider an expansion of real numbers via a special series (cylindrical expansion), whose alphabet consists of two symbols. We solve a problem on the number of cylindrical expansions of real numbers from the unit interval. We study fractal properties of the set of real numbers having: 1) a continuum number of cylindrical expansions, 2) a finite number of cylindrical expansions (in particular, less then 3).

1. Вступ

Нехай

$$r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n + r_n = S_n + r_n \tag{1}$$

— збіжний знакододатний ряд. Якщо M — скінченна або нескінченна підмножина множини натуральних чисел N, то число

$$x = x(M) = \sum_{n \in M} a_n$$

називається *неповною сумою ряду* (1). Очевидно, що

$$x(M) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \quad \text{де} \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad n \in M; \\ 0, & \text{якщо} \quad n \notin M. \end{cases}$$

Робота частково підтримана проектом DFG 436 113/80, SFB 611

Множину всіх неповних сум ряду (1), тобто коли M пробігає множину $\sigma(N)$ всіх підмножин множини натуральних чисел N (буліан N), позначатимемо через Δ'. Отже,

$$\Delta^{'} := \{x : x = \sum_{n \in M} a_n, \quad M \in \sigma(N)\}.$$

Зрозуміло, що всі частинні суми S_n і залишки r_n ряду (1) належать множині Δ' (але не лише вони). Легко довести, що $\Delta^{'} = [0, r_0]$, якщо $a_k \leq r_k \ \forall k \in N$.

Топологічні властивості множини Δ' детально вивчено ([**12**]), чого не можна сказати про метричні та фрактальні властивості. Їх дослідження є самостійною задачею. Для певних класів рядів вона розв'язувалась в роботах [**4, 10**]. Авторам невідомі необхідні та достатні умови нуль-мірності (за Лебегом) множини Δ' та вираз її розмірності Хаусдорфа-Безиковича для довільно вибраного ряду (1).

Якщо число x є неповною сумою ряду (1) при певній множині M, а отже (ε_n), то казатимемо, що воно має *двійкове зображення з допомогою ряду* (1). Зауважимо, що таке зображення є одним зі способів кодування дійсних чисел за допомогою алфавіту з двох символів $\{0, 1\}$, частковим випадком якого є класичне двійкове зображення чисел $x \in [0, 1]$, яке ми отримуємо, коли $a_n = 2^{-n}$. Цікавим є випадок, коли $a_n = \varphi^n$, де φ — "золоте відношення", він розглядався в роботах [**13, 8**].

Окремо взятий ряд породжує свою геометрію зображення, тобто дає своє геометричне значення символів (цифр), свої метричні співвідношення тощо. Якщо $a_n < r_n$ для довільного $n \in N$, то дана система зображення числа є надлишковою, числа мають безліч, точніше: континуальну множину різних зображень. Це має певне значення в задачах кодування інформації [**1, 8**]. Вказаний спосіб кодування чисел має пряме відношення до кількох складних проблем теорії ймовірностей, зокрема поглиблення теореми Джессена-Вінтнера [**5, 6, 7**], і безпосередньо пов'язаний з проблемою розподілу сум випадкових рядів, зокрема нескінченних згорток Бернуллі, які інтенсивно вивчаються в останні десятиліття [**2, 3, 12, 14, 16, 18, 20**].

В даній роботі ми досліджуємо питання про кількість зображень кожного з чисел $x \in [0, r_0]$, при умові, що ряд (1) має властивості

$$\begin{cases} a_{s(k-1)+1} = a_{s(k-1)+2} + ... + a_{sk}, \\ r_j = a_j \quad \text{при} \quad j \neq s(k-1)+1, \end{cases} \tag{2}$$

де s — фіксоване натуральне число більше 2. Ми також цікавимось мірою Лебега та розмірністю Хаусдорфа-Безиковича множин чисел, які мають скінченну та континуальну кількість різних зображень.

В останньому пункті роботи ми досліджуємо структуру (вміст дискретної та неперервної компонент), в частковому випадку, тип розподілу випадкової неповної суми ряду з незалежними доданками, який задовольняє умови (2).

2. Циліндричне зображення точок множини неповних сум

Означення 1. Нехай $(c_1, ..., c_m)$ — заданий впорядкований набір символів, $c_i \in \{0,1\}$. *Циліндром рангу m з основою $c_1...c_m$* $(c_i \in \{0,1\})$ називається множина $\Delta'_{c_1...c_m}$, яка складається з усіх неповних сум ряду (1) виду

$$\sum_{n=1}^{m} c_n a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \quad \text{де} \;\; \varepsilon_n \in \{0,1\}.$$

Очевидно, що

$$\inf \Delta'_{c_1...c_m} = \sum_{n=1}^{m} c_n a_n \in \Delta'_{c_1...c_m},$$

$$\sup \Delta'_{c_1...c_m} = r_m + \sum_{n=1}^{m} c_n a_n \in \Delta'_{c_1...c_m}.$$

Означення 2. *Циліндричним відрізком рангу m з основою $c_1...c_m$* $(c_i \in \{0,1\})$ називається відрізок

$$\Delta_{c_1...c_m} = \left[\inf \Delta'_{c_1...c_m},\ \sup \Delta'_{c_1...c_m}\right] = \left[\sum_{n=1}^{m} c_n a_n,\ r_m + \sum_{n=1}^{m} c_n a_n\right].$$

Інтервал з тими ж кінцями, що й в $\Delta_{c_1...c_m}$, будемо позначати $\nabla_{c_1...c_m}$ і називати *циліндричним інтервалом рангу m з основою $c_1...c_m$* .

Взагалі кажучи, $\Delta'_{c_1...c_m} \neq \Delta_{c_1...c_m}$, але завжди має місце включення

$$\Delta'_{c_1...c_m} \subset \Delta_{c_1...c_m}.$$

Наприклад, для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{3^n}$ циліндр Δ'_{10} є підмножиною класичної множини Кантора C, а саме $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cap C$, яка є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

Безпосередньо з означень 1-2 випливають такі властивості циліндричних множин:

1. $\Delta'_{c_1...c_m} = \Delta'_{c_1...c_m 0} \cup \Delta'_{c_1...c_m 1} = \bigcup\limits_{i_1=0}^{1} ... \bigcup\limits_{i_k=0}^{1} \Delta'_{c_1...c_m i_1...i_k}$.
2. $\Delta_{c_1...c_m i} \subset \Delta_{c_1...c_m}$, $i \in \{0,1\}$.
3. $\inf \Delta_{c_1...c_m} = \inf \Delta_{c_1...c_m 0} < \inf \Delta_{c_1...c_m 1}$, $\sup \Delta_{c_1...c_m} = \sup \Delta_{c_1...c_m 1}$.
4. $d(\Delta'_{c_1...c_m}) = |\Delta_{c_1...c_m}| = r_m \to 0 \ (m \to \infty)$.

   Легко довести, що

5. $\Delta_{c_1...c_m} = \Delta_{s_1...s_k} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m = k, \\ \sum\limits_{n=1}^{m} (c_n - s_n) a_n = 0. \end{cases}$
6. Якщо $r_{m+1} < a_{m+1}$, то $\inf \Delta_{c_1...c_m 1} - \sup \Delta_{c_1...c_m 0} = a_{m+1} - r_{m+1}$,

7. $$\Delta_{c_1\ldots c_m 0}\cap\Delta_{c_1\ldots c_m 1}=\begin{cases}[b+a_{m+1};b+r_{m+1}], & \text{якщо}\quad a_{m+1}<r_{m+1};\\ \Delta_{c_1\ldots c_m 10\ldots 0\ldots}, & \text{якщо}\quad a_{m+1}=r_{m+1};\\ \varnothing, & \text{якщо}\quad a_{m+1}>r_{m+1};\end{cases}$$

де $b=\sum\limits_{n=1}^{m}c_n a_n$.

Наслідок 1. Якщо $E=\nabla_{c_1\ldots c_m 0}\cap\nabla_{c_1\ldots c_m 1}\neq\varnothing$, то $r_{m+1}>a_{m+1}$; якщо $E=\varnothing$, то $r_{m+1}<a_{m+1}$.

Наслідок 2. $|\Delta_{c_1\ldots c_m 0}\cap\Delta_{c_1\ldots c_m 1}|=r_{m+1}-a_{m+1}$, якщо $r_{m+1}\geq a_{m+1}$.

З означення циліндричного відрізка і властивості 2, для довільної послідовності (c_k), $c_k\in\{0,1\}$, маємо вкладеність:

$$\Delta_{c_1}\supset\Delta_{c_1c_2}\supset\ldots\supset\Delta_{c_1\ldots c_k}\supset\ldots\quad\text{і}\quad\Delta'_{c_1}\supset\Delta'_{c_1c_2}\supset\ldots\supset\Delta'_{c_1\ldots c_k}\supset\ldots\,.$$

Більше того, враховуючи властивості 3 та 4, за аксіомою Кантора існує єдине число $x\in[0;r_0]$ таке, що

$$x=\bigcap_{m=1}^{\infty}\Delta_{c_1\ldots c_m}=\lim_{m\to\infty}[\inf\Delta_{c_1\ldots c_m}]=\sum_{k=1}^{\infty}c_k a_k. \tag{3}$$

Тоді за означенням циліндра

$$x=\bigcap_{m=1}^{\infty}\Delta'_{c_1\ldots c_m}.$$

Означення 3. Подання числа x у вигляді (3) називається *циліндричним.* Вираз (3) символічно записуватимемо $x=\Delta_{c_1\ldots c_m\ldots}$ і називатимемо *циліндричним зображенням числа (точки) x.*

Лема 1. *Циліндр $\Delta'_{c_1\ldots c_m}$ є досконалою (замкненою без ізольованих точок) множиною.*

Доведення. Нехай x_0 — гранична точка циліндра $\Delta'_{c_1\ldots c_m}$, тобто $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, де $x_n\in\Delta'_{c_1\ldots c_m}$. Оскільки $\Delta'_{c_1\ldots c_m}\subset\Delta_{c_1\ldots c_m}$, то всі члени послідовності (x_n) належать циліндричному відрізку $\Delta_{c_1\ldots c_m}$. Із-за замкненості останнього $x_0\in\Delta_{c_1\ldots c_m}$.

Доведемо, що для довільного $k\in N$ існує циліндричний відрізок $\Delta_{c_1\ldots c_m i_1\ldots i_k}$, який містить x_0. Для цього припустимо супротивне, тобто що знайдеться $k\in N$ таке, що x_0 належить доповненню множини

$$F_k=\bigcup_{i_1=0}^{1}\ldots\bigcup_{i_k=0}^{1}\Delta_{c_1\ldots c_m i_1\ldots i_k}.$$

Множина F_k є замкненою, а тому її доповнення $\overline{F}_k$ є множиною відкритою.

Оскільки

$$x_n\in\overline{\Delta}_{c_1\ldots c_m}=\overline{F}_k=\bigcup_{i_1=0}^{1}\ldots\bigcup_{i_k=0}^{1}\Delta'_{c_1\ldots c_m i_1\ldots i_k}\subset F_k,$$

а x_0 є внутрішньою точкою множини $\overline{F}_k$, то існує ε-окіл точки x_0, що не містить жодної точки послідовності (x_n). А це суперечить тому, що x_0 є границею послідовності (x_n). Отже, $x_0 \in F_k$ для будь-якого $k \in N$. А тому існує послідовність вкладених циліндричних відрізків $(\Delta_{c_1 \ldots c_m i_1 \ldots i_k})$, що містять x_0. Тоді, враховуючи властивість 3 циліндричних множин, за аксіомою Кантора x_0 є єдиною точкою, спільною для всіх циліндрів вказаної послідовності, тобто

$$x_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1 \ldots c_m i_1 \ldots i_k} = \sum_{n=1}^{m} c_n a_n + \sum_{n=1}^{\infty} i_n a_{n+m}.$$

Отже, x_0 має циліндричне зображення $\Delta_{c_1 \ldots c_m i_1 \ldots i_k \ldots}$ і, згідно з означенням, належить циліндру $\Delta'_{c_1 \ldots c_m}$. Тому остання множина є замкненою.

Відсутність ізольованих точок у циліндра $\Delta'_{c_1 \ldots c_m}$ доведемо методом від супротивного.

Припустимо, що даний циліндр має ізольовану точку x_0. Тобто $x_0 \in \Delta'_{c_1 \ldots c_m}$ і існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap [\Delta'_{c_1 \ldots c_m} \setminus \{x_0\}] = \varnothing. \tag{4}$$

Оскільки для довільного $n \in N$

$$\Delta'_{c_1 \ldots c_m} = \bigcup_{t_1=0}^{1} \ldots \bigcup_{t_n=0}^{1} \Delta'_{c_1 \ldots c_m t_1 \ldots t_n},$$

то для кожного $n \in N$ існує набір $(t_1^0, \ldots, t_n^0)$ такий, що

$$x_0 \in \Delta'_{c_1 \ldots c_m t_1^0 \ldots t_n^0}.$$

Тоді для достатньо великих n $(n > -3(\log_d \varepsilon + 1))$

$$\Delta'_{c_1 \ldots c_m t_1^0 \ldots t_n^0} \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Але останній циліндр, крім точки x_0, містить континуальну множину точок з $\Delta'_{c_1 \ldots c_m}$, що суперечить рівності (4). □

Множина всіх точок $x \in [0; r_0]$, що мають циліндричне подання та зображення, співпадає з множиною неповних сум ряду (1).

Безпосередньо з означення циліндричного зображення числа випливає твердження:*числа* $u = \Delta_{c_1 \ldots c_m \ldots}$ *і* $v = \Delta_{s_1 \ldots s_m \ldots}$ *співпадають тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (c_i - s_i) a_i = 0.$$

3. Про один спеціальний ряд

Нехай s — фіксоване натуральне число, більше 1.

Теорема 1. *Якщо знакододатний ряд* (1) *з сумою 1 для всіх натуральних* k *задовольняє умови*

$$a_{s(k-1)+1} = a_{s(k-1)+2} + a_{s(k-1)+3} + ... + a_{s(k-1)+s}, \tag{5}$$

$$a_j = r_j \equiv a_{j+1} + a_{j+2} + ..., \quad \text{при} \ \ j \neq s(k-1)+1, \quad k \in N, \tag{6}$$

де s — *фіксоване натуральне число, більше* 2, *то*

$$a_{s(k-1)+j} = \frac{2^{s-j}}{(2^s-1)^k}, \quad j = \overline{2, s}, \tag{7}$$

$$a_{s(k-1)+1} = \frac{2^{s-1}-1}{(2^s-1)^k}, \quad k \in N. \tag{8}$$

Доведення. Скористаємось методом математичної індукції. Для цього перевіримо істинність рівностей (7) і (8) при $k = 1$.

З умови (5) випливає, що $a_1 < r_1$ і

$$\Delta_0 \cap \Delta_1 = [a_1, r_1] = \Delta_{\underbrace{01...1}_{s}} = \Delta_{\underbrace{10...0}_{s}}.$$

Звідки, умови (6) і властивості 9 циліндричних множин слідує, що відрізок $[0,1]$ є об'єднанням $2^s - 1$ неперекривних циліндричних відрізків рангу s довжиною r_s:

$$[0,1] = \Delta_{\underbrace{0...0}_{s}} \cup ... \cup \Delta_{\underbrace{01...1}_{s}} \cup \Delta_{\underbrace{10...01}_{s}} \cup ... \cup \Delta_{\underbrace{1...1}_{s}}.$$

Тому

$$a_s = \inf \Delta_{\underbrace{0...01}_{s}} = \sup \Delta_{\underbrace{0...0}_{s}} = |\Delta_{\underbrace{0...0}_{s}}| = r_s = \frac{1}{2^s-1}.$$

За умовою (6) $a_{s-1} = r_{s-1}$. Тому $a_{s-1} = a_s + r_s = 2a_s = \frac{2}{2^s-1}$. Враховуючи умову (6), аналогічними міркуваннями отримуємо

$$a_{s-2} = r_{s-2} = a_{s-1} + r_{s-1} = 2a_{s-1} = \frac{2^2}{2^s-1}, \quad ...,$$

$$a_m = r_m = a_{m+1} + r_{m+1} = 2a_{m+1} = \frac{2^{s-m}}{2^s-1}, \quad ...,$$

$$a_2 = r_2 = a_3 + r_3 = 2a_3 = \frac{2^{s-2}}{2^s-1}.$$

Тоді з умови (5) і отриманих виразів маємо: $a_1 = a_2 + ... + a_s = \dfrac{2^{s-1}-1}{2^s-1}$.

Отже, рівності (7) і (8) при $k = 1$ виконуються.

Припустимо виконання рівностей (7) і (8) при $k = n$, тобто

$$a_{s(n-1)+j} = \frac{2^{s-j}}{(2^s-1)^n}, \quad j = \overline{2, s}, \quad a_{s(n-1)+1} = \frac{2^{s-1}-1}{(2^s-1)^n}.$$

Розглянемо $k = n+1$. Відрізок $[0,1]$ в силу умов (5)-(6) і властивостей циліндричних множин є об'єднанням неперекривних циліндрів рангу ns, одним з яких є циліндр $\Delta_{0...0}$. Останній, в силу тих же умов є об'єднанням $2^s - 1$ неперекривних циліндрів рангу $(n+1)s$:

$$\Delta_{\underbrace{0...0}_{ns}\underbrace{0...0}_{s}},\ ...,\ \Delta_{\underbrace{0...0}_{ns}\underbrace{01...1}_{s}},\ \Delta_{\underbrace{0...0}_{ns}\underbrace{10...01}_{s}},\ ...,\ \Delta_{\underbrace{0...0}_{ns}\underbrace{1...1}_{s}}.$$

Тому

$$a_{(n+1)s} = \inf \Delta_{\underbrace{0...0}_{ns}\underbrace{0...01}_{s}} = \sup \Delta_{\underbrace{0...0}_{ns}\underbrace{0...0}_{s}} = |\Delta_{\underbrace{0...0}_{(n+1)s}}| =$$

$$= r_{(n+1)s} = \frac{r_{ns}}{2^s - 1} = \frac{a_{ns}}{2^s - 1} = \frac{1}{(2^s - 1)^{n+1}}.$$

Враховуючи (6),

$$a_{(n+1)s-1} = r_{(n+1)s-1} = 2a_{(n+1)s} = \frac{2}{(2^s - 1)^{n+1}}, \quad ...,$$

$$a_{(n+1)s-m} = r_{(n+1)s-m+1} = 2a_{(n+1)s-m+1} = \frac{2^m}{(2^s - 1)^{n+1}}, \quad ...,$$

$$a_{ns+2} = r_{ns+s} = 2a_{ns+s} = \frac{2^{s-2}}{(2^s - 1)^{n+1}}.$$

Використовуючи рівність (5),

$$a_{ns+1} = a_{ns+2} + ... + a_{ns+s} = \frac{2^{s-1} - 1}{(2^s - 1)^{n+1}}.$$

Отже, рівності (7) і (8) виконуються при $k = n+1$. Тому за принципом математичної індукції ці рівності мають місце для довільного натурального k. □

Наслідок 1. *Існує лише один знакододатний ряд з сумою 1, який для довільного натурального k задовольняє умови* (5) *і* (6).

Наслідок 2. *Нехай m і s — фіксовані наутральні числа, $s > 2$. Тоді існує лише один знакододатний ряд з сумою 1, який задовольняє умови*

$$a_{m+s(k-1)+1} = a_{m+s(k-1)+2} + ... + a_{m+s(k-1)+s},$$
$$a_j = r_j \equiv a_{j+1} + a_{j+2} + ... \quad \text{при} \quad i \notin \{m + s(k-1) + 1\},$$

для довільного натурального k. При цьому

$$a_i = 2^{-i}, \quad i = \overline{1, m-1}; \quad a_{m+s(k-1)+1} = \frac{2^{s-1} - 1}{2^{m-1}(2^s - 1)^k}, \quad a_{m+s(k-1)+j} = \frac{2^{s-j}}{2^{m-1}(2^s - 1)^k}.$$

Наслідок 3. *Для $s = 3$ існує лише один знакододатний ряд з сумою 1, який для довільного натурального k задовольняє умови* (5) *і* (6). *При цьому:*

$$a_{3k-2} = \frac{3}{7^k}, \quad a_{3k-1} = \frac{2}{7^k}, \quad a_{3k} = \frac{1}{7^k}.$$

4. Зв'язок циліндричного та d-адичного зображення

Нехай d — деяке фіксоване натуральне число, більше 1. Добре відомо, що кожне ірраціональне число $x \in (0,1)$ єдиним чином розкладається в ряд

$$x = \frac{\alpha_1}{d} + \frac{\alpha_2}{d^2} + ... + \frac{\alpha_k}{d^k} + ... \equiv \Delta^d_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}, \tag{9}$$

де $\alpha_k \in \{0,1,...,d-1\}$, який називається *$d$-адичним розкладом (дробом) числа x.* При цьому число α_k називається *k-ою d-адичною цифрою x.*

Для раціонального числа $x \in [0,1]$ розклад (9) теж має місце, але деякі мають таких зображень два:

$$\Delta^d_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k 00...0...} = \Delta^d_{\alpha_1\alpha_2...(\alpha_k-1)(d-1)(d-1)...(d-1)...}.$$

Такі числа називаються *d-адично раціональними* і мають два d-адичні розклади, що містять періоди (0) або $(d-1)$.

Множина всіх чисел з $[0;1]$, які мають перші k d-адичні цифри відповідно рівні $c_1, c_2, ..., c_k$ утворюють відрізок

$$\Delta^d_{c_1...c_k} \equiv \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{d^i}; \frac{1}{d^k} + \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{d^i}\right],$$

який називається *d-адичним циліндричним відрізком* з основою $c_1c_2...c_k$ рангу k.

Циліндричні d-адичні відрізки володіють такими найпростішими властивостями:

(1) $|\Delta^d_{c_1...c_k}| = d^{-k}$;

(2) $\Delta^d_{c_1...c_k} = \bigcup\limits_{c\in\{0,1,...,d-1\}} \Delta^d_{c_1...c_k c}$; $\sup \Delta^d_{c_1...c_k c} = \inf \Delta^d_{c_1...c_k(c+1)}$;

(3) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta^d_{c_1...c_k} = x \equiv \Delta^d_{c_1...c_k...}$.

Нехай $d = 2^s - 1$. Далі ми будемо розглядати лише циліндричне зображення чисел за допомогою ряду (1), який має суму 1 і задовольняє умови (2), тобто коли його члени виражаються формулами (7) і (8). Властивості циліндричних множин дозволяють легко встановити взаємозв'язок між циліндричним та d-адичним зображенням чисел.

Лема 2. *Мають місце рівності*

$$\Delta_{c_1...c_{s(k-1)}0} \cap \Delta_{c_1...c_{s(k-1)}1} = \Delta_{c_1...c_{s(k-1)}\underbrace{01...1}_{s-j}} \cap \Delta_{c_1...c_{s(k-1)}\underbrace{10...0}_{s-j}} =$$

$$= \Delta_{c_1...c_{s(k-1)}\underbrace{01...1}_{s}} = \Delta_{c_1...c_{s(k-1)}\underbrace{10...0}_{s}}, \quad j = \overline{s-1,1}. \tag{10}$$

Доведення. Справді, оскільки

$$\inf \Delta_{c_1...c_{s(k-1)}\underbrace{10...0}_{s}} - \inf \Delta_{c_1...c_{s(k-1)}\underbrace{01...1}_{s}} = a_{s(k-1)+1} - (a_{s(k-1)+2} + a_{s(k-1)+3} + ... + a_{s(k-1)+s}) = 0,$$

що випливає з умови (5), то має місце остання з рівностей (10).

Перші рівності є наслідком наступних рівностей

$$\inf \Delta_{c_1 \dots c_{s(k-1)}\underbrace{10\dots0}_{s-j}} = \inf \Delta_{c_1 \dots c_{s(k-1)}\underbrace{10\dots0}_{s}},$$

$$\sup \Delta_{c_1 \dots c_{s(k-1)}\underbrace{01\dots1}_{s-j}} = \sup \Delta_{c_1 \dots c_{s(k-1)}\underbrace{01\dots1}_{s}}, \quad j = \overline{s-1, 1}.$$

□

Теорема 2. *Нехай* $(c_1, ..., c_{sk})$ — *довільний набір з* 0 *та* 1. *Циліндр* $\Delta_{c_1 \dots c_{sk}}$ *є* d-*адичним* $(d = 2^s - 1)$ *відрізком рангу* k, *причому*

$$\Delta_{c_1 \dots c_{sk}} = \Delta^d_{\gamma_1 \dots \gamma_k},$$

де

$$\gamma_k = (2^{s-1} - 1)c_{s(k-1)+1} + 2^{s-2}c_{s(k-1)+2} + ... + 2c_{s(k-1)+s-1} + c_{sk}. \tag{11}$$

Доведення. Для доведення даного твердження досить показати, що

1. $\min \Delta_{c_1 \dots c_{sk}} = \min \Delta^d_{\gamma_1 \dots \gamma_k}$;

2. $|\Delta_{c_1 \dots c_{sk}}| = \frac{1}{d^k} = |\Delta^d_{\gamma_1 \dots \gamma_k}|$.

1. Доведемо першу рівність. Використовуючи вирази членів ряду (7) і (8), отримаємо

$$\min \Delta_{c_1 \dots c_{sk}} = \sum_{n=1}^{sk} c_n a_n = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{d^i} \left[(2^{s-1} - 1)c_{s(i-1)+1} + \sum_{j=2}^{s} 2^{s-j c_{s(i-1)+1}} \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{\gamma_i}{d^i} = \min \Delta^d_{\gamma_1 \dots \gamma_k}.$$

2. Використовуючи властивість циліндрів 4 та вирази членів ряду (7) і (8), виразимо

$$|\Delta_{c_1 \dots c_{sk}}| = \sum_{i=sk+1}^{\infty} a_i = r_{sk} = 1 - \sum_{n=1}^{sk} a_n =$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{2^{s-1} - 1}{d^i} + \frac{2^{s-2}}{d^i} + ... + \frac{2}{d^i} + \frac{1}{d^i} \right] =$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{d^i} [(2^{s-1} - 1) + 2^{s-2} + ... + 2 + 1] = 1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{2^s - 2}{d^i} =$$

$$= 1 - (2^s - 2) \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{d^i} = \frac{1}{d^k} = |\Delta^d_{\gamma_1 \dots \gamma_k}|.$$

□

Наслідок 4. *Взаємозв'язок циліндричного та* d-*адичного зображень встановлює рівність*

$$\Delta_{c_1 \dots c_{sk}} = \Delta^d_{\gamma_1 \dots \gamma_k},$$

де d-*адичні символи* γ_k *визначаються формулою* (11).

Теорема 3. *Циліндричні інтервали одного і того ж рангу*

$$\nabla_{c_1...c_{sk}} \quad i \quad \nabla_{b_1...b_{sk}} \tag{12}$$

співпадають або не перетинаються, причому співпадають тоді і тільки тоді, коли

$$c_{s(i-1)+j} = b_{s(i-1)+j}, \quad j = 1, 2, ..., s, \tag{13}$$

або

$$\{(c_{s(i-1)+1}, ..., c_{si}),\ \big(b_{s(i-1)+1}, ..., b_{si})\} = \{(0, 1, ..., 1),\ (1, 0, ..., 0)\} \tag{14}$$

для всіх $i \in \{1, 2, ..., k\}$.

Доведення. Те, що циліндричні інтервали співпадають або не перетинаються випливає безпосередньо з попередньої теореми.

Нехай

$$\gamma = \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_s) = (2^{s-1} - 1)\varepsilon_1 + 2^{s-2}\varepsilon_2 + ... + 2\varepsilon_{s-1} + \varepsilon_s, \quad \varepsilon_i \in \{0, 1\}.$$

Тоді легко довести, що $\varphi(0, 1, 1, ..., 1) = \varphi(1, 0, 0, ..., 0)$. Враховуючи попередню теорему і те, що циліндри одного рангу мають однакову довжину, при умові (14) маємо

$$\Delta_{c_1...c_{sk}} = \Delta^d_{\gamma_1...\gamma_k} = \Delta_{b_1...b_{sk}}.$$

Доведемо обернене твердження: якщо

$$\Delta_{c_1...c_{sk}} = \Delta_{b_1...b_{sk}}, \tag{15}$$

то для всіх i виконується рівність (13) або (14).

Оскільки має місце рівність (15), то, згідно з попередньою теоремою,

$$\varphi(c_{s(i-1)+1}, c_{s(i-1)+2}, ..., c_{si}) = \varphi(b_{s(i-1)+1}, b_{s(i-1)+2}, ..., b_{si}), \quad i = 1, 2, ..., k.$$

Звідки, врховуючи вираз функції φ, маємо

$$(2^{s-1} - 1) \cdot (c_{s(i-1)+1} - b_{s(i-1)+1}) + \sum_{j=2}^{s} 2^{s-j}(c_{s(i-1)+j} - b_{s(i-1)+j}) = 0. \tag{16}$$

Розглянемо можливі випадки. Нехай $c_{s(i-1)+1} = b_{s(i-1)+1}$. Тоді рівність (16) набуває вигляду

$$\sum_{j=2}^{s} 2^{s-j}(c_{s(i-1)+j} - b_{s(i-1)+j}) = 0,$$

її ліва частина є двійковим зображенням цілого числа 0. Оскільки ціле число в двійковій системі числення має єдиний розклад, то в цьому випадку $c_{s(i-1)+j} = b_{s(i-1)+j}$ для всіх $j \in \{2, 3, ..., s\}$. Отже, в цьому випадку має місце рівність (13).

Нехай тепер $c_{s(i-1)+1} \neq b_{s(i-1)+1}$. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $_{s(i-1)+1} = 1$, а $b_{s(i-1)+1} = 0$. Тоді рівність (16) набуває вигляду

$$2^{s-1} - 1 + \sum_{j=2}^{s} 2^{s-j}(c_{s(i-1)+j} - b_{s(i-1)+j}) = 0.$$

Але
$$\sum_{j=2}^{s} 2^{s-j}(c_{s(i-1)+j} - b_{s(i-1)+j}) \geq -(2^{s-2} + 2^{s-1} + ... + 2 + 1) = 2^{s-1} - 1,$$
причому рівність виконується тоді і тільки тоді, коли $c_{s(i-1)+j} = 0$ і $b_{s(i-1)+j} = 1$ одночасно для всіх $j = 2, 3, ..., s$. В решті випадків має місце строга нерівність. Отже, в даному випадку ($c_{s(i-1)+1} \neq b_{s(i-1)+1}$) рівність (16), а отже, рівність циліндрів dov1 має місце лише при умові (14), що й вимагалось довести. □

Теорема 4. *Довільний d-адичний відрізок $\Delta^d_{\gamma_1...\gamma_k}$ є циліндром $\Delta_{(c_1...c_s)...(cs(k-1)+1...c_{sk})}$ рангу sk, де символи c_j ($s(i-1) \leq j \leq si$) визначається умовою $\gamma_i = \varphi(c_{s(i-1)+1}, ..., c_{si})$, тобто,*
якщо $\gamma_i < 2^{s-1} - 1$, то $\gamma_i = 2^{s-1}c_{s(i-1)+1} + 2^{s-2}c_{s(i-1)+2} + ... + c_{si}$,
якщо $\gamma_i > 2^{s-1} - 1$, то $\gamma_i + 1 = 2^{s-1}c_{s(i-1)+1} + 2^{s-2}c_{s(i-1)+2} + ... + c_{si}$,
якщо $\gamma_i = 2^{s-1} - 1$, то $(c_{s(i-1)+1}, ..., +c_{si}) = (0, 1, ..., 1)$ або $(c_{s(i-1)+1}, ..., +c_{si}) = (1, 0, ..., 0)$.

Доведення. Рівність циліндричних множин
$$\Delta^d_{\gamma_1...\gamma_k} = \Delta_{(c_1...c_s)...(cs(k-1)+1...c_{sk})}$$
при умові $\gamma_j = \varphi(c_{s(i-1)+1,...,c_{si}})$, де $s(i-1) \leq j \leq si$, випливає з теореми 2.

Оскільки кожне число $\gamma < 2^{s-1}-1$ єдиним чином можна подати у двійкові системі числення і дописати попереду його двійкового зображення стільки нулів, щоб кількість цифр сатла рівною s, то для кожного такого числа єдиним чином визначається набір $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_s)$ з 0 та 1 такий, що $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_s) = \gamma$.

Якщо $2^{s-1}-1 < \gamma \leq 2^s-1$, то, аналогічно попередньому, єдиним чином в двійковій системі можна подати число $\gamma + 1$. В його двійковому зображенні $(\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_s)_2$ першою цифрою буде 1, а саме зображення буде s-цифровим. При цьому $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_s) = \gamma$.

Нарешті, якщо $\gamma = 2^{s-1}-1$, то існує два набори цифр $(0, 1, ..., 1)$ і $(1, 0, ..., 0)$ таких, що
$$\varphi(0, 1, ..., 1) = \varphi(1, 0, ..., 0) = \varphi(\gamma) = \varphi(2^{s-1} - 1).$$

Таким чином, твердження даної теореми є наслідком теореми 2 і щойно наведених міркувань. □

Зауваження. Повний взаємозв'язок між цифрами (символами) d-адчиного і циліндричного зображень одного і того ж числа встановлюють наступні рівності:
$$\varphi(\underbrace{00...00}_{s}) = 0,$$
$$\varphi(00...01) = 1, \quad \varphi(00...10) = 2, \ ...,$$
$$\varphi(01...11) = \varphi(10...00) = 2^{s-1} - 1, \ ...,$$
$$\varphi(11...11) = 2^s - 1.$$

5. Теореми про кількість циліндричних зображень

Теорема 5. *Кожне* (2^s-1)*-ірраціональне число* $x \in [0,1]$ *має:*

1) континуальну множину різних циліндричних зображень тоді і тільки тоді, коли його (2^s-1)*-адичне зображення містить нескінченну кількість цифр* $2^{s-1}-1$*;*

2) 2^{m_0} *різних циліндричних зображень тоді і тільки тоді, коли його* (2^s-1)*-адичне зображення містить* m_0 *цифр* $2^{s-1}-1$.

Доведення. Якщо x є d-ірраціональним числом, то воно має єдине d-адичне зображення. Якщо це зображення містить нескінченну кількість цифр $v = 2^{s-1} - 1$, то, як слідує з попередньої леми його циліндричне зображення має нескінченну кількість місць блоків з s цифр, на яких може стояти набір символів 01...1 або 10...0. Тому x має континуальну кількість різних циліндричних зображень.

Якщо зображенні x цифр a скінченна кількість, нехай m_0, то при переході від d-адичного зображення до циліндричного всі цифри, крім v, однозначно замінюються блоком символів циліднричного зображення, а кожна з цифр v можа бути замінена як блоком 01...1 так і 10...0. Отже, таке x має стільки різних зображень, скільки підмножин має множина з m_0 елементів, тобто 2^{m_0}. □

Теорема 6. *Кожне* (2^s-1)*-раціональне число* $x \in (0,1)$ *має скінченну кількість циліндричних зображень. Для числа* $x = \Delta^d_{a_1\ldots a_k(0)}$, $d = 2^s-1$, $a_k \neq 0$, *їх кількість виражається числом*

$$l = (2+\varepsilon)\cdot 2^{m_0}, \tag{17}$$

$$\text{де}\ \ m_0 = \{a_i = 2^{s-1}-1,\quad i = 1,2,...,k\},\qquad \varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{коли}\ \ a_k \neq 2^{s-1},\\ 1, & \text{коли}\ \ a_k = 2^{s-1}.\end{cases}$$

Числа 0 *і* 1 *мають одне циліндричне зображення:* $0 = \Delta_{(0)}$ *і* $1 = \Delta_{(1)}$.

Доведення. Очевидно, що числа 0 і 1 мають єдине циліндричне зображення.

Враховуючи лему ... про взаємозв'язок зображень, d-адичне зображення x можна перевести у циліндричне 2^{m_0} різними способами (замінюючи кожну цифру v набором символів 01...1 або 10...0). Інше d-адичне зображення x має вигляд $x = \Delta^d_{a_1\ldots a_{k-1}(a_k-1)(\omega)}$, $\omega = 2^s-2$. Воно у випадку $a_k \neq 2^{s-1}$ має ту ж саму кількість цифр v і на 1 більшу, коли $a_k = 2^{s-1}$. Переведення цього d-адичного зображення x в циліндричне у першому випадку можна здійснити 2^{m_0} способами, а у другому — 2^{m_0+1}. Тому загальна кількість різних зображень дорівнює: у першому випадку — $2^{m_0}+2^{m_0}$, а в другому $2^{m_0}+2^{m_0+1}$, тобто виражається формулою (17). □

6. Метричні та фрактальні властивості множин чисел з різною "кількістю" зображень

Нагадаємо, що *розмірністю Хаусдорфа-Безиковича множини* $E \subset R^1$ називається невід'ємне число

$$\alpha_0(E) = \sup\{\alpha : \quad H_\alpha(E) = +\infty\} = \inf\{\alpha : \quad H_\alpha(E) = 0\},$$

де $H_\alpha(E)$ — міра Хаусдорфа множини E, яка визначається рівністю

$$H_\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{d(E_j) \le \varepsilon} \left\{ \sum_j d^\alpha(E_j) \right\},$$

де інфімум береться за всіма не більш як зчисленними ε-покриттями $\{E_i\}$ множини E, $E_j \subset R^1$. Відомо, що кожна множина чисел відрізка $[0,1]$, яка має додатну міру Лебега, є множиною з розмірностю Хаусдорфа-Безиковича рівною 1.

Теорема 7. *Міра Лебега (а отже, і розмірність Хаусдорфа-Безковича) множини E чисел відрізка* $[0,1]$*, які мають континуальну кількість різних циліндричних зображень, дорівнює 1. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича множинм чисел відрізка* $[0,1]$*, які мають скінченну кількість циліндричних зображень, дорівнює* $\log_A B$*, де* $A = 2^s - 1$*,* $B = 2^s - 2$*.*

Доведення. За відомою теоремою Бореля **[5]** майже кожна (в розумінні міри Лебега) точка $x \in [0,1]$ в своєму d-адичному розкладі має нескінченну кількість цифр $v = 2^{s-1} - 1$. Тому, враховуючи взаємозв'язок циліндричного і d-адичного зображення та теорему 2, числа відрізка $[0,1]$, які мають континуальну кількість циліндричних зображень, утворюють множину міри Лебега 1, а отже, розмірності Хасудорфа-Безиковича 1.

Єдине циліндричне зображення мають числа множини D_0, d-адичні розклади яких цифри v не містять. Добре відомо, що вони утворюють множину канторівського типу з розмірністю Хаудорфа-Безиковича $\log_A B$.

Нехай D_n — множина чисел відрізка $[0,1]$, серед цифр d-адичного зображення з номерами, більшими n, яких немає цифри v. Очевидно, що множина D_n є об'єднанням скінченного числа множин, подібних D_0. Легко бачити, що множина

$$D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$$

містить всі числа відрізки $[0,1]$, які мають скінченну кількість різних циліндричних зображень. Враховуючи властивості монотонності та зчисленної стабільності розмірності Хаусдорфа-Безиковича, маємо, що

$$\alpha_0(D_0) \le \alpha_0(E) = \sup_n \alpha_0(D_n) = \alpha_0(D_0).$$

Отже,

$$\alpha_0(E) = \log_A B.$$

$\square$

7. Випадкова величина ξ, задана розподілами символів циліндричного зображення

Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k = \Delta_{\xi_1 \ldots \xi_k \ldots}, \tag{18}$$

де $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ — збіжний до 1 знакододатний ряд, який має властивість (2), ξ_k — послідовність незалежних випадкових величин з розподілами $\mathbb{P}\{\xi_k = 0\} = p_{0k} \geq 0$, $\mathbb{P}\{\xi_k = 1\} = p_{1k} \geq 0$, $p_{0k} + p_{1k} = 1$.

Властивості розподілу випадкової величини ξ визначаються властивостями нескінченної стохастичної матриці $||p_{ik}||$ та послідовністі $\{a_k\}$. Випадкова величина ξ, згідно з теоремою Джессена-Вінтнера [**17**], має чистий тип розподілу (чисто дискретний, чисто абсолютно неперервний, чисто сингулярний). З теореми П.Леві [**19**] випливає критерій дискретності випадкової величини ξ:

випадкова величина ξ має дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0.$$

Далі вважатимемо, що умова неперервності ξ виконується, тобто $(M = 0)$.

Теорема 8. *Якщо символи циліндричного зображення випадкової величини ξ незалежні і однаково розподілені, тобто $p_{0k} = p_0$, $p_{1k} = p_1$, і при цьому $0 < p_0 < 1$, $p_1 \neq p_0$, то розподіл випадкової величини ξ є сингулярно неперервним.*

Доведення. При даних умовах з вищенаведеного критерію дискретності випливає неперервність розподілу ξ. Враховуючи тереми пунктів 4 і 5, дана випадкова величина є випадковою величиною з незалежними однаково розподіленими d-адичними $(d = 2^s - 1)$ цифрами. Її можна зобразити у вигляді

$$\xi = \Delta^d_{\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_k \ldots},$$

причому

$$\mathbb{P}\{\eta_k = 0\} = \overline{p}_0 = p_0^s \neq p_1^s = \overline{p}_{d-1} = \mathbb{P}\{\eta_k = d-1\}.$$

Оскільки $\mathbb{P}\{\eta_k = 0\} \neq \mathbb{P}\{\eta_k = d-1\}$, то, згідно відомого факту [**9**]:

$$\mathbb{P}\{\eta_k = i\} = \frac{1}{d} \quad \text{рівносильно абсолютній неперервності розподілу} \quad \xi,$$

ξ матиме сингулярний розподіл. $\square$

Література

[1] *Вербіцький О.В.* Вступ до криптології. — Львів: ВНТЛ, 1998. — 248с.

[2] *Гончаренко Я.В.* Згортки розподілів сум випадкових рядів спеціального виду // Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Фізико-математичні науки. — № 4, 2003. — С. 216-232.

[3] *Гончаренко Я.В., Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Тополого-метричні та фрактальні властивості згортки двох сингулярних розподілів випадкових величин з незалежними двійковими цифрами // Теор. ймов. та мат. стат. — 2002. — Вип. 67. — С.11-20.

[4] *Гончаренко Я.В., Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Тополого-метричні і фрактальні властивості множини неповних сум знакододатного ряду та розподілів на ній // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2005, № 6. - С.210-224.

[5] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296с.

[6] *Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Один клас випадкових величин типу Джессена-Вінтнера // Доп. НАН України. — 1998. — № 4. — С. 48-54.

[7] *Постников А.Г.* Вероятностная теория чисел. — Москва: Знание, 1974. — 62 с.

[8] *Стахов А.П.* Коды золотой пропорции. — М.: Радио и связь, 1984. — 152 с.

[9] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения.— Киев: Наук.думка, 1992.— 208с.

[10] *Шалат Т.* О мере Хаусдорфа линейных множеств // Чехословацкий математический журнал, Прага. — т. 11 (86), 1961. — С. 24-56.

[11] *Albeverio S., Gontcharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Jessen-Wintner type random variables and fractal properties of their distributions // Mathematische Nachrichten, Vol.279 (2006), No.15, 1619-1633.

[12] *Albeverio S., Torbin G.* Image measures of infinite product measures and generalized Bernoulli convolutions // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2004. — № 5. — С. 248-264.

[13] *Bergman G.* A number system with an irrational base // Mathematics magazine. — 1957. — № 31. — P. 98 - 119.

[14] *Erdös P.* On a family of symmetric Bernoulli convolutions // Amer. J. Math., **61**, 1939. — P. 974-975.

[15] *Galambos J.* Representations of real numbers by infinity series. — Berlin: Springer-Verlag, 1976. — 146p.

[16] *Garsia A. M.* Arithmetic properties of Bernoulli convolutions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **102** (1962), 409-432.

[17] *Jessen B., Wintner A.* Distribution function and Riemann Zeta-function // Trans.Amer.Math.Soc., **38**, 1935. — P. 48-88.

[18] *Kershner R., Wintner A.* On symmetric Bernoulli convolutions // Amer J. Math., **57**, 1935. — P. 541-548.

[19] *Lévy P.* Sur les séries dont les termes sont des variables indépendantes // Studia Math., **3**, 1931. — P.119-155.

[20] *Peres Y., Schlag W., Solomyak B.* Sixty years of Bernoulli convolutions // In Fractal Geometry and Stochastics II, Progress in Probab. vol.46, Birkhäuser, 2000. — P.39–65.

[21] *Schweiger F.* Ergodic Theory of Fibred Systems and Metric Number Theory. — Oxford: Clarendon Press, 1995.