Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006, № 7.— С. 211–217.

УДК 519.21

Один клас випадкових величин, заданих розподілами елементів свого Q-зображення

В. Кондратюк
(Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського)

Анотація. В даній роботі уточнюються результати, здобуті Працьовитим М.В., Працьовитим М.В. і Торбіним Г.М. стосовно структури, тополого-метричних і фрактальних властивостей розподілів випадкових величин з незалежними Q-символами для випадку, коли стохастична матриця, що визначає розподіл Q-символів, задовольняє додаткові умови. Розглядається випадок, коли вона визначається $2s$ параметрами, елементи кожного її рядка утворюють узагальнену послідовність Фібоначчі.

Abstract. In the paper we detalize results by M.V.Pratsiovytyi, M.V.Pratsiovytyi and G.M.Torbin about the structure, metric-topologacal and fractal properties of probability distributions with independent Q-symbols under additional conditions on the stohastic matrix P, witch determines distributions of Q-symbols. A special attention is paid to the case where the matrix P depends on only $2s$ parameters, and elements of each row are members of a generalized Fibonacci sequence.

1. Вступ

Поняття Q-зображення (представлення) було вперше введене Працьовитим М.В. в роботі [**1, 2**]. Воно узагальнило класичне позиційне s-адичне зображення числа і широко використовувалось в дослідженнях різних авторів, зокрема Торбіна Г.М. [**10, 11**], Кошманенка В.Д. [**11**], Коваля В.В. та ін. Нагадаємо його суть.

Нехай $2 \le s \in N$, $Q = \{q_0, q_1, ..., q_{s-1}\}$ — фіксована множина, де $q_i > 0$, $\sum\limits_{i=0}^{s-1} q_i = 1$; $\Delta^Q_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}$ — Q-зображення $x \in [0; 1]$, $\alpha_k = \alpha_k(x) \in \{0, ..., s-1\} = N^0_{s-1}$, тобто

$$x = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)} \right],$$

де $\beta_{\alpha_k(x)} = \sum\limits_{i=0}^{\alpha_k(x)-1} q_i$, $k \in N$.

© В. Кондратюк, 2006

Розглядається випадкову величину

$$\xi = \Delta^Q_{\eta_1 \dots \eta_k \dots}, \tag{1}$$

де η_k — послідовність незалежних випадкових величин з розподілами

$$P\{\eta_k = i\} = p_{ik} \geq 0, \quad i = \overline{0, s-1}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Властивості розподілу випадкової величини ξ однозначно визначаються матрицею $\|p_{ik}\|$, яка містить нескінченну кількість параметрів. Структура і властивості випадкової величини ξ досліджувались в роботах [**8**]-[**11**].

Було встановлено, що розподіл ξ є чисто дискретним, чисто сингулярним або чисто абсолютно неперервним і не може бути сумішшю цих чистих розподілів. Більше того, ξ має чисто дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_i (p_{ik}) > 0,$$

чисто абсолютно неперервний тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{s-1} \left(1 - \frac{p_{ij}}{q_i} \right)^2 \right) < \infty, \tag{2}$$

і чисто сингулярний тоді і тільки тоді, коли виконуються

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} = 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{s-1} \left(1 - \frac{p_{ij}}{q_i} \right)^2 \right) = \infty.$$

В [**8**] було досліджено структуру розподілу випадкової величини ξ, його самоподібні властивості, фрактальні властивості носія та спектра.

В даній роботі ми уточнюємо наведені результати для випадку, коли матриця $\|p_{ik}\|$ визначається скінченною кількістю параметрів, а саме: елементами перших двох стовпців. Розглядається випадок, коли всі рядки матриці $\|p_{ik}\|$ є узагальненою послідовністю Фібоначчі:

$$p_{i(m+1)} = \frac{1}{2}(p_{i(m-1)} + p_{im}), \quad i = 0, 1, \dots, s-1, \quad m = 2, 3, \dots . \tag{3}$$

В термінах $3(s-1)$ параметрів $\{q_1, \dots, q_{s-1}, p_{11}, \dots, p_{(s-1)1}, p_{12}, \dots, p_{(s-1)2}\}$ ми вказуємо критерії абсолютної неперервності, дискретності, сингулярності, канторовості, умови, при яких функція розподілу випадкової величини ξ зберігає фрактальну розмірність.

2. Асимптотичні властивості матриці розподілу Q-символів

Розглянемо випадкову величину ξ, задану своїм Q-зображенням при $s = 2$.

Лема 1. *Якщо матриця* $||p_{ik}||$ *задовольняє умови* (3), *то її елементи обчислюються за формулами*

$$p_{i(k+2)} = \frac{t_k p_{i1} + t_{k+1} p_{i2}}{2^k} \tag{4}$$

де $t_k = \frac{2^k + (-1)^{k-1}}{3}$.

Доведення. Скористаємось методом математичної індукції. Рівність (4) має місце для $k = 1$, $k = 2$. Справді, при $k = 1$: $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $p_{i3} = \frac{1}{2}(p_{i1} + p_{i2})$. При $k = 2$: $t_2 = 1$, $t_3 = 3$, $p_{i4} = \frac{1}{2}(p_{i2} + p_{i3}) = \frac{1}{2}\left(p_{i2} + \frac{1}{2}p_{i1} + \frac{1}{2}p_{i2}\right) = \frac{1}{4}p_{i1} + \frac{3}{4}p_{i2}$.

Припустивши істинність рівностей

$$p_{i(k+2)} = \frac{t_k p_{i1} + t_{k+1} p_{i2}}{2^k}, \quad p_{i(k+3)} = \frac{t_{k+1} p_{i1} + t_{k+2} p_{i2}}{2^{k+1}},$$

покажемо, що з них випливає

$$p_{i(k+4)} = \frac{t_{k+2} p_{i1} + t_{k+3} p_{i2}}{2^{k+2}}.$$

З умов (3) і припущення індукції маємо:

$$\begin{aligned}
p_{i(k+4)} &= \frac{p_{i(k+2)} + p_{i(k+3)}}{2} = \frac{\frac{t_k p_{i1} + t_{k+1} p_{i2}}{2^k} + \frac{t_{k+1} p_{i1} + t_{k+2} p_{i2}}{2^{k+1}}}{2} = \\
&= \frac{(2t_k + t_{k+1})p_{i1} + (2t_{k+1} + t_{k+2})p_{i2}}{2^{k+2}} = \\
&= \frac{(2\frac{2^k + (-1)^{k-1}}{3} + \frac{2^{k+1} + (-1)^k}{3})p_{i1} + (2\frac{2^{k+1} + (-1)^k}{3} + \frac{2^{k+2} + (-1)^{k+1}}{3})p_{i2}}{2^{k+2}} = \\
&= \frac{\frac{2^{k+2} + (-1)^{k+1}}{3} p_{i1} + \frac{2^{k+3} + (-1)^{k+2}}{3} p_{i2}}{2^{k+2}} = \frac{t_{k+2} p_{i1} + t_{k+3} p_{i2}}{2^{k+2}},
\end{aligned}$$

що і треба було довести. □

Лема 2. *Для довільного* $i \in \{0, 1, ..., s-1\}$, $k = 1, 2, ...$ *послідовність* $\{p_{ik}\}$ *збігаються, причому*

$$\lim_{k \to \infty} p_{ik} = p_i = \frac{1}{3} p_{i1} + \frac{2}{3} p_{i2}. \tag{5}$$

Доведення. З рівності (3) маємо

$$\begin{aligned}
p_i &= \lim_{k \to \infty} p_{i(k+2)} = \lim_{k \to \infty} \frac{t_k p_{i1} + t_{k+1} p_{i2}}{2^k} = \\
&= \lim_{k \to \infty} \frac{\frac{2^{k+2} + (-1)^{k+1}}{3} p_{i1} + \frac{2^{k+3} + (-1)^{k+2}}{3} p_{i2}}{2^{k+2}} = \\
&= \lim_{k \to \infty} \left(\frac{2^{k+2} + (-1)^{k+1}}{3(2^{k+2})} p_{i1} + \frac{2^{k+3} + (-1)^{k+2}}{3(2^{k+2})} p_{i2} \right) = \\
&= \frac{1}{3} p_{i1} + \frac{2}{3} p_{i2}.
\end{aligned}$$

Що і потрібно було довести.

□

Наслідок 1. $p_i = \lim\limits_{k\to\infty} p_{ik} = 0$ *тоді і тільки тоді, коли* $p_{i1} = p_{i2} = 0$. *Звідки маємо, що усі* $p_{ik} = 0$ *(для кожного фіксованого і та усіх* $k \in N$ *).*

Наслідок 2. $p_i = \lim\limits_{k\to\infty} p_{ik} = 1$ *тоді і тільки тоді, коли* $p_{i1} = p_{i2} = 1$. *Звідки маємо, що усі* $p_{ik} = 1$ *(для кожного фіксованого і та усіх* $k \in N$ *).*

3. Структура розподілу випадкової величини ξ

Теорема 1. *Розподіл випадкової величини* ξ *є чисто дискретним тоді і тільки тоді, коли існує і таке, що*

$$p_{i1} = p_{i2} = 1. \tag{6}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай розподіл ξ є чисто дискретним.

Оскільки випадкова величина ξ, є частковим випадком випадкової величини з незалежними Q-символами [**8**], тому має місце нерівність

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} > 0, \tag{7}$$

а (6) виконується лише тоді коли має місце

$$\lim_{k\to\infty} \max_i \{p_{ik}\} = 1. \tag{8}$$

Оскільки усі послідовності $\{p_{0k}\}, \{p_{1k}\}, ..., \{p_{(s-1)k}\}$ збіжні, то з рівності (7) слідує, що одна з послідовностей $\{p_{0k}\}, \{p_{1k}\}, ..., \{p_{(s-1)k}\}$ збігається до 1. Нехай це буде послідовність $\{p_{ik}\}$, $k = 1, 2, 3, ...$, тобто $\lim\limits_{k\to\infty} p_{i_0 k} = 1$. Тоді за наслідком 2 з попередньої леми маємо $p_{i1} = p_{i2} = 1$.

Достатність. Нехай існує $i = i_0$ таке, що $p_{i_0 1} = p_{i_0 2} = 1$. Тоді з означення випадкової величини ξ маємо, що усі $p_{i_0 k} = 1$ для усіх $k \in N$,

$$\max_i \{p_{ik}\} = p_{i_0 k},$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{i_0 k} = 1 > 0.$$

□

Теорема 2. *Розподіл випадкової величини* ξ *є чисто абсолютно неперервним тоді і тільки тоді, коли виконується система рівностей*

$$\begin{cases} \frac{1}{3}p_{01} + \frac{2}{3}p_{02} = q_0, \\ \frac{1}{3}p_{11} + \frac{2}{3}p_{12} = q_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{3}p_{(s-1)1} + \frac{2}{3}p_{(s-1)2} = q_{s-1}. \end{cases} \tag{9}$$

Доведення. Із [**8**, стор. 171] відомо, що випадкова величина ξ має чисто абсолютно неперервний розподіл тоді і тільки тоді, коли виконується умова (2), що рівносильно тому, що одночасно збігаються ряди

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{p_{0j}}{q_0}\right)^2,\quad \sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{p_{1j}}{q_1}\right)^2,\quad \ldots,\quad \sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{p_{(s-1)j}}{q_{s-1}}\right)^2. \tag{10}$$

Не порушуючи загальності, дослідимо на збіжність ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{p_{rj}}{q_r}\right)^2=\left(1-\frac{p_{r1}}{q_r}\right)^2+\left(1-\frac{p_{r2}}{q_r}\right)^2+\sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{p_{r(j+2)}}{q_r}\right)^2.$$

Скориставшись рівністю (4), отримаємо

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{p_{rj}}{q_r}\right)^2=\left(1-\frac{p_{r1}}{q_r}\right)^2+\left(1-\frac{p_{r2}}{q_r}\right)^2+\sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\frac{t_jp_{r1}+t_{j+1}p_{r2}}{2^j}}{q_r}\right)^2=$$

$$=\left(1-\frac{p_{r1}}{q_r}\right)^2+\left(1-\frac{p_{r2}}{q_r}\right)^2+\sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{t_jp_{r1}+t_{j+1}p_{r2}}{2^jq_r}\right)^2=$$

$$=\left(1-\frac{p_{r1}}{q_r}\right)^2+\left(1-\frac{p_{r2}}{q_r}\right)^2+\sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\frac{2^j+(-1)^{j-1}}{3}p_{r1}+\frac{2^{j+1}+(-1)^j}{3}p_{r2}}{2^jq_r}\right)^2=$$

$$=\left(1-\frac{p_{r1}}{q_r}\right)^2+\left(1-\frac{p_{r2}}{q_r}\right)^2+\frac{1}{3q_r}\sum_{j=1}^{\infty}\left(3q_r-\frac{2^j+(-1)^{j-1}}{2^j}p_{r1}-\frac{2^{j+1}+(-1)^j}{2^j}p_{r2}\right)^2=$$

$$=\left(1-\frac{p_{r1}}{q_r}\right)^2+\left(1-\frac{p_{r2}}{q_r}\right)^2+\frac{1}{3q_r}\sum_{j=1}^{\infty}\left(3q_r-p_{r1}-2p_{r2}-\frac{(-1)^{j-1}(p_{r1}-p_{r2})}{2^j}\right)^2.$$

Ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(3q_r-p_{r1}-2p_{r2}-\frac{(-1)^{j-1}(p_{r1}-p_{r2})}{2^j}\right)^2$$

збігається тоді і тільки тоді, коли

$$3q_r-p_{r1}-2p_{r2}=0.$$

Звідки отримаємо

$$\frac{1}{3}p_{r1}+\frac{2}{3}p_{r2}=q_r. \tag{11}$$

Аналогічні умови матимемо і для інших рядів (7), тобто має місце система (6). □

Теорема 3. *Розподіл випадкової величини ξ є чисто сингулярно неперервним тоді і тільки тоді, коли немає жодного i такого, що $p_{i1}=p_{i2}=1$, а також існує таке i_0, що виконується $\frac{1}{3}p_{i_01}+\frac{2}{3}p_{i_02}\neq q_{i_0}$.*

Доведення. Оскільки випадкова величина ξ має чистий розподіл, то дане твердження випливає з теорем 1 та 2. □

Спектром розподілу випадкової величини ξ називається мінімальна замкнена множина, на якій зосереджено розподіл

$$\begin{aligned} S_\xi &= \{x:\ P\{\xi \in (x-\varepsilon;\ x+\varepsilon)\} > 0 \quad \forall \varepsilon > 0\} = \\ &= \{x:\ F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x-\varepsilon) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0\}\,. \end{aligned}$$

Теорема 4. *У випадку сингулярності розподілу випадщкової величини* ξ *її спектр матиме нульову міру Лебега тоді і тільки тоді, коли існує таке* i, *що* $p_{i1} = p_{i2} = 0$. *В протилежному випадку спектр* ξ *є відрізком* $[0;1]$.

Доведення. Якщо має місце рівність $p_{i1} = p_{i2} = 0$, то i-ий рядок матриці $||p_{ik}||$ складається з нулів і спектр належить множині канторівського типу, яка складається з чисел, Q-зображення яких не містить символа "i", а така множина, як відомо [**8**], має нульову міру Лебега.

В протилежному випадку матриця $||p_{ik}||$ не містить жодного нуля і спектр співпадає з відрізком $[0;1]$. □

4. Фрактальні властивості розподілу

Нагадаємо, що невід'ємне число

$$H_0(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{d(E_j) \le \varepsilon} \left\{ \sum_j d^\alpha(E_j) \right\},$$

де $d(E)$ — діаметр множини E, інфімум береться по всіх не більш як зчисленних ε-покриттях множини E, називається α-мірною мірою Хаусдорфа множини E.

Додатне число

$$\alpha_0(E) = \sup\{\alpha:\quad H_\alpha(E) = +\infty\} = \inf\{\alpha:\quad H_\alpha(E) = 0\}$$

називається *розмірністю Хаусдорфа-Безиковича множини* E.

Кажуть, що функція розподілу $F_\xi(x)$ *зберігає фрактальну розмірність*, якщо розмірність Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(\cdot)$ довільної підмножини E спектра розподілу S_ξ і розмірність Хаусдорфа-Безиковича її образу $E' = F_\xi(E)$ співпадають, тобто

$$\alpha_0(E) = \alpha_0(E').$$

Теорема 5. *Функція* $F_\xi(x)$ *зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича тоді і тільки тоді, коли вона є асболютно неперервною, тобто має місце система* (6).

Доведення. Оскільки матриця $||p_{ik}||$, що визначає розподіл випадкової величини ξ, має асимптотичні властивості, а її граничні ймовірності p_0, p_1,..., p_{s-1} визначаються згідно з лемою 2, то, як відомо [**7**], функція розподілу випадкової величини ξ зберігає розмірність Хаусдорфа-Безиковича тоді і тільки тоді, коли $p_i = q_i$ для всіх $i = \overline{0, s-1}$, тобто, коли вона є абсолютно неперервною. □

Наслідок 3. *Розмірність Хаусдорфа-Безиковича спектра розподілу випадкової величини ξ є розв'язком рівняння*

$$\sum_{i:p_{i1},p_{i2}\neq 0} q_i^x = 1. \tag{12}$$

Література

[1] *Працевитый Н.В.* Геометрические вероятности на фрактальных совершенных абсолютно самоподобных множествах пространства R^1 // Применение аналитических методов в вероятностных задачах. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. — С.100-109.

[2] *Працевитый Н.В.* Случайные величины с независимыми Q_2-символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. — Киев:Ин-т математики АН УССР, 1987. — С. 100-109.

[3] *Працевитый Н.В.* Один класс случайных величин с сингулярным распределением // Аналитические методы исследования эволюций стохастических систем. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. — С.78-90.

[4] *Працевитый Н.В.* Распределения случайных величин с независимыми Q-символами // Асимптотические и прикладные задачи случайных эволюций. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. — С.92-101.

[5] *Працьовитий М.В.* Фрактальні властивості розподілів випадкових величин, -знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. — Київ: Ін-т математики АН України, 1994. — С.245-254.

[6] *Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Фрактальна геометрія та перетворення, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича // Динамічні системи: Праці Українського математичного конгресу - 2001. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. — С.77-93.

[7] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // Ergodic Theory and Dynamical Systems. — 2004. — 24, No.1. — P.1-16.

[8] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296с.

[9] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — К.: Наук.думка, 1992. — 208с.

[10] *Працевитый Н.В., Торбин Г.М.* Случайные величины с независимыми Q^*-знаками // Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи. — К.: Ин-т математики АН Украины, 1992. — С.95-104.

[11] *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* $\tilde{Q}$-Representation of real numbers and fractal probability distributions. — Preprint SFB-611, Bonn, 2002 (№ 12). — 22p.