Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006, № 7.— С. 117–125.

УДК 519.21

Властивості розподілів випадкових величин та динамічних систем, пов'язаних з рядами Остроградського першого виду

Г. М. Торбін

(Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова,
Institut für Angewandte Mathematik der Universität Bonn)

Анотація. В роботі розглядаються властивості випадкової величини η, що є сумою ряду Остроградського, різниці елементів якого є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами. Знайдено необхідні та достатні умови дискретності та сингулярної неперервності розподілу η. Доведено, що η не може мати абсолютно неперервного розподілу. В статті також розвивається ергодична теорія представлень чисел за допомогою рядів Остроградського. Доведено, зокрема, що для майже всіх (в смислі міри Лебега) дійсних чисел з одиничного відрізка частоти всіх цифр різницевого представлення Остроградського існують і дорівнюють нулю. Ми також вивчаємо властивості динамічної системи, породженої перетворенням T одностороннього зсуву по різницевому представленню Остроградського. Показано, що не існує ймовірнісних мір, які були б інваріантними і ергодичними відносно T, та абсолютно неперервними відносно міри Лебега.

Abstract. We study properties of the random variable η with independent identically distributed differences of the Ostrogradsky-Pierce expansion. Necessary and sufficient conditions for η to be discrete resp. singularly continuous are found. We prove that η can not be absolutely continuously distributed. Ergodic theory of the Ostrogradsky-Pierce expansions is also developed. In particular, it is proven that for Lebesgue almost all real numbers from the unit interval the asymptotic frequency of any symbol of the difference-version of the Ostrogradsky-Pierce expansion is equal to zero. Properties of a symbolic dynamical system generated by a shift-transformation T on the difference-version of the Ostrogradsky-Pierce expansion are also studied. It is shown that there are no probability measures which are invariant and ergodic (w.r.t. T) and absolutely continuous (w.r.t. Lebesgue measure).

Робота частково підтримана проектами DFG 436 UKR 113/78, 113/80 та фондом Олександра фон Гумбольдта
This work was partly supported by DFG 436 UKR 113/78 and 113/80 projects and by Alexander von Humboldt Foundation

1. Розклади Остроградського 1-го виду та породжені ними динамічні системи

Як відомо **[12]**-**[15]**, будь-яке дійсне число $x \in (0,1)$ можна подати у вигляді ряду

$$\sum_k \frac{(-1)^{k+1}}{q_1 q_2 \dots q_k}, \quad \text{де } q_k \in N, q_{k+1} > q_k, \quad k \in N, \tag{1}$$

Ряди виду (1) називаються рядами Остроградського 1-го виду. Якщо x є ірраціональним числом, то подання (1) єдине і у цьому випадку вираз (1) є нескінченним. Якщо ж x є раціональним, то його можна подати у вигляді (1) двома різними способами.

Ряди Остроградського збігаються досить швидко, що дозволяє наближати ірраціональні числа числами раціональними, які є частковими сумами ряду Остроградського.

На сьогодні існує значна кількість робіт, присвячених розвитку метричної теорії розкладів Остроградського (див. **[1]** та бібліографію в цій роботі), але, на відміну від теорії ланцюгових дробів, цілісної метричної теорії розкладів Остроградського на цей час все ще не створено. Значною мірою це пов'язано з тим фактом, що розклади Остроградського породжують досить складну "геометрію циліндричних відрізків"(див. **[1, 8, 9, 12, 10]**).

Вираз (1) можна переписати у вигляді

$$\frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_1(g_1+g_2)} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{g_1(g_1+g_2)\dots(g_1+g_2+\dots+g_n)} + \cdots, \tag{2}$$

де $g_1 = q_1$ і $g_{n+1} = q_{n+1} - q_n$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$.

Вираз (2) скорочено записується у вигляді $\bar{\text{O}}^1(g_1, g_2, \dots, g_n, \dots)$.

Таким чином, кожне дійсне число $x \in (0,1)$ можна подати у вигляді ряду (2). Вираз (2) називається $\bar{\text{O}}^1$-*представленням*, а числа $g_n = g_n(x)$ — $\bar{\text{O}}^1$-*символами* числа $x \in (0,1)$.

Основними завданнями даної роботи є:

1) розвиток ергодичної теорії $\bar{\text{O}}^1$ - представлень дійсних чисел (зокрема, знаходження нормальних властивостей дійсних чисел, сформульованих в термінах асимптотичних частот $\nu_i(x, \bar{\text{O}}^1)$ $\bar{\text{O}}^1$-*символів* $(i \in N)$, де $\nu_i(x,\bar{\text{O}}^1) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_i(x,n)}{n}$, а $N_i(x,n)$ - кількість символів "i"в $\bar{\text{O}}^1$-представленні числа x до n-го місця включно;

2) дослідження властивостей динамічної системи, породженої наступним перетворенням T одностороннього зсуву по $\bar{\text{O}}^1$представленню:

$$\forall\ x = \bar{\text{O}}^1(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots) \quad \in [0,1],$$

$$T(x) = T(\bar{\text{O}}^1(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots)) = \bar{\text{O}}^1(g_2(x), g_3(x), \dots, g_n(x), \dots);$$

3) дослідження властивостей розподілу випадкової величини

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\eta_1(\eta_1+\eta_2)\dots(\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_k)} = \bar{\text{O}}^1(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k, \dots),$$

$\bar{\text{O}}^1$-символи η_k якої є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, що набувають значень 1, 2, ..., m, ... з ймовірностями p_1, p_2, ..., p_m, ... відповідно, $p_m \geq 0$, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} p_m = 1$.

2. Множина $C[\bar{\text{O}}^1, \{V_n\}]$ та її тополого-метричні властивості.

Нехай $\{V_n\}$ — фіксована послідовність непорожніх підмножин множини $\mathbb{N}$ натуральних чисел. Розглянемо множину $C[\bar{\text{O}}^1, \{V_n\}]$, яка є замиканням множини $C^*[\bar{\text{O}}^1, \{V_n\}]$ усіх ірраціональних чисел $x = \bar{\text{O}}^1(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots)$, $\bar{\text{O}}^1$-символи яких задовольняють умову $g_n(x) \in V_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Очевидно, що $C[\bar{\text{O}}^1, \{V_n\}] = [0,1]$, якщо $V_n = \mathbb{N}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і множина $C[\bar{\text{O}}^1, \{V_n\}]$ є замиканням об'єднання відрізків при $V_n = \mathbb{N}$ для всіх $n > n_0$. Відомо ([**12**]), що множина $C[\bar{\text{O}}^1, \{V_n\}]$ є досконалою множиною (тобто замкненою множиною без ізольованих точок). Якщо $V_n \neq \mathbb{N}$ для нескінченної множини значень n, то вона є ніде не щільною множиною.

Позначимо через F_k об'єднання всіх циліндрів рангу k (тобто множин виду $\bar{\text{O}}^1_{[c_1 c_2 \dots c_k]}$ всіх чисел $x \in [0,1]$, які можна подати у вигляді (2) так, що k перших $\bar{\text{O}}^1$-символів числа x дорівнюють деяким фіксованим числам c_1, c_2, ..., c_k відповідно), внутрішність яких містить точки множини $C[\bar{\text{O}}^1, \{V_n\}]$, $F_0 = [0,1]$, а $\bar{F}_{k+1}$ означимо рівністю $\bar{F}_{k+1} = F_k \setminus F_{k+1}$.

Відомо ([**1**]), що $C[\bar{\text{O}}^1, \{V_n\}]$ має нульову міру Лебега тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\bar{F}_{k+1})}{\lambda(F_k)} = \infty. \tag{3}$$

В роботах [**1, 2**] знайдено достатні умови того, щоб множина $C[\bar{\text{O}}^1, \{V_n\}]$ мала додатну (нулеву) міру Лебега.

Теорема 1. *([**2**]) Нехай $V_k = \{1, 2, \dots, m_k\}$, $m_k \in \mathbb{N}$.*
1) Якщо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{m_1 + m_2 + \dots + m_k}{m_{k+1}} < \infty$, то міра Лебега $\lambda(C[\bar{\text{O}}^1, \{V_n\}]) > 0$.
2) Якщо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k}{m_k} = \infty$, то міра Лебега $\lambda(C[\bar{\text{O}}^1, \{V_n\}]) = 0$.

Приклад.
1) Якщо $m_k = 2^{k!}$, то $\lambda(C[\bar{\text{O}}^1, \{V_n\}]) > 0$.
2) Якщо $m_k = k^2$, то $\lambda(C[\bar{\text{O}}^1, \{V_n\}]) = 0$.

Теорема 2. *([**2**]) Нехай $V_k = \{v_k + 1, v_k + 2, \dots\}$, $v_k \in N$. Якщо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{v_k}{2^k} < +\infty$, то $\lambda(C[\bar{\text{O}}^1, \{V_n\}]) > 0$.*

Наслідок 1. *Якщо $V_k = \{v + 1, v + 2, ...\}$, то $\lambda(C[\bar{\text{O}}^1, \{V_n\}]) = 0$.*

3. Нормальні властивості чисел, заданих $\bar{\text{O}}^1$- представленням

Властивість дійсного числа називають нормальною, якщо вона має місце для майже всіх (в смислі міри Лебега) дійсних чисел.

Прикладами нормальних властивостей можуть слугувати "бути ірраціональним "бути трансцендентним які не залежать від вибраної системи числення (способу представлення дійсного числа). При фіксованому способі представлення дійсного числа зручно формулювати нормальні властивості в термінах символів (цифр) цього представлення. Наприклад, в десятковій системі числення нормальними є наступні властивості: "містити нескінченну кількість нулів (в десятковому записі) "не містити періода "містити кожну цифру з частотою $\frac{1}{10}$"та ін. Якщо число записане у вигляді ланцюгового дробу, то прикладами нормальних властивостей можуть бути: "мати нескінченну кількість елементів у представленні "містити символ "i"з асимптотичною частотою $\frac{1}{\ln 2}\ln\frac{(i+1)^2}{i(i+2)}$"та ін.

Дослідження нормальних властивостей дійсних чисел, записаних за допомогою того чи іншого способу представлення є важливим етапом розвитку метричної теорії відповідного прдставлення, оскільки при знаходженні міри Лебега тих чи інших множин можна ігногувати числами, що позбавлені нормальних властивостей.

Основною метою даного розділу є знаходження деяких нормальних властивостей дійсних чисел

$$x = \bar{\text{O}}^1(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots) \quad \in [0,1],$$

які сформульовані в термінах членів послідовності $\{g_k(x)\}$ членів різницевого представлення Остроградського першого виду ($\bar{\text{O}}^1$-представлення).

Позначимо через E множину всіх дійсних чисел з обмеженими $\bar{\text{O}}^1$-символами, тобто, $x \in E$ тоді і тільки тоді, коли існує константа K_x така, що $g_k(x) \leq K_x$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. В роботі [**1**] доведено, що міра Лебега множини E всіх дійсних чисел з обмеженими $\bar{\text{O}}^1$-символами дорівнює нулю. Отже, властивість "послідовність $\{g_k(x)\}$ є необмеженою"є нормальною.

Нехай $N_i(x,k)$ - кількість символів "i"в $\bar{\text{O}}^1$-представленні числа x до k-го місця включно.

Означення 1. Якщо границя $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{N_i(x,k)}{k}$ існує, то її називають асимптотичною частотою цифри (символа) "i"в $\bar{\text{O}}^1$-представленні числа x, і позначають через $\nu_i(x,\bar{\text{O}}^1)$, а в тих випадках, коли це не може викликати непрозуміння - просто $\nu_i(x)$.

Теорема 3. *Для майже всіх (в смислі міри Лебега) дійсних чисел x та для довільного $i \in N$ має місце рівність:*

$$\nu_i(x,\bar{\text{O}}^1) = 0.$$

Доведення. Нехай $\Omega = [0,1], \mathcal{F} = \mathcal{B}, P = \lambda$ – міра Лебега на одиничному відрізку. Для довільного $i \in N$ та $k \in N$ означимо множину

$$A_k^i := \{x : x = \bar{\text{O}}^1(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots); g_k(x) = i\} = \bigcup_{c_1=1}^{\infty} \ldots \bigcup_{c_{k-1}=1}^{\infty} \bar{\text{O}}^1[c_1c_2...c_{k-1}i],$$

де $\bar{\text{O}}^1[c_1c_2...c_{k-1}i]$ – циліндричний відрізок рангу k з основою $c_1c_2...c_{k-1}i$, тобто множина всіх дійсних чисел, $\bar{\text{O}}^1$-зображення яких розпочинається з серії символів $c_1c_2...c_{k-1}i$ (див. [**2**]). Тому

$$\lambda(A_k^i) \leq \lambda(A_k^1) = \sum_{c_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{c_{k-1}=1}^{\infty} \lambda(\bar{\text{O}}^1[c_1c_2...c_{k-1}1]) =$$

$$= \sum_{c_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{c_{k-1}=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sigma_2...\sigma_{k-1}(\sigma_{k-1}+1)(\sigma_{k-1}+2)} = \frac{1}{2^k},$$

де $\sigma_j = c_1 + ... + c_j$, (див. [**1, 2**]).

Нехай $A^i = \limsup\limits_{k\to\infty} A_k^i$. Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k^i) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$, то за теоремою Бореля-Кантеллі: $\lambda(A^i) = 0$. Тому для довільного символа $i \in N$ і для λ-майже всіх $x \in [0,1]$ $\bar{\text{O}}^1$-зображення числа x містить лише скінченну кількість символів "i", звідки і слідує висновок теореми. □

Наслідок 2. *В $\bar{\text{O}}^1$-представленні майже всіх (в смислі міри Лебега) дійсних чисел кожен символ "i" зустрічається з нульовою асимптотичною частотою.*

4. Ергодичний підхід до дослідження структури розподілів випадкових величин з незалежними різницями послідовних елементів ряду Остроградського 1-го виду

Розглянемо випадкову величину

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\eta_1(\eta_1+\eta_2)\ldots(\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_k)} = \bar{\text{O}}^1(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots), \tag{4}$$

$\bar{\text{O}}^1$-символи η_k якої є незалежними випадковими величинами, що набувають значень $1, 2, \ldots, m, \ldots$ з ймовірностями $p_{1k}, p_{2k}, \ldots, p_{mk}, \ldots$ відповідно, тобто $P\{\eta_k = m\} = p_{mk}$ і $p_{mk} \geq 0$, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} p_{mk} = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Очевидно, що розподіл випадкової величини η повністю визначається матрицею $P = \|p_{mk}\|$.

В роботах [**1, 2**] знайдено критерій дискретності розподілу випадкової величини η і вказано деякі достатні умови сингулярності канторівського типу. Основною метою даного розділу є встановлення лебегівської структури розподілу η для випадку однакової розподіленості послідовності $\{\eta_k\}$. Основними методами будуть методи ергодичної теорії динамічних систем.

Розглянемо динамічну систему, яка породжена наступним перетворенням T одностороннього зсуву по $\bar{\text{O}}^1$представленню:

$$\forall\ x = \bar{\text{O}}^1(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots) \quad \in [0,1],$$
$$T(x) = T(\bar{\text{O}}^1(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots)) = \bar{\text{O}}^1(g_2(x), g_3(x), \ldots, g_n(x), \ldots).$$

Нагадаємо, що множина A називається інваріантною або нерухомою відносно перетворення T, якщо $A = T^{-1}A$. Міра μ називається ергодичною відносно перетворення T, якщо довільна інваріантна множина $A \in \mathfrak{B}$ є множиною або нульової, або повної міри. Міра μ називається інваріантною відносно перетворення T, якщо для довільної множини $E \in \mathfrak{B}$ виконується рівність $\mu(T^{-1}E) = \mu(E)$.

Лема 1. *Міра μ_η є інваріантною і ергодичною відносно перетворення зсуву T.*

Доведення. 1) Нехай множина A є нерухомою відносно перетворення T, тобто $T^{-1}A = A, A \in \mathfrak{B}$. Тоді $T(T^{-1}A) = T(A)$ і, отже, $A = TA$. Тому $A = T^{-1}A = T^{-1}(TA)$.

Якщо $x = \bar{\text{O}}^1(g_1(x)g_2(x)...g_k(x)...)$ і $x \in A$, то

$$T^{-1}(Tx) = \{x : x = \bar{\text{O}}^1(c_1 g_2(x)...g_k(x)...), c_1 \in N\} \subset A.$$

Тому належність x до інваріантної множини A не залежить від першого $\bar{\text{O}}^1$-символа точки x. Аналогічно доводиться, що належність x до нерухомої множини A не залежить від перших n $\bar{\text{O}}^1$-символів точки x. Тому множина A є залишковою, і за законом нуля і одиниці Колмогорова, $\mu_\eta(A) = 0$ або $\mu_\eta(A) = 1$. Отже, μ_η ергодична відносно перетворення T.

2) Оскільки борелівська σ-алгебра $\mathcal{B}$ породжується системою циліндрів $\bar{\text{O}}^1$-представлення, тобто множин виду $\bar{\text{O}}^1_{[c_1c_2...c_n]}$, то досить показати інваріантність міри μ_η на таких циліндрах ([**7**]). Очевидно, що $\mu_\eta(\bar{\text{O}}^1_{[c_1c_2...c_n]}) = p_{c_1} \cdot p_{c_2} \cdot ... \cdot p_{c_n}$. Оскільки $T^{-1}(\bar{\text{O}}^1_{[c_1c_2...c_n]}) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \bar{\text{O}}^1_{[ic_1c_2...c_n]}$, то

$$\mu_\eta(T^{-1}(\bar{\text{O}}^1_{[c_1c_2...c_n]})) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_\eta(\bar{\text{O}}^1_{[ic_1c_2...c_n]}) =$$
$$= p_{c_1} \cdot p_{c_2} \cdot ... \cdot p_{c_n} \sum_{i=1}^{\infty} p_i = p_{c_1} \cdot p_{c_2} \cdot ... \cdot p_{c_n} = \mu_\eta(\bar{\text{O}}^1_{[c_1c_2...c_n]}),$$

що і треба було довести. □

Лема 2. *Для μ_η - майже всіх $x \in [0,1]$ має місце рівність*

$$\nu_i(x, \bar{\text{O}}^1) = p_i, \quad \forall i \in N. \tag{5}$$

Доведення. Нехай $T^j(x)$ означає j-кратне послідовне застосування вищеозначеного перетворення зсуву T. Оскільки міра μ_η є ергодичною і інваріантною відносно T, то, за ергодичною теоремою Біркгофа, рівність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j(x)) = \int_0^1 \varphi(x) d(\mu_\eta(x))$$

має місце для μ_η-майже всіх $x \in [0,1]$ і для довільної функції $\varphi \in L^1([0,1], d\mu_\eta)$.

Зафіксуємо деяке натуральне число i. Нехай $\bar{O}^1_{[i]}$ - відповідний циліндр першого рангу $\bar{O}^1$-представлення. Виберемо в якості функції φ індикатор множини $\bar{O}^1_{[i]}$, тобто $\varphi(x) = 1$, якщо $x \in \bar{O}^1_{[i]}$, і $\varphi(x) = 0$ в іншому випадку.

Тоді

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(T^j(x)) = \frac{N_i(x,n)}{n}, \qquad \int_0^1 \varphi(x)d(\mu_\eta(x)) = \int_{\bar{O}^1_{[i]}} d(\mu_\eta(x)) = p_i.$$

Отже, для для μ_η-майже всіх $x \in [0,1]$ має місце рівність $\nu_i(x, \bar{O}^1) = p_i$. Нехай $M_{(p_1,p_2,\ldots,p_k,\ldots)} = \{x : x \in [0,1], \nu_i(x,\bar{O}^1) = p_i, \ \forall i \in N\}$. Ця множина також має одиничну μ_η-міру як перетин зчисленної кількості множин $M_i = \{x : x \in [0,1], \nu_i(x,\bar{O}^1) = p_i, \}$ повної μ_η-міри. □

Наступна теорема повністю розв'язує питання про лебегівську структуру розподілу η для випадку однакової розподіленості послідовності $\{\eta_k\}$.

Теорема 4. *Нехай $\{\eta_k\}$ - послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень $1, 2, 3, \ldots$ з імовірностями $p_1, p_2, p_3, \ldots$, $(\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1)$. Тоді випадкова величина η, яка задана рівністю (4), має:*

1) або вироджений дискретний розподіл (якщо $p_i = 1$ для деякого $i \in N$);

2) або сингулярно неперервний розподіл (в усіх інших випадках)

Доведення. 1) Правильність твердження 1) випливає безпосередньо з однакової розподіленості випадкових величин $\{\eta_k\}$ і загального критерію дискретності розподілу в.в. η (див. [**1**]): в.в. η розподілена чисто дискретно тоді і тільки тоді, коли $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_i p_{ik} > 0$.

2) Доведемо, що у випадку неперервності розподіл випадкової величини η не може містити абсолютно неперервної компоненти. Виберемо натуральне число i_0 таке щоб $p_{i_0} > 0$ (щонайменше одне таке число існує) і розглянемо множину $M_{i_0} = \{x : x \in [0,1], \nu_{i_0}(x,\bar{O}^1) = p_{i_0} > 0\}$. За лемою 2 дана множина має повну μ_η-міру.

Розглянемо також множину $L^*_{i_0} = \{x : x \in [0,1], \ \nu_{i_0}(x,\bar{O}^1) = 0\}$. З теореми 3 випливає, що $\lambda(L^*_{i_0}) = 1$. Множини M_{i_0} і $L^*_{i_0}$ не перетинаються. Перша з них є носієм ймовірнісної міри μ_η, а друга є носієм міри Лебега на одиничному відрізку. Отже, міра μ_η сингулярна по відношенню до міри Лебега, що і треба було довести. □

Наслідок 3. *Випадкова величина η з незалежними однаково розподіленими різницями ряду Остроградського першого виду має чистий розподіл, причому вона не може бути абсолютно неперервно розподілена.*

5. Загальні властивості символьної динамічної системи, породженої розкладом Остроградського 1-го виду

Проблема розвитку метричної (ергодичної) теорії того чи іншого способу подання (представлення) дійсних чисел суттєво спрощується, якщо вдається знайти міру, яка була б інваріантною і ергодичною відносно перетворення одностороннього зсуву по відповідному представленню, і одночасно абсолютно неперервною відносно міри Лебега (див. [**15**]). Наприклад, з того факту, що міра Гаусса (тобто абсолютно неперервна ймовірнісна міра зі щільністю $f(x) = \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{1+x}$ на одиничному відрізку) є інваріантною і ергодичною відносно перетворення зсуву по ланцюговому представленню, можна вивести основні ергодичні властивості ланцюгових дробів (див., наприклад, [**17, 15**]).

У попередньому розділі було показано, що *в класі ймовірнісних мір з незалежними однаково розподіленими* $\bar{\mathrm{O}}^1$*-символами* не існує мір, які були б інваріантними і ергодичними відносно перетворення зсуву T по $\bar{\mathrm{O}}^1$-представленню, і одночасно абсолютно неперервними відносно міри Лебега. Основна мета даного розділу - показати, що висновок попереднього розділу залишається правильним навіть у тому випадку, коли не обмежувати пошук класом ймовірнісних мір з незалежними однаково розподіленими $\bar{\mathrm{O}}^1$-символами.

Теорема 5. *Не існує ймовірнісних мір, які були б інваріантними і ергодичними відносно перетворення зсуву T по $\bar{\mathrm{O}}^1$-представленню, і одночасно абсолютно неперервними відносно міри Лебега.*

Доведення. Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що існує абсолютно неперервна ймовірнісна міра ν, яка є інваріантною і ергодичною відносно T. Тоді для ν-майже всіх $x \in [0,1]$ (а, отже, і для множини точок додатної міри Лебега) для довільної функції $\varphi \in L^1([0,1], d\nu)$ має місце співвідношення:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j(x)) = \int_0^1 \varphi(x) d(\nu(x)) = \int_0^1 \varphi(x) f_\nu(x) dx,$$

де $f_\nu(x)$ – щільність міри ν.

Покладемо $\varphi_i(x) = 1$, якщо $x \in \bar{\mathrm{O}}^1_{[i]}$, і $\varphi_i(x) = 0$ в іншому випадку.

Тоді

$$\int_0^1 \varphi_i(x) f_\nu(x) dx = \int_{\bar{\mathrm{O}}^1_{[i]}} f_\nu(x) dx > 0 \ \text{ для хоча б одного } \ i \in N.$$

Нехай ця умова виконується для індекса i_0.

З іншого боку, з теореми 3 випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi_{i_0}(T^j(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_{i_0}(x,n)}{n} = 0$$

для λ-майже всіх $x \in [0,1]$.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_{i_0}(x,n)}{n} = 0$ для λ-майже всіх $x \in [0,1]$, і одночасно $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_{i_0}(x,n)}{n} > 0$ для множини додатної міри Лебега. Отримане протиріччя доводить теорему. $\square$

Література

[1] Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G. The Ostrogradsky series and related probability measures. submitted to Acta Arithmetica; Preprint SFB-611, Bonn University; arXiv:math.PR/0605747.

[2] Альбеверіо С., Барановський О., Працьовитий М., Торбін Г., Дві випадкові величини, пов'язані з рядами Остроградського першого виду. *Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Фізико-математичні науки,* **6** (2005), 181 – 196.

[3] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // *Ergodic Theory Dynam. Systems.* — 2004. — Vol. 24, no. 1. — Pp. 1–16.

[4] *Albeverio S., Torbin G.*, Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q* -digits, *Bull. Sci. Math.* 129 (2005), No.4, 356-367.

[5] *Billingsley P.*, Hausdorff dimension in probability theory II, *Ill. J. Math.*, **5**(1961), 291-198.

[6] *Billingsley P.* Ergodic theory and information, John Willey and Sons, New York, 1965.

[7] *Falconer, K. J.*, *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*, John Wiley, 1990.

[8] *Pierce T. A.* On an algorithm and its use in approximating roots of an algebraic equation // *Amer. Math. Monthly.* — 1929. — Vol. 36. — Pp. 523–525.

[9] *Sierpiński W.* Sur quelques algorithmes pour développer les nombres réels en séries // Oeuvres choisies. — Warszawa: PWN, 1974. — Tm. I. — Pp. 236–254.

[10] *Валеев К. Г., Злебов Е. Д.* О метрической теории алгоритма М. В. Остроградского // *Укр. мат. журн.* — 1975. — Т. 27, № 1. — С. 64–69.

[11] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[12] *Працьовитий М. В., Барановський О. М.* Властивості розподілів випадкових величин з незалежними різницями послідовних елементів ряду Остроградського // *Теорія ймовір. та матем. статист.* — 2004. — № 70. — С. 131–144.

[13] *Працьовитий М. В., Барановський О. М.* Про міру Лебега деяких множин чисел, визначених властивостями їх розкладу в ряд Остроградського // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004. — № 5. — С. 217–227.

[14] *Ремез Е. Я.* О знакопеременных рядах, которые могут быть связаны с двумя алгорифмами М. В. Остроградского для приближения иррациональных чисел // *Успехи мат. наук.* — 1951. — Т. 6, № 5 (45). — С. 33–42.

[15] *Schweiger F.* Ergodic Theory of Fibred Systems and Metric Number Theory. — Oxford: Clarendon Press, 1995.

[16] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — К.: Наук. думка, 1992. — 208с.

[17] *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. — 3-е изд. — Москва: Физматгиз, 1961. — 112 с.