*Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006, № 7.— С. 54–60.

# Про загальні властивості груп з умовою сепараторної нормальності

О. О. Одінцова

(Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка)

Анотація. Розглянуті властивості загальні для калсу груп з сепаруючими підгрупами.

Abstract. We obtain the properties of the groups with separating subgroups which are general for all class such groups.

Вивчення груп з умовою сепараторної нормальності (або груп з сепаруючими підгрупами) є природним узагальненням дедекіндових груп (нагадаємо, що групи в яких всі підгрупи нормальні називаються дедекіндовими). У групах з сепаруючими підгрупами умова нормальності накладається не на всі підгрупи, а на деяку вужчу систему підгруп.

Уведемо спочатку необхідні позначення та означення.

Нехай $\rho$ деяка теоретико-групова властивість підгруп групи $G$. Тоді підгрупу групи $G$, що має властивість $\rho$, називатимемо $\rho$-підгрупою.

Нехай далі $\omega$, $\tau$ – деякі теоретико-групові властивості підгруп групи $G$. Групу $G$ називатимемо $H(\Sigma \setminus \omega S)$ -групою, якщо в ній нормальні всі підгрупи з системи $\Sigma$ підгруп групи $G$, що не містяться в деякій власній $\omega$-підгрупі $S$ групи $G$. При цьому $\omega$-підгрупу $S$ називатимемо $H(\Sigma \setminus \omega)$-сепаруючою підгрупою групи $G$. Перетин $M$ всіх $H(\Sigma \setminus \omega)$-сепаруючих підгруп групи $G$ називатимемо її $H(\Sigma \setminus \omega)$-сепаратором.

Система $\Sigma$ підгруп групи $G$, що розглядається, як правило складається з усіх $\tau$-підгруп групи $G$.

Будь-яка $\omega$-підгрупа $P$ із $H(\Sigma \setminus \omega S)$-групи $G$ така, що всі підгрупи системи $\Sigma$, які не містяться в $P$, є нормальними в $G$, називається $H(\Sigma \setminus \omega)$-сепаруючою підгрупою групи $G$. Зокрема, якщо $\omega$ – це властивість "бути власною підгрупою групи", то $H(\Sigma \setminus \omega S)$-групи називатимемо $H(\Sigma \setminus S)$-групами, або, іншими словами, групами з сепаруючими підгрупами відносно системи підгруп $\Sigma$.

Коли система $\Sigma$ складається з власних підгруп групи $G$, то групу $G$ називатимемо $H(S)$-групою. Якщо ж у групі $G$ нормальними є всі підгрупи з системи $\Sigma$, то таку групу називатимемо $H(\Sigma)$-групою.

Уперше поняття $H(\Sigma\setminus\omega)$-сепаруючої підгрупи та $H(\Sigma\setminus\omega)$-сепаратора було введено в роботі С.М.Чернікова [1] у 1973 році. В цій же роботі встановлено, що $H(\Sigma\setminus\omega)$-сепаратор групи $G$ збігається з підгрупою групи, породженою всіма ненормальними підгрупами із системи $\Sigma$ , також у роботі поставлено загальну задачу опису груп з сепаруючими підгрупами. Тому в подальшому дослідження пішли у напрямку характеризації $H(\Sigma\setminus S)$-груп, де система $\Sigma$ складається з таких підгруп, що мають конкретну теоретико– групову властивість. Так у роботах Баранніка А.Ф.[2], Кузенного М.Ф. та Семка М.М. [3] вивчалися $H(\Sigma\setminus\omega)$-групи, в яких система підгруп $\Sigma$ складалась з власних підгруп групи ( тобто $H(S)$-групи), у роботі Чечиної Т.Г. [4] – $H(\Sigma\setminus S)$-групи з неодиничним сепаратором, де система підгруп складалася з нециклічних підгруп, у роботах автора [5,6]– групи, в яких відсепарованими були нескінченні нециклічні підгрупи.

У даній роботі розглянуто зальні властивості класу $H(\Sigma\setminus\omega S)$-груп (теорема 1), також встановлено, які класи груп з сепаруючими підгрупами відносно різних систем підгруп збігаються між собою та є ізоморфними класу $H(S)$-груп (теорема 2).

Для встановлення властивостей класу $H(\Sigma\setminus\omega S)$-груп уведемо допоміжні позначення: властивість "бути породженою всіма ненормальними $\tau$-підгрупами групи" позначимо через $\gamma$, підгрупу породжену такими $\tau$-підгрупами – через $K$, а через $\theta$ позначимо "властивість бути перетином всіх сепаруючих $H(\Sigma\setminus\omega)$-підгруп групи".

**Теорема** 1. *Для кожної групи $G$ з класу $H(\Sigma\setminus\omega S)$-груп справедливі наступні твердження:*

*1) власна $\omega$-підгрупа групи $G$, яка є перетином непорожньої множини сепаруючих підгруп групи $G$ або породжується цими підгрупами, також є сепаруючою підгрупою;*

*2) сепаратор $M$ групи $G$ є однозначно визначеною $H(\Sigma\setminus\omega)$-сепаруючою підгрупою $H(\Sigma\setminus\theta S)$-групи. Він містить $H(\Sigma\setminus\gamma)$-сепаруючу підгрупу $K$ із $H(\Sigma\setminus\gamma S)$-групи $G$. У разі відсутності $\tau$-підгруп у групі $G$, вважаємо, що $K=1$. Якщо властивість $\omega$ переноситься на підгрупи, то $K=M$. Якщо властивість $\tau$ зберігається при спряженні, то $M\lhd G$ та $K\lhd G$;*

*3) якщо $U$ - підгрупа групи $G$, яка не міститься в хоча б одній сепаруючій підгрупі групи $G$ і $\rho$ – властивість підгрупи бути перетином деякої $\tau$-підгрупи групи $G$ з підгрупою $U$, а $\sigma$ – властивість бути перетином підгрупи $U$ з сепаруючою підгрупою групи $G$, то $U$ – $H(\Omega\setminus\sigma S)$-група (де система підгруп $\Omega$ складається з $\rho$-підгруп), яка при умові $\tau=\rho$ і $\sigma=\omega$ буде і $H(\Sigma\setminus\omega S)$-групою;*

*4) якщо $N$ – нормальна підгрупа групи $G$, яка містить хоча б одну сепаруючу підгрупу групи $G$, то образи в $G/N$ усіх $\tau$-підгруп $X$ групи $G$ є нормальними підгрупами в фактор-групі $G/N$. Якщо $N$ належить деякій сепаруючій підгрупі групи $G$,* *то $G/N$ є $H(\Omega \setminus \varphi S)$ -групою, де система $\Omega$ складається з образів $NX/N$ у фактор-групі $G/N$ усіх $\tau$-підгруп $X$ групи $G$, а $\varphi$ – властивість бути образом $\omega$-підгрупи групи $G$;*

*5) якщо $S_1$ – власна підгрупа групи $G$, що містить деяку сепаруючу підгрупу групи $G$, тоді $G$ – $H(\Sigma \setminus S_1)$-група;*

*6) якщо властивість $\tau$ переноситься на всі надгрупи групи $G$ та $N$ – $\tau$-підгрупа групи $G$, що не міститься в сепараторі $M$ чи, принаймі, $N \not\subset K$, то $N \triangleleft G$ та $G/N$ – дедекіндова група.*

Доведення. Нехай $G$– $H(\Sigma\setminus\omega S)$-група, $S$ – її власна $\omega$-підгрупа, що є перетином або породженням непорожньої множини сепаруючих підгруп $S_i$, де $i \in I$, та $X$ – деяка $\tau$-підгрупа групи $G$ така, що $X \not\subset S$. Тоді зрозуміло, що знайдеться таке $i_0 \in I$, для якого $X$ не міститься в $S_{i_0}$ , а значить, за означенням $X \triangleleft G$ і твердження 1 доведено.

Припустимо, що $\tau$ переноситься на всі надгрупи і $N$ – $\tau$-підгрупа групи $G$, що не міститься в сепараторі. Тоді $N \triangleleft G$ і довільна підгрупа $X$ групи $G$, що містить $N$, є $\tau$-підгрупою в групі $G$, що не міститься в сепараторі. Звідси випливає, що у фактор-групі $G/N$ нормальні всі підгрупи, а значить, $G/N$ – дедекіндова група. Отже, твердження 6 доведено.

Нехай $K$ – підгрупа, яка має властивість $\gamma$ (при відсутності таких $K = 1$). Тоді очевидно, що $G$ є як $H(\Sigma \setminus \gamma S)$-, так і $H(\Sigma \setminus \theta S)$-групою. За умовою всі ненормальні $\tau$-підгрупи групи $G$ належать $M$.

Нехай $\tau$ – властивість підгруп групи $G$, що зберігається при спряженні. Тоді підгрупа $K$ породжується повними класами спряжених в $G$ ненормальних $\tau$-підгруп. Тому $K \triangleleft G$.

Припустимо, що і $\omega$ зберігається при спряженні. Тоді для довільного елемента $g \in G$ та для довільної сепаруючої підгрупи $S$ групи $G$ підгрупа $S^g$ буде $H(\Sigma \setminus \omega)$-сепаруючою підгрупою групи $G$. З цього випливає, що $M$ є перетином повного класу спряжених підгруп групи $G$, звідси $M \triangleleft G$. Твердження 2 доведено.

При умові твердження 3 підгрупа $U$ містить власну $\sigma$-підгрупу $S$, що є перетином деякої сепаруючої підгрупи групи $G$ з підгрупою $U$. Але тоді $\rho$-підгрупа $X$ групи $U$, яка не міститься в $S$, не належить також деякій сепаруючій підгрупі групи $G$ та належить деякій $\tau$-підгрупі $Y$ групи $G$. Але за означенням підгрупа $Y$ нормальна в $G$, а $U \bigcap Y = X \triangleleft U$. Отже, $U$ – $H(\Omega \setminus \sigma S)$-група і твердження 3 доведено.

Нехай $N \triangleleft G$, і $N$ належить деякій сепаруючій підгрупі $S$ групи $G, X/N$ – образ в $G/N$ деякої $\tau$-підгрупи групи $G$. Крім того $X/N \not\subset S/N$. Тоді $X \not\subset S$ і, значить, за означенням $X \triangleleft G$. Звідси, $X/N \triangleleft G/N$. Якщо $N \triangleleft G$ та $N$ містить хоча б одну сепаруючу підгрупу (точніше $H(\Sigma \setminus \omega)$-сепаруючу підгрупу) $S$ і $NX/N$ – образ $\tau$-підгрупи $X$ групи $G$, то при умові $X \leq N$, маємо $NX/N = 1$. При умові $X \not\subset N$ випливає, що $X \not\subset S$ та за означенням $X \triangleleft G$. Отже, $NX/N \triangleleft G/N$. Твердження 4 доведено.

Нехай $S_1$ – власна підгрупа групи $G$, що містить сепаруючу підгрупу групи $G$. Тоді для довільної $\tau$-підгрупи $X$ групи $G$, що не міститься в $S_1$, справедливо, що $X$ не належить деякій сепаруючій підгрупі $S$ групи $G$. За означенням $X \triangleleft G$, а значить, $G$ – $H(\Sigma \setminus S_1)$-група і $S_1$ – сепаруюча підгрупа групи $G$. Твердження 5 доведено.

Теорему доведено. □

У наступній теоремі встановлено, які властивості визначають один і той самий клас груп, еквівалентний класу $H(S)$-груп. Повний опис $H(S)$-груп без будь-яких обмежень міститься у роботі [3].

**Теорема** 2. *Нижче наведені властивості визначають один і той самий клас груп:*

*1) $G$ – $H(S)$-група;*

*2) $G$ – $H(N \setminus S)$-група (в $G$ нормальні всі нільпотентні підгрупи, що не містяться в деякій власній підгрупі $S$ групи $G$);*

*3) $G$ – $H(A \setminus S)$-група (в $G$ нормальні всі абелеві підгрупи, що не містяться в деякій власній підгрупі $S$ групи $G$);*

*4) $G$ – $H(LC \setminus S)$-група (в $G$ нормальні всі локально циклічні підгрупи, що не містяться в деякій власній підгрупі $S$ групи $G$);*

*5) $G$ – $H(MLC \setminus S)$-група (в $G$ нормальні всі максимальні локально циклічні підгрупи, що не містяться в деякій власній підгрупі $S$ групи $G$);*

*6) $G$ – $H(C \setminus S)$-група (в $G$ нормальні всі циклічні підгрупи, що не містяться в деякій власній підгрупі $S$ групи $G$);*

*7) $G$ – група одного з типів:*

*а) неодинична дедекіндова група;*

*б) $G = P \times D$, де $D$ – холлівська періодична дедекіндова підгрупа групи $G$, $P$ – силовська $p$-підгрупа групи $G$, $P = C \cdot B$, де $C$ – нормальна в групі $G$ локально циклічна підгрупа, що містить таку підгрупу $\langle a \rangle$, для якої $|a| = p^\alpha, P' = \langle a^{p^k} \rangle = \langle a \rangle \cap B \leq Z(G), \alpha > k \geq \alpha - k > 0$, $S = (\langle a^{p^m} \rangle \cdot B) \times D, k \geq m > 0$, $B$ – група, що породжується своїми підгрупами $B_i = P' \times \langle b_i \rangle, |b_i| = p^{\beta_i}, i \in I, |I| > 0, P' \triangleleft B$, фактор-група $B/P'$ розкладається в прямий добуток підгруп $B_i/P', k - m + 1 \geq \beta_i > 0$, якщо $p^{k-m+1} = 2$, то $B' = 1, \alpha > 2$.*

Доведення. Нехай $G$ – досліджувана група. Тоді за лемою 1.4.1 з [3] випливає еквівалентність властивостей 1 та 6. Очевидно, що з властивості 1 випливає властивість 2, а з 2 – 3, з 3 – 4, з 4 випливає властивість 5. У теоремі 1.4.2 з [3] встановлена еквівалентність властивостей 7 та 1. Для доведення еквівалентності всіх властивостей між собою лишається показати, що з властивості 5 випливає властивість 6.

Нехай у групі $G$ нормальною є будь-яка максимальна локально циклічна підгрупа, що не міститься в деякій власній підгрупі $S$ групи $G$. Покажемо тоді, що в групі $G$ нормальною є будь–яка циклічна підгрупа, що не міститься в $S$. За теоремою 1 сепаратор $M = K$, де $K$ – підгрупа групи $G$, породжена ненормальними максимальними локально циклічними підгрупами, і можна вважати, що сепаруюча підгрупа $S = K$.

Нехай $g \notin K$, покажемо, що $\langle g\rangle \triangleleft G$. Зрозуміло, що в групі $G$ існує така максимальна локально циклічна підгрупа $Y$, що $Y$ містить $\langle g\rangle$, і за умовою $Y \triangleleft G$. Якщо $Y$ – періодична підгрупа, то всі підгрупи з $Y$ – нормальні в групі $G$, і значить, $\langle g\rangle \triangleleft G$.

Припустимо, що $Y$ – неперіодична підгрупа. Тоді $Y$ є підгрупою адитивної групи раціональних чисел. Покажемо, що $\langle g\rangle^f = f^{-1}\langle g\rangle f = \langle g\rangle$ для довільного елемента $f \in G$. Нехай $f$ індукує на $Y$ скінченну групу автоморфізмів. Тоді $\langle g\rangle^{\langle f\rangle}$ є нормальним замиканням $\langle g\rangle$ відносно $\langle f\rangle$ та є скінченно породженою підгрупою адитивної групи раціональних чисел. Звідси, $\langle g\rangle^f = \langle u\rangle$, а $f^{-1}\langle u\rangle f = \langle u\rangle$ і, значить, $f^{-1}\langle g\rangle f = \langle g\rangle$.

Припустимо тепер, що $f$ індукує на $Y$ нескінченну групу автоморфізмів. Тоді $Y \cap \langle f\rangle = 1$ і $f$ має нескінченний порядок.

Нехай $f \notin K$. Тоді в групі $G$ існує максимальна локально циклічна підгрупа $V$, яка містить $f$ і за умовою $V \triangleleft G$. Зрозуміло, що $Y \cap V = 1, [g, f] = 1$, звідси $\langle g\rangle^{\langle f\rangle} = \langle g\rangle$. Нехай далі $f \in K$ і $V$ – максимальна локально циклічна підгрупа групи $G$, що містить $f$. Тепер зрозуміло, що $V \cap Y = 1$. Якщо $V \not\subset K$, то як і раніше, $V \triangleleft G$, $\langle g\rangle^{\langle f\rangle} = \langle g\rangle$. Отже, можна вважати, що $V < K$.

У групі $G$ існує підгрупа $W = Y\lambda V$. Покладемо $a = gf$. Оскільки $f \in K$, а $g \notin K$, то $a \notin K$. Але тоді, як і при умові $f \notin K$, одержимо, що $\langle g\rangle^{\langle a\rangle} = \langle g\rangle$. І знов, $\langle g\rangle^{\langle f\rangle} = \langle g\rangle$. Тобто, завжди $\langle g\rangle^{\langle f\rangle} = \langle g\rangle$. Що й потрібно було довести.

Отже, із властивості 5 випливає властивість 6.

Теорему доведено. □

Використовуючи результати теорем 1 та 2, можна сформулювати наступний наслідок.

**Наслідок** 1. *Нехай $\tau$ – одна з властивостей бути: довільною, циклічною, абелевою, нільпотентною, нескінченною, нециклічною, неабелевою, ненільпотентною, нескінченною нециклічною підгрупою групи $G$. Тоді справедливі наступні твердження:*

*1) неодинична $H(\Sigma)$ - група $G$ є $H(\Sigma\backslash S)$-групою з одиничним сепаратором $M = K$;*

*2) якщо $U$ – підгрупа $H(\Sigma\backslash S)$-групи, що не міститься в хоча б одній $H(\Sigma)$-сепаруючій підгрупі групи $G$ або, зокрема, $U \not\subset K$, то $U$ – $H(\Sigma\backslash S)$-група;*

*3) нехай $N$ – нормальна $\tau$-підгрупа $H(\Sigma\backslash S)$-групи $G$. Тоді якщо $N < K$, то $G/N$ – $H(S)$-група, а при $K < N$ фактор-група $G/N$ є дедекіндовою групою;*

*4) якщо $X$ – $\tau$-підгрупа $H(\Sigma\backslash S)$-групи $G$, що не міститься в $K$, то $X \triangleleft G$, та $G/X$ – дедекіндова група;*

*5) будь-яка власна підгрупа $H(\Sigma\backslash S)$ - групи $G$, що містить $K$, є сепаруючою підгрупою групи $G$.*

Доведення. Нехай $G$ – $H(\Sigma\backslash S)$-група, підгрупа $K$ породжена всіма ненормальними $\tau$-підгрупами групи, і $M$ – сепаратор $G$. Очевидно, що $M$ містить всі ненормальні $\tau$-підгрупи групи $G$, а значить, $M$ містить підгрупу $K$. Нехай $X$ – $\tau$-підгрупа групи $G$, $X \not\subset K$. Тоді зрозуміло, що $X \triangleleft G$. З цього випливає, що $X \not\subset M$ і $M \leq K$. Отже, $M = K$.

Припустимо, що $G$ – $H(\Sigma)$-група, тобто група, в якій кожна підгрупа з системи $\Sigma$ є нормальною в групі. Отже, група $G$ не містить ненормальних $\tau$-підгруп, значить, $K = 1$, а тому і $M = 1$. Твердження 1 доведено.

Нехай $U$ – власна підгрупа $H(\Sigma\backslash S)$-групи $G$, яка не міститься в хоча б одній сепаруючій підгрупі, наприклад, $S_1$. Тоді можливі випадки:

1. $U \cap S_1 = 1$.

2. $U \cap S_1 \neq 1$.

У випадку 1 всі $\tau$-підгрупи групи $U$ будуть нормальними і в групі $G$, тобто $U$ буде, навіть, $H(\Sigma)$-групою з сепаратором $M = K = 1$. У цьому випадку як сепаруючу підгрупу можна розглядати довільну $\tau$-підгрупу $S$ групи $U$, тобто $U$ – $H(\Sigma\backslash S)$-група. Випадок 1 розглянуто.

У випадку 2 $\tau$-підгрупа з групи $U$, яка не міститься в $U \cap S_1$, буде нормальною в $G$, а відповідно і в підгрупі $U$. Тобто, за означенням $U$ – $H(\Sigma\backslash S)$-група. Усі випадки розглянуто. Твердження 2 доведено.

Нехай $N$ – нормальна $\tau$-підгрупа групи $G$. Необхідно встановити, що коли $N < K$, то $G/N$ є $H(S)$-групою, а при $K < N$, фактор-група $G/N$ є дедекіндовою групою.

Якщо $G/N$ – абелева група, то це очевидно.

Припустимо, що $G/N$ – неабелева група. Нехай $N < K$ і $\tau$ – це властивість бути довільною, нециклічною, неабелевою, ненільпотентною, нескінченною, нескінченною нециклічною підгрупою групи $G$. Тоді для довільного елемента $x \in G \setminus K$ підгрупа $\langle x \rangle \cdot N$ буде також $\tau$-підгрупою, причому $\langle x \rangle \cdot N \not\subset K$, а значить, за означенням $\langle x \rangle \cdot N \triangleleft G$. Отже, $\langle x \rangle \cdot N/N \triangleleft G/N$, тобто у фактор-групі $G/N$ нормальними є всі циклічні підгрупи, які не містяться в $K/N$. У цьому випадку за теоремою 2 $G/N$ – $H(S)$-група.

Нехай далі $\tau$ – це властивість бути довільною, циклічною, абелевою чи нільпотентною підгрупою групи $G$. Тоді за теоремою 2 фактор-група $G/N$ буде $H(S)$-групою, а $K/N$ – власна підгрупа цієї фактор-групи $G/N$. Якщо $X/N$ – підгрупа групи $G/N$, що не міститься в сепаруючій підгрупі $K/N$, то $X \triangleleft G$, а $X/N \triangleleft G/N$. Отже, $G/N$ – $H(S)$-група з сепаруючою підгрупою $K/N$.

Навпаки, нехай $K \leq N$. Якщо елемент $x \in K$, то $x \in N$ та $\langle x \rangle \cdot N/N = N/N \triangleleft G/N$. Нехай $x \notin N$, тоді коли властивість $\tau$ – це властивість бути довільною нециклічною, неабелевою, ненільпотентною, нескінченною чи нескінченною нециклічною підгрупою групи $G$, то підгрупа $N\langle x \rangle = X$ буде $\tau$-підгрупою групи $G$, що не міститься в $K$. Звідси, $X \triangleleft G$, а тому $X/X \triangleleft G/X$ – дедекіндова група. Якщо $\tau$ – властивість бути: циклічною, абелевою чи нільпотентною підгрупою, то знов за теоремою 2 $G$

$-H(S)$-група. Але тоді для довільного елемента $x \in G\mathbb{N}$ маємо, що $\langle x\rangle \lhd G$, а значить, групи $G/K$ і $G/N$ – дедекіндові групи. Твердження 3 доведено.

Нехай $X$ – $\tau$-підгрупа групи $G$, що не міститься в $K$. Оскільки раніше було встановлено, що $M = K$, то $X \not\subset M$. З означення сепаратора випливає, що $X \lhd G$. Якщо $X \cap K \neq 1$, то у цьому разі або $K < X$ і за попереднім пунктом $G/X$ – дедекіндова група, або $K \not\subset X$. Тоді для довільного елемента $x \in K$ маємо, що $\langle x\rangle X \not\subset K$, причому за доведеним $\langle x\rangle X/X \lhd G/X$. Отже, $G/X$ – дедекіндова група. Аналогічно, коли $X \not\subset K$, одержимо, що $\langle x\rangle X/X \lhd G/X$. Отже, $G/X$ – дедекіндова група. Твердження 4 доведено.

Нехай $X$ – довільна власна підгрупа $H(\Sigma \setminus S)$-групи $G$, що містить $K$. Оскільки $M = K$, то $X$ містить $M$-сепаратор групи $G$. За означенням $X$ – сепаруюча підгрупа з групи $G$. Твердження 5 доведено.

Наслідок доведено. $\square$

## Література


[1] *Черников С.Н.* Группы, имеющие сепарирующие подгруппы// Группы с заданными свойствами подгрупп: Сб.научн тр.- К.: Ин-т математики АН УССР- 1973.- С.6-14.

[2] *Баранник А.Ф.* Обобщение метагамильтоновых групп// Исследование групп по заданным свойствам подгрупп: Сб.научн.тр.- К.: Ин-т математики АН УССР.- 1974.- С.167-198.

[3] *Кузенний М.Ф., Семко М.М.* Метагамільтонові групи та їх узагальнення.- К.: Ін-т математики НАН України, 1996.-232 с.

[4] *Чечина Т.Г.* $p$-группы, обладающие сепарирующими подгруппами относительно системы инвариантных подгрупп.- К.,1986.- 35с.- Препринт (АН УССР, Ин-т математики; 86.23.).

[5] *Одінцова О.О.* Про один клас сепараторно дедекінових груп// Укр.мат.ж.- 2001.-53, №2.-С.269-273.

[6] *Одінцова О.О.* Про будову неперіодичних груп з сепаруючими підгрупами відносно системи нескінченних нециклічних підгруп// Вісник Київського національного ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. - К.: КНУ імені Тараса Шевченка.- 2004.- №3.- С.40-48.