Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14.— С. 240–252.

УДК 519.21

Про DP-перетворення, породжені випадковими величинами з незалежними C-символами

М. В. Лебідь, Г. М. Торбін

Університет м. Білефельд, Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Анотація. Досліджуються неперервні бієктивні відображення $F : R^1 \to R^1$, що зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича (DP-перетворення) всіх підмножин з R^1. Основну увагу приділено DP-перетворенням, що генеруються функціями розподілу випадкових величин з незалежними символами розкладів Кантора. При вивченні DP-властивостей відповідних функцій розподілів застосовуються методи багаторівневого фрактального аналізу сингулярно неперервних ймовірнісних мір. Для випадку обмеженості послідовності n_k, що визначає розклад Кантора, знайдено необхідні і достатні умови для збереження розмірності Хаусдорфа–Безиковича відповідних перетворень.

On DP-transformations generated by random variables with independent C-symbols

M. Lebid, G. Torbin

Bielefeld University, National Pedagogical Dragomanov University

Abstract. We study continuous bijective transformations $F : R^1 \to R^1$ preserving the Hausdorff–Besicovitch dimension (DP-transformations) of all subsets from R^1. Main attention is paid to DP-transformations generating by distribution functions of random variables with independent symbols of Cantor series expansion. To study properties of these transformations we used methods of multilevel fractal analysis of singularly continuous probability measures. For the case where the sequence $\{n_k\}$ determining the Cantor series expansion is bounded, we found necessary and sufficient conditions for the distribution functions of random variables with independent symbols of Cantor series expansion to be DP-transformations.

E-mail: mykola.lebid@gmail.com

Вступ

З групової точки зору фрактальна геометрія займається вивченням інваріантів групи перетворень, що зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича (DP-перетворень) [**1**]. Нагадаємо ([**1**]), що перетворення F простору R^1 (*бієктивне* відображення R^1 в себе) називається DP-перетворенням на множині $M \subset R^1$, якщо для будь-якої підмножини $E \subset M$ розмірності Хаусдорфа–Безиковича $\dim_H(E)$ множини E та її образу $F(E)$ співпадають: $\dim_H(E) = \dim_H(F(E))$. Як показано в [**1**], дослідження групи неперервних DP-перетворень еквівалентне дослідженню неперервних функцій розподілу випадкових величин на $[0, 1]$. В роботах [**1, 3**] показано, що клас DP-перетворень значно ширший класу бі-ліпшицевих перетворень і гладкість F є лише грубою достатньою умовою для збереження розмірності. В [**1**] наведено приклад DP-функції, яка є абсолютно неперервною і при цьому множини $N_0(F) = \{x : F' = 0\}$ і $N_\infty(F) = \{x : \varliminf\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{F(x+\varepsilon)-F(x)}{\varepsilon} = +\infty\}$ є одночасно всюди щільними множинами повної розмірності Хаусдорфа–Безиковича: $\dim_H N_0(F) = \dim_H N_\infty(F) = 1$.

Дослідження DP-перетворень ускладнюється відсутністю зв'язку між DP-властивостями строго зростаючої функції розподілу та збереженням нею нетривіальності міри Хаусдорфа (існують, зокрема, сингулярно неперервні DP-функції і абсолютно неперервні строго зростаючі функції, які не зберігають розмірність). У зв'язку з цим виникає питання розробки методів дослідження DP-перетворень, знаходження інваріантів групи DP-перетворень та детальне дослідження окремих класів таких перетворень.

Одним з напрямів таких досліджень є вивчення класів перетворень, що породжуються розподілами випадкових величин виду $\xi = \Delta^f_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k}\ldots$, де $\Delta^f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}\ldots$ — деяке узагальнене f-зображення дійсних чисел з одиничного відрізка, а $\{\xi_k\}_{k>0}$ — послідовність випадкових величин, які набувають значень з відповідного алфавіту і є або незалежними, або мають залежність певного виду (утворюють, наприклад, ланцюг Маркова). Дослідження у цьому напрямку були розпочаті в роботах S. Albeverio, М. Працьовитого, Г. Торбіна [**1, 3**], в яких знайдено достатні умови та (окремо) необхідні умови збереження розмірності Хаусдорфа–Безиковича функціями розподілу випадкових величин з незалежними s-адичними символами та з незалежними символами Q-зображення. Останні результати (критерій належності до DP-класу) були отримані Г. Торбіним для s-адичного розкладу ([**16**]) і Q-зображення в [**17**].

У той же час на сьогодні відсутні результати щодо DP-перетворень, які індуковані вказаним вище способом за допомогою розкладів дійсних чисел зі змінним алфавітом. Цією статтею ми розпочинаємо серію робіт, присвячених вивченню умов належності до DP-класу та властивостей перетворень, що породжуються розподілами випадкових величин з незалежними та марківськими $\tilde{Q}$-символами (див. [**4**] для детального ознайомлення з $\tilde{Q}$-зображенням дійсних чисел). У даній статті досліджуються, зокрема, DP-властивості функцій розподілу випадкових величин з незалежними $\tilde{Q}$-символами для модельного несамоподібного випадку, коли всі елементи одного і того ж стовпчика матриці $\tilde{Q}$ рівні між собою, тобто коли існує послідовність натуральних чисел $\{n_k\}_{k>0}$, $n_k > 1$ така, що $q_{ik} = \frac{1}{n_k}$, $\forall i \in \{0,\ 1,\ \ldots\ n_k - 1\}$. У цьому випадку $\tilde{Q}$-зображення дійсних чисел співпадає з класичним розкладом Кантора (див. [**7, 8**]). Деякі нові феномени, пов'язані з цими розкладами, були відкриті в [**1**], де, зокрема, знайдено необхідні і достатні умови того, щоб система $\mathcal{A}$ циліндричних відрізків цього розкладу була довірчою. Досліджуваний нами в статті клас перетворень співпадає з класом функцій розподілу випадкових величин $\xi = \Delta^{\tilde{Q}}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k}$, де незалежні випадкові величини ξ_k набувають значень $0,\ 1,\ \ldots,\ n_k - 1$ з ймовірностями $p_{0k},\ p_{1k},\ \ldots,\ p_{n_k-1,k}$ відповідно.

Основним розділом роботи є третій, у якому на основі результатів щодо тонких фрактальних властивостей ймовірнісної міри μ_ξ, які отримані у розділі 2, доводиться необхідна і достатня умова того, щоб $F_\xi(x)$ належала до DP-класу.

1. Розмірність Хаусдорфа розподілу випадкових величин з незалежними C-символами

Нехай $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ — послідовність незалежних випадкових величин, що приймають значення $0, 1, \ldots, n_k - 1$ з ймовірностями $p_{0,k}, p_{1,k}, \ldots, p_{n_k-1,k}$ (та $\sum_{i=0}^{n_k-1} p_{i,k}{=}1$) відповідно, де $\{n_k\}_{k\geq 1}$ — послідовність натуральних чисел таких, що $n_k \geq 2$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Розглянемо випадкову величину ξ:

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k} \tag{1}$$

з незалежними символами розкладу Кантора (з незалежними C-символами). Позначимо через μ_ξ ймовірнісну міру, що відповідає в. в. ξ.

Нехай $\mathcal{A}_k$ – сім'я інтервалів (циліндрів) k-го рангу, тобто,

$$\mathcal{A}_k := \{E : E = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k},\ \alpha_i \in \{0, \ldots, n_i - 1\},\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k\},$$

де

$$\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} := \left\{x : x \in \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_i}, \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_i} + \frac{1}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_i}\right)\right\}.$$

Нехай $\mathcal{A}$ — сім'я всеможливих рангових інтервалів, тобто,

$$\mathcal{A} := \{E : E = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k},\ n \in \mathbb{N},\ \alpha_i \in \{0, \ldots, n_i - 1\},\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}.$$

Нагадаємо, що розмірністю Хаусдорфа розподілу в. в. τ називається число:

$$\dim_H(\tau) = \inf\left\{\dim_H(E),\ E \in \mathcal{B}_\tau\right\},$$

де $\mathcal{B}_\tau$ — клас всеможливих борелівських носіїв (не обов'язково замкнених) в. в. τ, тобто

$$\mathcal{B}_\tau = \left\{E : E \in \mathcal{B},\ P_\tau(E) = 1\right\}.$$

Нехай υ — неперервна ймовірнісна міра на борелівських підмножинах $[0,1]$, і нехай Φ — сім'я всіх сегментів одиничного відрізка така, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує не більш як зчисленне $(\upsilon - \varepsilon)$-покриття $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ множини $[0,1]$, тобто $E_j \in \Phi$ та $\upsilon(E_j) \le \varepsilon$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Тоді $(\upsilon - \alpha)$ — міра Хаусдорфа довільної множини $E \subset [0,1]$ відносно сім'ї Φ означається наступним чином:

$$H^\alpha(E, \upsilon, \Phi) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\inf_{\upsilon(E_j)\le\varepsilon}\left\{\sum_j \upsilon^\alpha(E_j)\right\}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0} H^\alpha_\varepsilon(E, \upsilon, \Phi),$$

де $E_j \in \Phi$, $\bigcup_j E_j \supset E$.

Число

$$\dim_\upsilon(E, \Phi) = \inf\{\alpha : H^\alpha(E, \upsilon, \Phi) = 0\}$$

називається *розмірністю Хаусдорфа–Біллінгслі* множини E відносно міри υ та сім'ї Φ.

Покладемо $0\ln 0 := 0$, $h_j := -\sum\limits_{i=0}^{n_j-1} p_{ij}\ln p_{ij}$, $\forall j \in \mathbb{N}$ та $H_k := \sum\limits_{j=1}^{k} h_j$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Якщо* $\sup\limits_k n_k < \infty$*, то розмірність Хаусдорфа розподілу випадкової величини* ξ *дорівнює*

$$\dim_H \mu_\xi \ = \ \varliminf_{k\to\infty} \frac{h_1 + h_2 + ... + h_k}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k)}. \tag{2}$$

Доведення. При обчисленні розмірності Хаусдорфа розподілу випадкової величини ξ достатньо обмежитись розглядом носіїв, які є підмножинами спектра ξ.

Нехай $\Delta_k(x) = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_k(x)}$ — циліндр k-го рангу, який містить точку x спектра S_ξ (найменшого замкненого носія міри μ_ξ) та нехай λ позначає міру Лебега на $[0,1]$. Тоді

$$\mu_\xi(\Delta_k(x)) = p_{\alpha_1(x)1} \cdot p_{\alpha_2(x)2} \cdot ... \cdot p_{\alpha_k(x)k},$$
$$\lambda(\Delta_k(x)) = \frac{1}{n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k}.$$

Оцінимо наступний вираз

$$\frac{\ln \mu_\xi(\Delta_k(x))}{\ln \lambda(\Delta_k(x))} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} \ln p_{\alpha_j(x)j}}{-\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k)}.$$

Якщо точка $x = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_k(x)...}$ вибереться зі спектра випадково, так, що $P(\alpha_j(x) = i) = p_{ij}$ (тобто, розподіл випадкової величини x відповідає мірі μ_ξ), то $\{\eta_j\} = \{\eta_j(x)\} = \{\ln p_{\alpha_j(x)j}\}$ — послідовність незалежних випадкових величин з наступними розподілами:

$$P\{\eta_j = \ln p_{ij}\} = p_{ij},\ i \in \{0, ..., n_j - 1\}.$$

Ясно, що

$$|M\eta_j| = |\sum_{i=0}^{n_j-1} p_{ij} \ln p_{ij}| \leq c_1 < \infty,$$

$$M\eta_j^2 = \sum_{i=0}^{n_j-1} p_{ij} \ln^2 p_{ij} \leq c_2 < \infty,$$

причому константи c_1 та c_2 не залежать від j, бо функції $x \ln x$ та $x \ln^2 x$ обмежені на відрізку (0,1) і $\sup\limits_k n_k < \infty$.

Отже, за теоремою Колмогорова (посилений закон великих чисел) для μ_ξ-майже всіх точок $x \in [0, 1]$ має місце рівність

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(\eta_1(x) + \eta_2(x) + ... + \eta_k(x)) - M\,(\eta_1(x) + \eta_2(x) + ... + \eta_k(x))}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k)} = 0. \qquad (3)$$

Зауважимо, що

$$M(\eta_1 + \eta_2 + ... + \eta_k) = -H_k,$$

та

$$\lambda(\Delta_k(x)) = \frac{1}{n_1 n_2 ... n_k}.$$

Нехай $D := \varliminf\limits_{k\to\infty} \frac{H_k}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k)}$. Оцінимо множину

$$T = \left\{x : \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+...+\eta_k(x)}{\ln\lambda(\Delta_k(x))} - \frac{H_k}{-\ln\lambda(\Delta_k(x))}\right) = 0\right\} = \\ = \left\{x : \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\eta_1+\eta_2+...+\eta_k - M(\eta_1+\eta_2+...+\eta_k)}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k)}\right) = 0\right\}.$$

З $\mu_\xi(T) = 1$ випливає, що $\dim_{\mu_\xi}(T, \mathcal{A}) = 1$. Нехай

$$T_1 = \left\{x : \varliminf_{k\to\infty} \left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+...+\eta_k(x)}{\ln\lambda(\Delta_k(x))} - \frac{H_k}{-\ln\lambda(\Delta_k(x))}\right) = 0\right\};$$

$$T_2 = \left\{x : \varliminf_{k\to\infty} \frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+...+\eta_k(x)}{\ln\lambda(\Delta_k(x))} \leq \varliminf_{k\to\infty} \frac{H_k}{-\ln\lambda(\Delta_k(x))}\right\} = \\ = \left\{x : \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln\mu_\xi(\Delta_k(x))}{\ln\lambda(\Delta_k(x))} \leq D\right\};$$

$$T_3 = \left\{x : \varliminf_{k\to\infty} \frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+...+\eta_k(x)}{\ln\lambda(\Delta_k(x))} \geq \varliminf_{k\to\infty} \frac{H_k}{-\ln\lambda(\Delta_k(x))}\right\} = \\ = \left\{x : \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln\mu_\xi(\Delta_k(x))}{\ln\lambda(\Delta_k(x))} \geq D\right\}.$$

Очевидно, що $T \subset T_1$. Можна довести (аналогічно до [**3**]), що $T_1 \subset T_3$ і $T \subset T_2$.

За теоремою 2.1 з [**6**], $\dim_\lambda(T_2, \mathcal{A}) \leq D$. Враховуючи, що $T \subset T_2$, маємо $\dim_\lambda(T, \mathcal{A}) \leq D$.

Оскільки

$$T \subset T_3 = \left\{ x : \varliminf_{n \to \infty} \frac{\ln \mu_\xi(\Delta_n(x))}{\ln \lambda(\Delta_n(x))} \geq D \right\},$$

то за теоремою 2.2 з [**6**]

$$\dim_\lambda(T, \mathcal{A}) \geq D \cdot \dim_{\mu_\xi}(T, \mathcal{A}) = D \cdot 1 = D.$$

Отже, $\dim_\lambda(T, \mathcal{A}) = D$. Оскільки λ — міра Лебега на $[0, 1]$, то $\dim_H(T, \mathcal{A}) = \dim_\lambda(T, \mathcal{A}) = D$.

З того, що $\sup n_k < \infty$ випливає рівність $\dim_H(E, \mathcal{A}) = \dim_H(E)$, $\forall E \in [0, 1]$. Тому $\dim_H(T) = D$. Доведемо, що побудована вище множина T є мінімальним розмірнісним носієм міри μ_ξ. Нехай C — деякий носій міри μ_ξ, тобто $\mu_\xi(C) = 1$. Очевидно, що $C_1 = C \bigcap T$ — теж носій міри μ_ξ і $C_1 \subset C$. Тому $\dim_H(C_1) \leq \dim_H(C)$ і $C_1 \subset T$. Доведемо, що $\dim_H(C_1) = \dim_H(T)$. Оскільки $C_1 \subset T$, то $\dim_H(C_1) \leq \dim_H(T) = D$. З іншого боку,

$$C_1 \subset T \subset T_3 = \left\{ x : \varliminf_{n \to \infty} \frac{\ln \mu_\xi(\Delta_n(x))}{\ln \lambda(\Delta_n(x))} \geq D \right\}.$$

Тому з теореми 2.1 та 2.2 роботи [**6**] та $\dim_H(C_1, \mathcal{A}) = \dim_H(C_1)$ випливає, що

$$\dim_H(C_1) = \dim_\lambda(C_1, \mathcal{A}) \geq D \cdot \dim_{\mu_\xi}(T, \mathcal{A}) \geq D \cdot \dim_\mu(C_1, \mathcal{A}) = D \cdot 1 = D.$$

□

З попередньої теореми випливає

Наслідок 1. *Нехай* $m_k = \#\{i : p_{ik} > 0\}$. *Якщо* $\sup n_k < \infty$, *то*

$$\dim_H S_\xi = \varliminf_{k \to \infty} \frac{\ln(m_1 \cdot \ldots \cdot m_k)}{\ln(n_1 \cdot \ldots \cdot n_k)}.$$

Доведення. Нижня оцінка розмірності Хаусдорфа–Безиковича спектра S_ξ випливає з попередньої теореми 1. Справді, побудуємо додаткову міру μ_{ξ^*}, спектр якої співпадає зі спектром міри μ_ξ.

Для цього розглянемо випадкову величину

$$\xi^* = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k^*}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k},$$

де $\{\xi_k^*\}_{k \geq 1}$ — незалежні в. в., які набувають значень $0, 1, \ldots, n_k - 1$ з ймовірностями

$$p_{ik}^* = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \ p_{ik} = 0; \\ \frac{1}{m_k}, \text{ якщо } p_{ik} > 0. \end{cases}.$$

Використавши теорему 1 та рівності $h_k^* = -\sum\limits_{i=0}^{n_k-1} p_{ik}^* \ln p_{ik}^* = \ln m_k$, знаходимо розмірність Хаусдорфа міри μ_{ξ^*}: $\dim_H \mu_{\xi^*} = \varliminf\limits_{k\to\infty} \frac{\ln(m_1\cdot\ldots\cdot m_k)}{\ln(n_1\cdot\ldots\cdot n_k)}$. Тому

$$\dim_H S_\xi \geq \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln(m_1\cdot\ldots\cdot m_k)}{\ln(n_1\cdot\ldots\cdot n_k)}.$$

З іншого боку, S_ξ можна покрити за допомогою $m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_k$ відрізків довжини $\frac{1}{n_1\cdot\ldots\cdot n_k}$. α-об'єм цього покриття дорівнює $m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_k\frac{1}{(n_1\cdot\ldots\cdot n_k)^\alpha}$. Тому $H_\varepsilon^\alpha(S_\xi) \leq m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_k\frac{1}{(n_1\cdot\ldots\cdot n_k)^\alpha}$, $\forall \varepsilon > \frac{1}{(n_1\cdot\ldots\cdot n_k)}$. Якщо $\alpha > B := \varliminf\limits_{k\to\infty} \frac{\ln(m_1\cdot\ldots\cdot m_k)}{\ln(n_1\cdot\ldots\cdot n_k)}$, то існує така підпослідовність $\{k_s\}_{s\geq 1}$, що:

$$\frac{\ln(m_1\cdot\ldots\cdot m_{k_s})}{\ln(n_1\cdot\ldots\cdot n_{k_s})} < \frac{B+\alpha}{2},\ \forall s\in\mathbb{N}.$$

Таким чином

$$\frac{m_1\cdot\ldots\cdot m_{k_s}}{(n_1\cdot\ldots\cdot n_{k_s})^{\frac{B+\alpha}{2}}} < 1,\ \forall s\in\mathbb{N}.$$

Тому $\lim\limits_{s\to\infty} \frac{m_1\cdot m_2\cdot\ldots m_{k_s}}{(n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_{k_s})^\alpha} = 0$. Отже, $H_\varepsilon^\alpha(S_\xi) = 0,\ \forall\varepsilon > 0, \forall\alpha > B$, звідки випливає, що $H^\alpha(S_\xi) = 0, \forall\alpha > B$. Отже, $\dim_H S_\xi \leq B$.

□

2. DP-перетворення

Припустимо, що матриця ймовірностей $P = \|p_{ik}\|$ не містить нулів (в іншому випадку відповідна функція розподілу не є перетворенням $[0,1]$, тобто бієктивним відображенням одиничного відрізка). Нехай $n^* = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} n_k < \infty$. Позначимо $p_j := \min\limits_i p_{ij},\ \forall j\in\mathbb{N}$ та

$$T^{(1)} = \left\{k:\ k\in\mathbb{N},\ p_k < \frac{1}{2n^*}\right\},\quad T_k^{(1)} = T^{(1)}\cap\{1,2,...,k\}.$$

Покладемо

$$A := \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{j\in T_k^{(1)}} \ln\frac{1}{p_j}}{k}.$$

Теорема 1. *Нехай* $\sup n_k < \infty$. *Функція розподілу* F_ξ *зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича будь-якої підмножини одиничного відрізка тоді і тільки тоді, коли*

$$\begin{cases} \dim_H \mu_\xi = 1; \\ A = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Доведення. **Достатність.** Нехай $\dim_H \mu_\xi = 1$ і $A = 0$. З властивостей ентропії випливає, що
$$h_k \leq \ln n_k. \tag{5}$$

Тому умова $\dim_H \mu = 1$ рівносильна існуванню наступної границі:
$$\lim_{k\to\infty} \frac{h_1 + h_2 + ... + h_k}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k)} = 1. \tag{6}$$

Нехай ε — довільне додатне число таке, що $\varepsilon < \frac{1}{2n^*}$. Розглянемо наступні множини:
$$T^+_{\varepsilon,k} = \left\{ j : \quad j \in \mathbb{N},\ j \leq k, \quad \left| p_{ij} - \frac{1}{n_j} \right| \leq \varepsilon, \quad \forall i \in \{0, ..., n_k - 1\} \right\},$$
$$T^-_{\varepsilon,k} = \{1, 2, ..., k\} \setminus T^+_{\varepsilon,k}.$$

Наступна лема дозволяє оцінити «щільність» множини $T^+_{\varepsilon,k}$. Нехай $\mid E \mid$ означає кількість елементів в множині E.

Лема 1. *Якщо виконується умова (4), то* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|T^+_{\varepsilon,k}|}{k} = 1$.

Доведення. Припустимо, що $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|T^+_{\varepsilon,k}|}{k} \neq 1$. З попереднього припущення випливає існування підпослідовності $\{k_m\}$, для якої виконується рівність $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{|T^+_{\varepsilon,k_m}|}{k_m} = C < 1$. З нерівності (5) випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує додатна константа $\delta = \delta(\varepsilon)$ така, що $h_j \leq (1-\delta)\ln n_j$ для довільного $j \in T^-_{\varepsilon,k}$. Таким, чином
$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{k_m} h_j}{\ln(n_1 \cdot ... \cdot n_{k_m})} = \frac{\sum\limits_{j\in T^+_{\varepsilon,k_m}} h_j + \sum\limits_{j\in T^-_{\varepsilon,k_m}} h_j}{\ln(n_1 \cdot ... \cdot n_{k_m})} \leq \frac{\sum\limits_{j\in T^+_{\varepsilon,k_m}} \ln n_j + (1-\delta) \sum\limits_{j\in T^-_{\varepsilon,k_m}} \ln n_j}{\ln(n_1 \cdot ... \cdot n_{k_m})} \leq$$
$$\leq 1 - \delta \frac{\sum\limits_{j\in T^-_{\varepsilon,k}} n_j}{\ln(n_1 \cdot ... \cdot n_{k_m})}.$$

Отже,
$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{k_m} h_j}{\ln(n_1 \cdot ... \cdot n_{k_m})} \leq 1 - \delta \frac{|T^-_{\varepsilon,k_m}| \ln 2}{k_m \ln n^*}. \tag{7}$$

З (7) випливає
$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{h_1 + h_2 + ... + h_{k_m}}{\ln(n_1 \cdot ... \cdot n_{k_m})} \leq 1 - \delta \frac{\ln 2}{\ln n^*} (1 - C),$$
що неможливо.

□

Множина $T^{-}_{\varepsilon,k}$ може бути представлена наступним чином: $T^{-}_{\varepsilon,k} = T^{(1)}_k \cup T_{\varepsilon,k}$, де $T^{(1)}_k$ визначені вище і $T_{\varepsilon,k} = T^{-}_{\varepsilon,k} \setminus T^{(1)}_k$.

З попередньої леми випливає, що $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|T^{-}_{\varepsilon,k}|}{k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{|T^{(1)}_k|}{k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{|T_{\varepsilon,k}|}{k} = 0$.

Нехай $\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)}$ — циліндр, що містить точку x та $\lambda\left(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)}\right) \leq \varepsilon$. Тоді для будь-яких $x \in [0,1)$, $k \in \mathbb{N}$ маємо:

$$-\ln \mu(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)}) = -\left(\ln[\prod_{j=1}^{k} p_{\alpha_j(x)j}]\right) =$$

$$= -\left(\sum_{j\in T^{(1)}_k} \ln p_{\alpha_j(x)j} + \sum_{j\in T_{\varepsilon,k}} \ln p_{\alpha_j(x)j} + \sum_{j\in T^{+}_{\varepsilon,k}} \ln p_{\alpha_j(x)j}\right).$$

Очевидно, що $\sum\limits_{j\in T_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \leq |T_{\varepsilon,k}| \ln(2n^*)$ і

$$\sum_{j\in T^{+}_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \leq \sum_{j\in T^{+}_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{\frac{1}{n_j} - \varepsilon} = \sum_{j\in T^{+}_{\varepsilon,k}} \left(\ln n_j + \ln\left(1 + \frac{n_j\varepsilon}{1 - n_j\varepsilon}\right)\right) \leq$$

$$\leq \sum_{j\in T^{+}_{\varepsilon,k}} \ln n_j + |T^{+}_{\varepsilon,k}| \frac{\varepsilon n^*}{1 - \varepsilon n^*}.$$

З наведених вище оцінок випливає, що для будь-якого $x \in [0,1)$ при умові $\varepsilon < \frac{1}{n^*}$ має місце нерівність

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln \mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln \lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})} \leq 1 + \frac{\varepsilon n^*}{(1 - \varepsilon n^*)\ln 2}.$$

З іншого боку,

$$\sum_{j\in T_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} > |T_{\varepsilon,k}| \ln \frac{2n^*}{2n^* - 1},$$

і

$$\sum_{j\in T^{+}_{\varepsilon,k}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} \geq \sum_{j\in T^{+}_{\varepsilon,k}} \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{n_j} + \varepsilon}\right) = \sum_{j\in T^{+}_{\varepsilon,k}} \left(\ln n_j + \ln \frac{\frac{1}{n_j}}{\frac{1}{n_j} + \varepsilon}\right) \geq$$

$$\geq \sum_{j\in T^{+}_{\varepsilon,k}} \ln n_j - |T^{+}_{\varepsilon,k}| \left(1 + n^*\varepsilon\right).$$

Отже, для будь-яких $x \in [0,1)$ та $\varepsilon < \frac{1}{2n^*}$ маємо:

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln \mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})}{\ln \lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)})} \geq 1 - \frac{\ln(1 + n^*\varepsilon)}{\ln 2}.$$

Тому для будь-якого $x \in [0,1)$:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln \mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\dots\alpha_k(x)})}{\ln \lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\dots\alpha_k(x)})} = 1. \tag{8}$$

З формули (8) та теореми Біллінгслі ([**6**]), маємо для всіх $E \subset [0,1]$:

$$\dim_\lambda(E) = 1 \cdot \dim_{\mu_\xi}(E),$$

де $\dim_\lambda(E)$ і $\dim_{\mu_\xi}(E)$ — розмірності Хаусдорфа–Біллінгслі відносно мір λ і μ_ξ (див. детальніше, наприклад, [**4**] або [**6**]).

З $\dim_\lambda(E) = \dim_H(E)$ і $\dim_{\mu_\xi}(E) = \dim_H(F_\xi(E))$ отримуємо, що F_ξ є DP-перетворенням одиничного відрізка.

Необхідність. Нехай F_ξ — DP-перетворення одиничного відрізка. Покажемо, що $\dim_H \mu_\xi = 1$ і $A = 0$.

Припустимо спочатку, що $\dim_H \mu_\xi < 1$. Тоді існує борелівський носій E міри μ_ξ такий, що $\dim_H(E) < 1$. Оскільки $\mu_\xi(E) = 1$, то $\dim_H(F_\xi(E)) = 1 \neq \dim(E)$, що суперечить припущенню. Таким чином, суперфрактальність міри μ_ξ є необхідною для збереження розмірності функцією F_ξ.

Припустимо, що $A > 0$. Побудуємо множину L для якої F_ξ не зберігає розмірність. Нехай

$$L = \Big\{x:\ x = \Delta_{\alpha_1\dots\alpha_k\dots};\ \alpha_k \in \{0,1,\dots,n_k-1\}\ \text{ якщо }\ k \notin T^{(1)};\\ \alpha_k = f_k \text{ якщо } k \in T^{(1)},\ \text{ де } p_{f_k k} = \min_i p_{ik}\Big\}.$$

Множина L належить до класу множин $C[\tilde{Q}, V_k]$ (див. [**4**]), де $q_{ik} = \frac{1}{n_k}$, $\forall i \in \{0,1,\dots,n_k-1\}$ та $V_k = \{0,1,\dots,n_k-1\}$ при $k \notin T^{(1)}$; $V_k = \{f_k\}$ при $k \in T^{(1)}$.

Як відомо $C[\tilde{Q}, \{V_k\}]$ має нульову міру Лебега тоді і тільки тоді, коли $\sum\limits_{k=1}^{\infty} W_k = +\infty$, де $W_k = \sum\limits_{i:i\notin V_k} q_{ik}$. Оскільки $W_k = \frac{n_k-1}{n_k} \geq \frac{1}{2}$ та $\mid T^{(1)} \mid = +\infty$ $\forall k \in T^{(1)}$ (бо $A > 0$), то $\lambda(L) = 0$.

Покажемо, що $\dim_H L = 1$. З цією метою розглянемо в. в.

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{n_1 \cdot n_2 \cdot \dots n_k},$$

де $\{\eta_k\}_{k\geq 1}$ — незалежні в. в. з наступними розподілами: якщо $k \in T^{(1)}$, то $\eta_k = f_k$ з ймовірністю 1; якщо $k \notin T^{(1)}$, то $\eta_k = i$ з ймовірністю $\frac{1}{n_k}$, $\forall i \in \{0,1,\dots,n_k-1\}$. Очевидно, що L є спектром розподілу в. в. η. Тому $\dim_H L \geq \dim_H \mu_\eta$. З іншого боку,

$\dim_H \mu_\eta = \varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{h_1+h_2+\dots+h_k}{\ln(n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_k)}$, де $h_j = -\sum\limits_{i=0}^{n_j-1} p_{ij}\ln p_{ij}$ за теоремою 1, у нашому випадку

$$h_j = \begin{cases} \ln n_j, \text{ якщо } j \notin T^{(1)}; \\ 0, \text{ якщо } j \in T^{(1)}. \end{cases}$$

Тому

$$\dim_H \mu_\xi = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\sum\limits_{j\in T_k^+\cup T_{\varepsilon,k}} \ln n_j}{\ln(n_1\cdot\ldots\cdot n_k)} = \varliminf_{k\to\infty}\left(1 - \frac{\sum\limits_{j\in T_k^{(1)}} \ln n_j}{\ln(n_1\cdot\ldots\cdot n_k)}\right) \geq$$

$$\geq \varliminf_{k\to\infty}\left(1 - \frac{\mid T_k^{(1)}\mid \cdot \ln n^*}{\ln(n_1\cdot\ldots\cdot n_k)}\right) = 1.$$

З $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{\sum\limits_{j\in T_k^{(1)}} \ln p_j}{-k} = A$ випливає існування підпослідовності $\{k_m\}$ такої, що границя

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{j\in T_{k_m}^{(1)}} \ln p_j}{-k_m}$$

існує і дорівнює A. Отже, для будь-якого $x\in L$, маємо

$$\varliminf_{m\to\infty} \frac{\ln \mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})}{\ln \lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})} = \varliminf_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{j\in T_{k_m}^{(1)}} \ln\frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} + \sum\limits_{j\in T_{\varepsilon,k_m}} \ln\frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}} + \sum\limits_{j\in T^+_{\varepsilon,k_m}} \ln\frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}}}{\sum\limits_{j=1}^{k_m} \ln n_j}$$

$$= \varliminf_{m\to\infty}\left(\frac{\sum\limits_{j\in T_{k_m}^{(1)}} \ln\frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}}}{\sum\limits_{j=1}^{k_m}\ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)}}} + \frac{\sum\limits_{j\in T_{\varepsilon,k_m}} \ln\frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}}}{\sum\limits_{j=1}^{k_m}\ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)}}} + \frac{\sum\limits_{j\in T^+_{\varepsilon,k_m}} \ln\frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}}}{\sum\limits_{j=1}^{k_m}\ln\frac{1}{q_{\alpha_j(x)}}}\right). \tag{9}$$

Оцінимо кожен доданок суми (9). Якщо $x\in L$, то

$$\frac{\sum\limits_{j\in T^1_{\varepsilon,k_m}} \ln\frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}}}{\sum\limits_{j=1}^{k_m}\ln n_j} = \frac{\sum\limits_{j\in T^1_{\varepsilon,k_m}} \ln\frac{1}{p_j}}{\sum\limits_{j=1}^{k_m}\ln n_j} \geq \frac{\sum\limits_{j\in T^1_{\varepsilon,k_m}} \ln\frac{1}{p_j}}{k_m \ln n^*} \to \frac{A}{\ln n^*}\ (m\to\infty)$$

Тепер оцінимо 2-ий доданок суми (9). Якщо $x\in L$, то з наступної нерівності

$$0 \leq \varliminf_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{j\in T_{\varepsilon,k_m}} \ln\frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}}}{\sum\limits_{j=1}^{k_m}\ln n_j} \leq \varliminf_{m\to\infty} \frac{|T_{\varepsilon,k_m}|\ln 2n^*}{k_m\ln 2} = \lim_{m\to\infty} \frac{|T_{\varepsilon,k_m}|\ln 2n^*}{k_m\ln 2} = 0$$

випливає рівність

$$\varliminf_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{j\in T_{\varepsilon,k_m}} \ln\frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}}}{\sum\limits_{j=1}^{k_m}\ln n_j} = 0.$$

Нарешті, оцінимо 3-й доданок суми (9):

$$\frac{\sum\limits_{j\in T^+_{\varepsilon,k_m}} \ln \frac{1}{p_{\alpha_j(x)j}}}{\sum\limits_{j=1}^{k_m} \ln n_j} \geq \frac{\sum\limits_{j\in T^+_{\varepsilon,k_m}} \ln \frac{1}{\frac{1}{n_j}+\varepsilon}}{\sum\limits_{j=1}^{k_m} \ln n_j} = \frac{\sum\limits_{j\in T^+_{\varepsilon,k_m}} \ln n_j - \sum\limits_{j\in T^+_{\varepsilon,k_m}} \ln(1+\varepsilon n_j)}{\sum\limits_{j=1}^{k_m} \ln n_j}$$

$$\geq \frac{\sum\limits_{j=1}^{k_m} \ln n_j - \sum\limits_{j\in T^-_{\varepsilon,k_m}} \ln n_j - \sum\limits_{j\in T^+_{\varepsilon,k_m}} \ln(1+\varepsilon n_j)}{\sum\limits_{j=1}^{k_m} \ln n_j}$$

$$\geq 1 - \frac{\mid T^-_{\varepsilon,k_m} \mid \cdot \ln n^* + \mid T^+_{\varepsilon,k_m} \mid \ln(1+\varepsilon n^*)}{k_m \ln 2} \to 1 - \frac{\ln(1+\varepsilon n^*)}{\ln 2} (m\to\infty).$$

Отже,

$$1 - \frac{1+\varepsilon n^*}{\ln 2} + \frac{A}{\ln n^*} \leq \varliminf_{m\to\infty} \frac{\ln \mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})}{\ln \lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})}, \ \forall\varepsilon > 0.$$

Тому

$$1 + \frac{A}{\ln n^*} \leq \varliminf_{m\to\infty} \frac{\ln \mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})}{\ln \lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})}.$$

Таким чином, для довільного $\delta > 0$ існує $m(\delta)$ таке, що для будь-якого $m > m(\delta)$ має місце

$$1 + \frac{A}{\ln n^*} - \delta \leq \frac{\ln \mu_\xi(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})}{\ln \lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})}$$

для кожного $x \in L$, що еквівалентно наступній нерівності:

$$\mu(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)}) \leq \lambda(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})^{1+\frac{A}{\ln n^*}-\delta}.$$

Отже, для довільних $x \in L$, $\delta > 0$ та $m > m(\delta)$ маємо

$$d(\Delta'_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})^{\frac{1}{1+c\cdot A-\delta}} \leq d(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)}), \tag{10}$$

де $\Delta'_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)} = F_{\mu_\xi}(\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k_m}(x)})$ і $d(\cdot)$ — діаметр множини. Виберемо $\delta \in (0, \frac{A}{\ln n^*})$.

З $\lambda(L) = 0$ випливає, що міра Хаусдорфа $H^1_\varepsilon(L) = 0$ для довільного додатного ε. Отже, для вибраного $\varepsilon > 0$ та вибраного $t > 0$ існує ε-покриття $\{E_i\}$ множини L циліндрами рангу k_m (m залежить від ε і t) таке, що $\sum\limits_i d(E_i) < t$.

Сім'я множин $\{E'_i\} = \{F_\xi(E_i)\}$ є ε'-покриттям множини $L' = F_\xi(L)$. Очевидно, що $\varepsilon' \to 0 \Leftrightarrow \varepsilon \to 0$, оскільки функція F_ξ є рівномірно неперервною на одиничному інтервалі.

Не порушуючи загальності, будемо розглядати тільки ті E_i, що мають непорожній переріз з L. З (10) випливає, що

$$\sum_i \left[d(E'_i)\right]^{\frac{1}{1+\frac{A}{\ln n^*}-\delta}} \leq \sum_i d(E_i) < t.$$

Вибираючи ε і t як завгодно малими, отримаємо

$$H_{\varepsilon'}^{\frac{1}{1+\frac{A}{\ln n^*}-\delta}}(L') = 0, \qquad \forall \varepsilon' > 0.$$

Таким чином, $H^{\frac{1}{1+\frac{A}{\ln n^*}-\delta}}(L') = 0$, і, отже, $\dim_H(L') \leq \frac{1}{1+\frac{A}{\ln n^*}-\delta} < 1$, $\forall \delta > 0$. Тому $\dim_H L' \leq \frac{1}{1+\frac{A}{\ln n^*}}$ звідки слідує, що F_ξ не належить до класу DP-перетворень. $\square$

Література

[1] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // Ergodic Theory and Dynamical Systems. — 2004. — **24**. — P. 1–16.

[2] *Albeverio S., Ivanenko G., Lebid M., Torbin G.* On the Hausdorff dimension faithfulness for covering families and its applications // submitted to Mathematical Research Letters (available at http://arxiv.org/abs/math/0724662).

[3] *Albeverio S., Torbin G.* Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^*-digits // Bull. Sci. Math. —2005. — **129**, №4. — P. 356–367.

[4] *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols // Meth. of Func. An. Top.— 2011. — **17**, no.2. — P. 97–111.

[5] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Transformations preserving the Hausddorff-Besicovitch dimension // Central European Journal of Mathematics. — 2008. — **6**, No. 1. — P. 119–128.

[6] *Billingsley P.* Hausdorff dimension in probability theory II // Ill. J. Math.— 1961.— **5**.— P. 291–198.

[7] *Cantor G. Ü*ber die einfachen Zahlensysteme // Zeitschrift f. Math. u. Physik. — 1869. — **14**. — P. 121–128.

[8] *Erdös P., Renyi A.* Some further statistical properties of the digits in Cantor's series // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1959. — **10**. — P. 207–215.

[9] Falconer K. J. *Fractal geometry: mathematical foundation and applications*, John Wiley & Sons, 1990.

[10] *Jessen B., Wintner A.* Distribution function and Riemann Zeta-function // Trans.Amer.Math.Soc. — 1935. — **38**. — P. 48–88.

[11] F. Klein, *Verschiedene Betrachtung über neuere geometrische Forschunden*, Erlangen, 1872.

[12] *Lévy P.* Sur les séries dont les termes sont des variables indépendantes // Studia Math. — 1931. — **3**. — P. 119–155.

[13] *Sauer T., Yorke J.* Are the dimensions of a set and its image equal under typical smooth functions? // Ergodic Theory Dynam. Systems. — 1997. — **17**. — P. 941–956.

[14] *Torbin G.* Probability distributions with independent Q-symbols and transformations preserving the Hausdorff dimension// Theory of Stochastic Processes.— 2007.— **13 (29)**, No. 1-2.— P. 281–293.

[15] *Торбін Г. М.* Мультифрактальний аналіз сингулярно неперевних ймовірнісних мір // Український математичний журнал. — 2005. — **57**, №5. — С. 837–857.

[16] *Торбін Г.* Ймовірнісний підхід до перетворень, що зберігають фрактальну розмірність // Математичний вісник Наукового Товариства імені Т.Шевченка. — 2007. — № 4. — С. 275 – 283.

[17] *Торбін Г.* Про DP-властивості фрактальних ймовірнісних мір з незалежними Q-символами // Доповіді НАНУ. — 2008. — № 4. — С. 44 – 50.