Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова.— 2015, № 17.— С. 7–17.

УДК 519.41/47

Критерій відсутності періоду в Q_2-зображенні раціональних чисел інтервалу $(0;1)$

М. В. Працьовитий[1], С.В. Скрипник[2], О.П. Макарчук[3]
[1] НПУ імені М.П. Драгоманова, ІМ НАН України, Київ, Україна
[2] НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна
[3] ЦДПУ імені В. Винниченка, Кіровоград, Україна

Анотація. Вказані достатні умови, накладені на ірраціональні числа q_j, $j \in \{0;1\}$, при яких довільне раціональне число з інтервалу $(0;1)$ має Q_2-зображення, яке не містить періоду.

Ключові слова: Q_2-зображення чисел $[0;1]$, періодичність зображення, алгебраїчне число, трансцендентне число.

Abstract. These sufficient conditions imposed on irrational numbers q_j, $j \in \{0,1\}$ in which an arbitrary rational number in the interval $(0,1)$ is Q_2-image that does not contain a period.

Keywords: Q_2-representation of numbers $[0;1]$, representation of number with period, algebraic number, transcendental number.

Вступ

Число є фундаментальним об'єктом математики, тому не випадково, що на сьогоднішній день створено багато систем представлень і зображень дійсних чисел, кожна з яких має свої метричні, фрактальні топологічні особливості. Однією з таких систем є Q_2-представлення, запропоноване в [3].

Нехай $q_0 \in (0;1)$ і $q_1 = 1 - q_0$. Відомо [12], що для кожного числа x з відрізка $[0;1]$ існує послідовність a_n, кожний член якої рівний 0 або 1, причому виконується рівність

$$x = \gamma_{\alpha_1} + \gamma_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \dots + \gamma_{\alpha_k} q_{\alpha_1} \cdot \dots \cdot q_{\alpha_{k-1}},$$

де $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = q_0$, яка називається Q_2-представленням числа x.

Відштовхуючись від останньої рівності, вводиться поняття Q_2-зображення числа x

$$x = \Delta^Q_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k \cdots},$$

елементами якого є цифри α_n.

Відомо [12], що зліченна множина чисел

$$\{\sum_{k=1}^{n}\gamma_{\alpha_k}q_{\alpha_1}\cdots q_{\alpha_{k-1}}|\alpha_j\in\{0;1\}\forall j\in 1,2,\cdots,n,\quad \alpha_n=1\}$$

має два Q_2-зображення — $\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}1(0)}$ і $\Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}0(1)}$. Відповідні числа називаються Q_2-раціональними. Всі інші числа відрізку $[0;1]$ мають єдине Q_2-зображення, позбавлене періоду (0) та (1).

При $q_0=\frac{1}{2}$ відповідне Q_2-представлення перетворюється на відоме двійкове представлення дійсних чисел. Однією з особливостей двійкового представлення є виконання наступного «критерію раціональності» – число $x\in[0;1]$ є раціональним тоді і тільки тоді, коли його двійкове зображення містить період, тобто

$$x=\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k(\beta_1\beta_2\cdots\beta_m)},\beta_i\in\{0,1\}.$$

Цілком природно припустити, що для всіх (або принаймні існують) $q_0\in(0;1)\cap Q$, працює аналогічний «критерій раціональності». В роботі [] було показано, що для $\frac{1}{2}\neq q_0\in(0;1)\cap Q$ відповідний критерій не виконується, точніше, існують раціональні числа, які мають неперіодчне Q_2-зображення.

В даній роботі ми досліджуємо «критерій раціональності» для випадку, коли число q_0 – алгебраїчне або трансцендентне.

1. Q_2-зображення раціональних чисел інтервалу $(0;1)$ для алгебраїчного $q_0\in(0;1)$

Означення **1.** Число α називається алгебраїчним, якщо існує многочлен

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, \tag{1}$$

з цілими коефіцієнтами $a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$ $(a_n\neq 0)$, такий, що $f(\alpha)=0$.

Зрозуміло, що для кожного алгебраїчного числа α існує нескінченно многочленів з цілими коефіцієнтами, таких що $f(\alpha)=0$. Тому цілком природним є розгляд многочлена, який був би «мінімальним» в тому чи іншому розумінні по відношенню, до числа α. В зв'язку з цим розглянемо наступне означення.

Означення **2.** Число α називається алгебраїчним числом степеня n, якщо існує многочлен

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, \tag{2}$$

такий, що

1) $a_n\in N$, $a_{n-1},\cdots,a_1,a_0\in Z$, НСД$(a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0)=1$;
2) $f(\alpha)=0$;
3) для довільних цілих чисел b_k, b_{k-1},..., b_0 $(\sum\limits_{j=0}^{k}b_j^2\neq 0,\ k<n)$ виконується умова

$$b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0\neq 0.$$

Многочлен $f(x)$ при цьому називають мінімальним многочленом числа α.

Як відомо [], для кожного алгебраїчного числа α мінімальний многочлен $f(x)$ існує і він єдиний. Наприклад, $\sqrt[3]{2}$ – алгебраїчне число степеня 3 і його мінімальний многочлен: $f(x) = x^3 - 2$.

Лема 1. *Нехай α — алгебраїчне число степеня n. Якщо для раціональних чисел $a_k, a_{k-1}, ..., a_0, b_k, b_{k-1}, ..., b_0$ $(k < n)$ виконується рівність*

$$a_k\alpha^k + a_{k-1}\alpha^{k-1} + \cdots + a_0 = b_k\alpha_k + b_{k-1}\alpha^{k-1} + \cdots + b_0,$$

то $a_j = b_j$ для кожного $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$.

Доведення. Нехай m — натуральне число, таке, що ma_j, $mb_j \in Z$ для кожного $j \in \{0, 1, \cdots, k\}$. Маємо:

$$\sum_{j=0}^{k} m(a_j - b_j)\alpha^j = 0$$

причому $m(a_j - b_j) \in Z$ для кожного $j \in \{0, 1, \cdots, k\}$. Оскільки степінь числа α рівний n, то остання рівність можлива лише коли

$$\sum_{j=0}^{k} m^2(a_j - b_j)^2 = 0$$

тобто

$$\sum_{j=0}^{k} (a_j - b_j)^2 = 0$$

звідки $a_j = b_j$ для кожного $j \in \{0, 1, \cdots, k\}$. □

Лема 2. *Нехай α — алгебраїчне число степеня n і (2) — його мінімальний многочлен, тоді для довільного $k \in Z_+$ існують єдині цілі числа $a_{(n-1)k}$, $a_{(n-2)k}$,...,a_{0k} такі, що*

$$\alpha^{n+k} = \frac{a_{(n-1)k}\alpha^{n-1} + a_{(n-2)k}\alpha^{n-2} + \cdots + a_{ok}}{a_n^{k+1}},$$

причому виконуються рівності

$$a_{(n-i)0} = -a_i,$$

$$a_{(n-j)(k+1)} = a_n a_{(n-j-1)k} + a_{n-j}a_{(n-1)k},$$
$$a_{0(k+1)} = -a_0 a_{(n-1)k}, i \in \{0, 1, \cdots, n\}, j \in \{1, \cdots, n-1\}.$$

Доведення. Проведемо доведення по індукції по k. Нехай $k = 0$, тоді оскільки

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0,$$

то

$$\alpha^n = \frac{-a_{n-1}\alpha^{n-1} - \cdots - a_1\alpha - a_0}{a_n}.$$

Нехай твердження правильне при $n = k$, тобто

$$\alpha^{n+k} = \frac{a_{(n-1)k}\alpha^{n-1} + a_{(n-2)k\alpha^{n-2}} + \cdots + a_{0k}}{a_n^{k+1}},$$

тоді

$$\begin{aligned}\alpha^{n+k+1} =&\alpha^{n+k}\alpha = \frac{1}{a_n^{k+1}}(a_{(n-1)k}\alpha^n + a_{(n-1)k}\alpha^{n-2} + \cdots + a_{0k}\alpha) = \\ =&\frac{1}{a_n^{k+1}}(a_{(n-1)k}\frac{-a_{n-1}\alpha^{n-1} - \cdots - a_1\alpha - a_0}{a_n} + a_{(n-1)k}\alpha^{n-2} + \cdots + a_{0k}\alpha) = \\ =&\frac{(a_n a_{(n-2)k} - a_{n-1}a_{(n-1)k})\alpha^{k-1} + (a_n a_{(n-3)k} - a_{n-2}a_{(n-2)k})\alpha^{k-2} + \cdots - a_0 a_{(n-1)k}}{a_n^{k+2}} = \\ =&\frac{a_{(n-1)(k+1)}\alpha^{n-1} + a_{(n-2)(k+1)}\alpha^{n-2} + \ldots + a_{0(k+1)}}{a_n^{k+2}}.\end{aligned}$$

Враховуючи лему 1 маємо, що остання рівність виконується лише тоді, коли

$$a_{(n-i)0} = -a_i,$$

$$a_{(n-j)(k+1)} = a_n a_{(n-j-1)k} + a_{n-j}a_{(n-1)k},$$
$$a_{0(k+1)} = -a_0 a_{(n-1)k}, i \in \{0, 1, \cdots, n\}, j \in \{1, \cdots, n-1\}.$$

□

Теорема 1. *Нехай $i \in \{0, 1\}$, $q_i \in (0; 1)$ — ірраціональне алгебраїчне число степеня n з мінімальним многочленом (2), причому існує просте число p, таке, що число a_0 кратне p, а a_n – ні. Тоді число $\frac{1}{p}$ має Q_2-зображення, що не містить періоду.*

Доведення. Нехай $i = 0$, при $i = 1$ доведення аналогічне.

Припустимо протилежне, що

$$\frac{1}{p} = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(\beta_1\beta_2\ldots\beta_m)},$$

тоді

$$\frac{1}{p} = \gamma_{\alpha_1} + \gamma_{\alpha_2}q_{\alpha_1} + \cdots + \gamma_{\alpha_k}q_{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot q_{\alpha_{k-1}} + q_{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot q_{\alpha_k}\frac{\gamma_{\beta_1} + \gamma_{\beta_2}q_{\beta_1} + \cdots + \gamma_{\beta_m}q_{\beta_1}\cdot\ldots\cdot q_{\beta_{m-1}}}{1 - q_{\beta_1\cdot\ldots\cdot q_{\beta_{m-1}}}},$$

де $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = q_0$.

Розглянемо 2 випадки:

1) $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0$, тоді маємо:

$$\frac{1}{p} = \gamma_{\alpha_1} + \gamma_{\alpha_2}q_{\alpha_1} + \ldots + \gamma_{\alpha_k}q_{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot q_{\alpha_{k-1}}.$$

Оскільки $q_1 = 1 - q_0$, то зрозуміло, що для кожного $r \in \{1, \ldots, k\}$ існують цілі числа $b_{r,r}$, $b_{(r-1),r}$,...,$b_{0,r}$ такі, що

$$\gamma_{a_r}q_{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot q_{\alpha_{r-1}} = b_{r,r}q_0^{r-1} + b_{(r-2),r}q_0^{r-2} + \cdots\cdots + b_{0,r}.$$

Якщо $r > n$, то враховуючи лему 2, маємо

$$\gamma_{a_r}q_{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot q_{\alpha_{r-1}} = \sum_{k=n}^{r} b_{kr}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{a_{j(r-n)}q_0^j}{a_n^{r-n+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} b_{kr}q_0^k,$$

тобто існують цілі числа $c_{(n-1)r}, c_{(n-2)r}, \dots, c_{0r}$, такі, що

$$\gamma_{\alpha_r} q_{\alpha_1} \dots q_{\alpha_{r-1}} = \frac{1}{a_n^{r-n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} c_{jr} q_0^j$$

Розглянемо випадки

I) $k < n$, тоді

$$\frac{1}{p} = \sum_{r=o}^{k} b_{r,r} q_0^r + b_{(r-1),r} q_0^{r-1} + \dots + b_{0,r} = \sum_{r=0}^{k} d_j q_0^j,$$

для деяких цілих $d_0, d_1, \dots, d_k$. За лемою 1, маємо: $\frac{1}{p} = d_0$, суперечність.

II) $k \geq n$, тоді

$$\frac{1}{p} = \sum_{r=o}^{k} b_{r,r} q_0^r + b_{(r-1),r} q_0^{r-1} + \dots + b_{0,r} + \sum_{k=n}^{r} \frac{1}{a_n^{r-n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} c_{jr} q_0^j = \frac{l_{n-1} q_0^{n-1} + l_{n-2} q_0^{n-2} + \dots + l_0}{a_n^{r-n+1}}$$

для деяких цілих $l_0, l_1, \dots, l_k$. За лемою 1, маємо:

$$\frac{1}{p} = \frac{l_0}{a_n^{r-n+1}},$$

$$a_n^{r-n+1} = p l_0,$$

що неможливо, бо права частина останньої рівності ділиться на p, а ліва – ні. Прийшли до суперечності.

2) Нехай $\sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j^2 \neq 0$ $\sum\limits_{j=1}^{m} (\beta_j - 1)^2 \neq 0$. Нагадаємо, що наявність періоду (1) у відповідному Q_2 розкладі, еквівалентне існуванню іншого зображення з періодом (0). Маємо:

$$\frac{1 - q_{\beta_1} q_{\beta_2} \dots q_{\beta_m}}{q} = (1 - q_{\beta_1} q_{\beta_2} \dots q_{\beta_m}) \sum_{j=1}^{k} \gamma_{\alpha_1} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} \dots q_{\alpha_{j-1}} + q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} \dots q_{\alpha_k} \sum_{j=1}^{m} \gamma_{\beta_1} q_{\beta_1} q_{\beta_2} \dots q_{\beta_j}$$

Міркуючи аналогічно до пункту 1) приходимо, до висновку, що існують цілі числа $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ і число $s \in Z_+$ такі, що

$$(1 - q_{\beta_1} q_{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_{\beta_m}) \sum_{j=1}^{k} \gamma_{\alpha_1} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} \cdot \dots \cdot q_{\alpha_{j-1}} + q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} \cdot \dots \cdot q_{\alpha_k} \sum_{j=1}^{m} \gamma_{\beta_1} q_{\beta_1} q_{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_{\beta_j} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1} c_j q_0^j}{a_n^s}$$

Нехай серед набору $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ – r нулів і l одиниць, тоді $r, l > 0$, $r + l = m$.

Розглянемо випадки:

I) $m < n$, тоді

$$\frac{1 - q_{\beta_1} q_{\beta_2} \cdots q_{\beta_m}}{p} = \frac{1}{p}(1 - q_0^r (1 - q_0)^l),$$

тобто

$$\frac{1}{p}(1 - q_0^r (1 - q_0)^l) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1} c_j q_0^j}{a_n^s}.$$

За лемою 1, маємо:

$$\frac{1}{p} = \frac{c_0}{a_n^s},$$
$$a_n^s = pc_0,$$

що неможливо, бо права частина останньої рівності ділиться на p, а ліва – ні. Прийшли до суперечності.

II) Нехай $r \geq n$. Маємо:

$$1 - q_0^r(1-q_0)^r = 1 - q_0^r \sum_{i=0}^{l} (-1)^i C_l^i q_0^i = 1 - \sum_{i=0}^{l} (-1)^i C_l^i q_0^{r+i}.$$

Розглянемо випадки:

II a) Нехай $r \geq n$. Маємо:

$$1 - q_0^r(1-q_0)^l = 1 - \sum_{i=0}^{l} (-1)^i C_l^i q_0^{r+i} = 1 - \sum_{i=0}^{l} (-1)^i C_l^i \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_{j_{(r+i-n)}} q_0^j}{a_n^{r+i-n+1}}.$$

За лемою 2: $a_{0(k+1)} = -a_0 a_{(n-1)k} \vdots a_o \vdots p_0$, тобто a_{0j} кратне p для кожного $j \in Z_+$.

Отже,

$$1 - q_0^r(1-q_0)^l = \frac{a_n^{r+l-n+1} - \sum\limits_{j=0}^{n-1} d_j q_0^j}{a_n^{r+i-n+1}},$$

де $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$ –деякі цілі числа і d_0 кратне p.

Маємо:

$$\frac{a_n^{r+l-n+1} - \sum\limits_{j=0}^{n-1} d_j q_0^j}{pa_n^{r+l-n+1}} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1} c_j q_0^j}{a_n^s}.$$

За лемою 1:

$$\frac{a_n^{r+l-n+1} - d_0}{pa_n^{r+l-n+1}} = \frac{c_0}{a_n^s},$$

звідки

$$a_n^{s+r+l-n+1} = d_0 a_n^s + c_0 p a_n^{r+l-n+1},$$

що неможливо, бо права частина останньої рівності ділиться на p, а ліва – ні. Прийшли до суперечності.

IIb) Нехай $r < n$.

Враховуючи лему 2 і міркування пункту II а), отримаємо:

$$
\begin{aligned}
1 - q_0^r(1-q_0)^l =& 1 = \sum_{i=0}^{l} (-1)^i C_l^i q_0^{r+i} = \\
&=1 - \sum_{i=0}^{n-1-r} (-1)^i C_l^i q_0^{r+i} - \sum_{i=n-1}^{l} (-1)^i C_l^i q_0^{r+i} = \\
&=1 - \sum_{i=0}^{n-1-r} (-1)^i C_l^i q_0^{r+i} - \frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1} h_j q_0^i}{a_n^{r+l-n+1}},
\end{aligned}
$$

де $h_0, h_1, ..., h_{n-1}$ – деякі цілі числа іh_0 кратне p.

Отже,

$$
\frac{1}{p}\left(1 - \sum_{i=0}^{n-1-r} (-1)^i C_l^i q_0^{r+i} - \frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1} h_j q_0^j}{a_n^{r+l-n+1}}\right) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1} c_j q_0^j}{a_n^s}.
$$

За лемою 1:

$$
\frac{1}{p}(1 - \frac{h_0}{a_n^{m-n+1}}) = \frac{c_0}{a_n^s},
$$

звідки

$$
a_n^{m-n+s+1} = h_0 a_n^s + c_0 p a_n^{m-n+1},
$$

що неможливо, бо права частина останньої рівності ділиться на p, а ліва – ні. Прийшли до суперечності.

□

Лема 3. *Нехай α — ірраціональне алгебраїчне число степеня n з мінімальним многочленом (2), тоді $f(r) \neq 0$ для кожного раціонального r.*

Доведення. Припустимо протилежне, тобто $f(\frac{m}{k}) = 0$ для деяких $m \in Z$, $n \in N$, тоді за теоремою Безу існують дійсні числа b_0, b_1,..., b_{n-1}, такі що

$$
a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = a_n(x - \frac{m}{k})(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_0).
$$

Прирівнюючи коефіцієнти при степенях x, маємо:

$$
\begin{gathered}
b_{n-1} = 1; \\
\frac{a_{n-1}}{a_n} = b_{n-2} - \frac{m}{k} b_{n-1}; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{a_1}{a_n} = b_0 - \frac{m}{k} b_1; \\
\frac{a_0}{a_n} = -\frac{m}{k} b_0.
\end{gathered}
$$

З системи видно, що $b_j \in Q$ для кожного $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$, тобто $b_j = \frac{c_j}{d_j}$, де $c_j \in Z$ $d_j \in N$ для кожного $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Маємо:

$$\alpha^{n-1} + \frac{c_{n-2}}{d_{n-2}}\alpha^{n-2} + ... + \frac{c_1}{d_1}\alpha + \frac{c_0}{d_0} = 0,$$

звідки

$$h_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + h_1\alpha + h_0 = 0,$$

де $h_{n-1} = \prod_{j=0}^{n-2} d_j \in N$ і $h_j = \frac{c_j}{d_j}\prod_{j=0}^{n-2} d_j \in Z$ для кожного $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

Суперечність з тим, що степінь числа α рівний n. □

Лема 4. *Нехай α — ірраціональне алгебраїчне число степеня n з мінімальним многочленом (2), b_0, b_1,..., b_n — цілі числа, такі що*

$$b_n\alpha^n + ... + b_1\alpha + b_0 = 0,$$

тоді існує ціле число λ, таке, що $b_j = \lambda a_j$ для кожного $j \in \{0, 1, ..., n\}$.

Доведення. Якщо $b_n = 0$, то оскільки степінь числа α — n, з рівності

$$b_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + b_1\alpha + b_0 = 0,$$

випливає, що $b_j = 0$ для кожного $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ і відповідно $\lambda = 0$.

Нехай без обмеження загальності $b_n > 0$ і $l =$ НСД$(b_0, b_1, ..., b_n)$, тоді $b_j = lc_j$ для кожного $j \in \{0, 1, ..., n\}$, де $c_j \in Z$ НСД$(c_0, c_1, ..., c_n) = 1$, причому

$$c_n\alpha^n + ... + c_1\alpha + c_0 = 0,$$

оскільки мінімальний многочлен єдиний, то $a_j = c_j$ для кожного $j \in \{0, 1, ..., n\}$ і відповідно $b_j = \lambda a_j$, де $\lambda = l$. □

Лема 5. *Нехай α — ірраціональне алгебраїчне число степеня n з мінімальним многочленом*

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0,$$

тоді $1-\alpha$ є алгебраїчним числом степеня n з мінімальним многочленом

$$\frac{f(1-x)}{\lambda},$$

де λ — деяке ціле число.

Доведення. Зрозуміло, що $1-\alpha$ є нулем многочлена $g(x) = f(1-x)$ степеня n. Отже, $1-\alpha$ — алгебраїчне число степеня $k \le n$.

Нехай $\varphi(x) = b_kx^k + b_{k-1}x^{k-1} + ... + b_0$ — мінімальний многочлен числа $1-\alpha$. Оскільки $1-\alpha \notin Q$, то за лемою 3: $\varphi(-1) \neq 0$ і відповідно $\sum_{j=0}^{k}(-1)^j b_j \neq 0$.

Якщо $k < n$, то для многочлена $\psi(x) = \varphi(1-x)$ виконується рівність:

$$0 = \varphi(1-\alpha) = \psi(\alpha),$$

причому степінь многочлена $\psi(x)$ рівний $k < n$. Маємо суперечність з тим, що степінь числа α рівна n.

Отже, $k = n$. Оскільки $\psi(\alpha) = 0$, то за лемою 4 існує ціле число λ таке, що

$$\psi(x) = \lambda\varphi(x),$$

звідки

$$\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{\lambda} = \frac{f(1-x)}{\lambda}.$$

□

Теорема 2. *Нехай $i \in \{0, 1\}$, $q_i \in (0; 1)$ — ірраціональне алгебраїчне число степеня n з мінімальним многочленом (2), причому існує просте число p, таке що число $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j$ кратне p, а a_n — ні. Тоді число $\frac{1}{p}$ має Q_2-зображення, що не містить періоду.*

Доведення. Нехай $j' = 1-j$, тоді $q_{j'} = q_{1-j} = 1-g_j$. За лемою 5 існує число $0 \neq \lambda \in Z$, таке, що $\frac{f(1-x)}{\lambda}$ — мінімальний многочлен числа $q_{j'}$. Позначимо

$$\frac{f(1-x)}{\lambda} = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0,$$

тоді $a_n = (-1)^n \lambda b_n$ і $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j = \lambda b_0$. Оскільки число $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j$ кратне p, то $\lambda \vdots p$ або $b_0 \vdots p$. Якщо $\lambda \vdots p$, то $a_n \vdots p$ маємо суперечність, тому b_0 кратне p, а λ і b_n — ні. Враховуючи теорему 1 по відношенню до числа $q_{j'}$ отримаємо потрібне. □

2. Q_2-зображення раціональних чисел інтервалу $(0; 1)$ для трансцендентного $q_0 \in (0; 1)$

Означення **3.** Число α a_n називається трансцендентним, якщо воно не є алгебраїчним, тобто для довільних цілих a_{n-1},...,a_0 ($\sum\limits_{j=0}^{n} a_j^2 \neq 0$) чисел виконується умова

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_0 \neq 0.$$

Теорія трансцендентних чисел має свою глибоку історію, відзначимо, що трансцендентність відомих чисел e і π вперше було доведено в 1873 році Ш. Ермітом і в 1882 році Ф. Ліндеманом відповідно.

Лема 6. *Нехай α — трансцендентне число і α a_n, a_{n-1},...,a_0, b_k, b_{k-1},...,b_0 ($a_n^2 + b_k^2 \neq 0$) — цілі числа, такі що*

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_0 = b_k\alpha^k + b_{k-1}\alpha^{k-1} + ... + b_0,$$

тоді $n = k$ і $a_j = b_j$ для кожного $j \in \{0, 1, ..., n\}$.

Доведення. Нехай $n \neq k$. Без обмеження загальності будем вважати, що $n > k$, тоді з рівності (**??**) маємо:

$$c_n\alpha^n + c_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + c_0 = 0,$$

де $c_j = a_j \in Z$ для кожного $j \in \{k+1, ..., n\}$ і $c_j = a_j - b_j \in Z$ для кожного $j \in \{0, ..., k\}$. Маємо суперечність з тим, що α — трансцендентне число.

Отже, $n = k$. Маємо

$$(a_n - b_n)\alpha^n + (a_{n-1} - b_{n-1})\alpha^{n-1} + ... + (a_0 - b_0) = 0,$$

що можливо лише коли

$$\sum_{j=0}^{n} (a_j - b_j)^2 = 0,$$

звідки $a_i = b_i$ для кожного $i \in \{0, 1, ..., n\}$. □

Теорема 3. *Нехай $q_0 \in (0;1)$ — трансцендентне число, тоді кожне раціональне число $r \in (0;1)$ має Q_2-зображення, що не містить періоду.*

Доведення. Нехай $r = \frac{m}{l}$, де $m, l \in N$. Припустимо, що число $\frac{m}{l}$ має Q_2-зображення, що містить період, тобто

$$\frac{m}{l} = \Delta^Q_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k(\beta_1\beta_2...\beta_m)},$$

тоді

$$\frac{m}{l} = \gamma_{\alpha_1} + \gamma_{\alpha_2}q_{\alpha_1} + ... + \gamma_{\alpha_k}q_{\alpha_1}...q_{\alpha_{k-1}} + q\alpha_1...q_{\alpha_k}\frac{\gamma_{\beta_1} + \gamma_{\beta_2}q_{\beta_1} + ... + \gamma_{\beta_m}q_{\beta_1}...q_{\beta_{m-1}}}{1 - q_{\beta_1...q_{\beta_{m-1}}}},$$

де $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = q_0$.

Розглянемо 2 випадки:

1) $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_m = 0$, тоді маємо:

$$\frac{m}{k} = \gamma_{\alpha_1} + \gamma_{\alpha_2}q_{\alpha_1} + ... + \gamma_{\alpha_k}q_{\alpha_1}...q_{\alpha_{k-1}}.$$

Оскільки $q_1 = 1 - q_0$, то зрозуміло, що для кожного $j \in \{1, ..., k\}$ вираз $\gamma_{\alpha_j}q_{\alpha_1}...q_{\alpha_{j-1}}$ (вважатимемо $q_{\alpha_0} = 1$) є многочленом q_0 з нульовим вільним членом, тому за лемою 6 $\frac{m}{l} = 0$, маємо суперечність.

2) Нехай $\sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j^2 \neq 0$ $\sum\limits_{j=1}^{m} (\beta_j - 1)^2 \neq 0$.

Маємо:

$$\frac{m(1 - q_{\beta_1}q_{\beta_2}...q_{\beta_m})}{l} = (1 - q_{\beta_1}q_{\beta_2}...q_{\beta_m})\sum_{j=1}^{k}\gamma_{\alpha_1}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}...q_{\alpha j-1} + +q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}...q_{\alpha k}\sum_{j=1}^{m}\gamma_{\beta_1}q_{\beta_1}q_{\beta_2}...q_{\beta_j}.$$

Вираз

$$\frac{m(1 - q_{\beta_1}q_{\beta_2}...q_{\beta_m})}{l}$$

є многочленом відносно q_0 з вільним членом рівним $\frac{m}{l}$.

Вираз

$$(1 - q_{\beta_1}q_{\beta_2}...q_{\beta_m})\sum_{j=1}^{k}\gamma_{\alpha_1}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}...q_{\alpha j-1} + +q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}...q_{\alpha k}\sum_{j=1}^{m}\gamma_{\beta_1}q_{\beta_1}q_{\beta_2}...q_{\beta_j}$$

є многочленом відносно q_0 з вільним членом рівним 0. Враховуючи лему 6, що $\frac{m}{l} = 0$, суперечність. □

Література

[1] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Singular probability distributions and fractals properties of sets of real numbers defined by the asymptotic frequencies of their s-adic digits // Ukrainian Math. J. – 2005. – 57, № **9**. – P. 1361 – 1370.

[2] *Besicovitch A.S.* Sets of fractional dimension. 2: On th sum of digits of real numbers represented in the dyadic system // Math. Ann. — 1934. — 110, № 3. — p. 321–330.

[3] *Працевитый Н.В.* Случайные величины с независимыми Q_2-символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. – Киев: Ин-т математики УН СССР, 1987. – С. 92 – 102.

[4] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 208 с.

[5] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — К.: Видавництво НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

[6] *Працьовитий М.В.* Ніде не монотонні сингулярні функції // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2011. — №12. — С. 24 - 36.

[7] *Працьовитий М.В., Калашніков А.В.* Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q-зображенням чисел. // Укр. мат. журнал. — 2013. — Т.65, №3. — С. 381 - 393.