Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2015, № 17. — С. 53–59.

УДК 517.518

Циліндрична похідна і сингулярність неперервних функцій

Осауленко Р.Ю.
Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Анотація. При доведенні сингулярності функції використовують нормальну властивість чисел з множини на якій задано функцію. Під нормальною властивістю зазвичай розуміють ту властивість, якою володіють (у розумінні міри Лебега) майже всі числа з множини задання функції. Доволі часто в якості такої властивості обирають властивість пов'язану з частотами цифр, адже вона дозволяє для майже всіх чисел з області задання функції оцінити відповідний кутовий приріст, як інструмент такої оцінки ми використовуємо одне узагальнення похідної.

Ключові слова: похідна, нормальна властивість, сингулярна функція, циліндр n-го рангу.

Abstract. A property P of numbers $x \in [0, 1]$ is called normal if Lebesgue almost all numbers x have this property. The normal property of the set of arguments of some function f are using on proofing the singularity of f. We are using generalization of derivative to appreciate the derivative of a function at some points.

Keywords: derivative, normal property, singular function, cylinder of nth rank.

1. Означення v-похідної і її зв'язок з класичною похідною

Позначимо через $\mathcal{P}$ множину всіх дійсних нескінченно малих в нулі функцій $\mathsf{v}(x)$ таких, що для кожного її представника виконуються умови:

- $\mathsf{v}_j(x)$ – функція, яка визначена в кожній точці деякого околу нуля, тобто де $D_{\mathsf{v}_j(x)} \supset [-\varepsilon_j; \varepsilon_j]$, $\varepsilon_j > 0$;
- рівність $\mathsf{v}_j(x) = -x$ виконується лише в не більш ніж скінченній множині точок, тобто $\mathsf{v}_j(x_{j,i}) = -x_{j,i}$, $i \in \{1, 2, \dots m_j\}$.

Прикладами функцій, які належать $\mathcal{P}$, є: $|x|^s$, де $s \in (0; \infty)$; $ax\mathtt{Sign}\left(\sin \frac{1}{x}\right)$, де $\mathbb{R} \ni |a| \neq 1$; $[x^{-1}]^{-1}$; $x\mathcal{D}(x)$, де $\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

Нехай $\Delta^{\mathsf{v}}_{\Delta x} x := \Delta x + \mathsf{v}(\Delta x)$. Вираз $\Delta^{\mathsf{v}}_{\Delta x} f(x_0) := f(x_0 + \Delta x) - f\Big(x_0 - \mathsf{v}(\Delta x)\Big)$ – v-*приростом функції* $f(x)$ *в точці* x_0. Далі в статті, для економії місця, замість $\Delta^{\mathsf{v}}_{\Delta x} f(x_0)$ і $\Delta^{\mathsf{v}}_{\Delta x} x$, де це можливо, будемо відповідно писати $\Delta^{\mathsf{v}} f(x_0)$ і $\Delta^{\mathsf{v}} x$.

Якщо для наперед заданих в деякому околі x_0 функції $f(x)$ та функції $\mathsf{v}(x) \in \mathcal{P}$ існує границя (скінченна чи нескінченна)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f\Big(x_0 - \mathsf{v}(\Delta x)\Big)}{\Delta x + \mathsf{v}(\Delta x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^{\mathsf{v}} f(x_0)}{\Delta^{\mathsf{v}} x}, \tag{1}$$

то її значення будемо називати v-*похідною функції* f *в точці* x_0 і позначатимемо через $\mathfrak{D}^{\mathsf{v}} f(x_0)$. У випадку, коли $\mathsf{v}(x) = 0$, маємо класичне означення похідної, а при $\mathsf{v}(x) = x$ отримуємо означення симетричної похідної.

Розглянемо функції $f(x) = |x|^{-1}$ і $\mathcal{P}^+ \ni \mathsf{v}(x) = x$. В точці 0 функція f не визначена і $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$, хоча $\mathfrak{D}^x f(0) = 0$.

Далі в наступних доведеннях замість $\mathsf{v}(\Delta x)$ будемо писати v.

Лема 1. *Нехай задано многочлен* $P_k(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n$. *Тоді для всіх* $\mathsf{v} \in \mathcal{P}$ *виконується рівність* $\mathfrak{D}^{\mathsf{v}} P_k(x_0) = P_k'(x_0)$.

Доведення. Згідно з означенням v- похідної маємо

$$\frac{P_k(x_0 + \Delta x) - P_k(x_0 - \mathsf{v})}{\Delta x + \mathsf{v}} = \sum_{n=0}^{k} \frac{a_n\Big((x_0 + \Delta x)^n - (x_0 - \mathsf{v})^n\Big)}{\Delta x + \mathsf{v}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{k} \left(a_n \sum_{j=0}^{n-1} (x + \Delta x)^{n-1-j} (x_0 - \mathsf{v})^j\right) \Rightarrow \mathfrak{D}^{\mathsf{v}} f(x_0) = \sum_{n=0}^{k} n a_n x_0^{n-1}.$$

□

Теорема 1. *Нехай в околі точки* x_0 *функцію* f *можна представити рядом Тейлора виду* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, *тоді рівність* $\mathfrak{D}^{\mathsf{v}} f(x_0) = f'(x_0)$ *справедлива для всіх* $\mathsf{v} \in \mathcal{P}$.

Наслідок 1. *Нехай в околі точки* x_0 *функцію* f *можна представити рядом Тейлора виду* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, *тоді*

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ v \to 0 \\ u \neq -v}} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 - v)}{u + v} = f'(x_0). \tag{2}$$

Розглянемо приклад, коли $f'(x_0)$ та $\mathfrak{D}^{\mathsf{v}} f(x_0)$ існують одночасно, але не рівні між собою. Нехай $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ x^3 - 1 & x < 0; \end{cases}$ і $\mathsf{v}(x)$ обрано таким чином, щоб $\mathsf{v}(x) x < 0$, тоді $f'(0) = +\infty$, а $\mathfrak{D}^{\mathsf{v}} f(0) = 0$.

Позначимо множини $\mathcal{P}^* = \left\{\mathsf{v} \in \mathcal{P} : \overline{\lim\limits_{\Delta x \to 0}} \left|\frac{\mathsf{v}(x)}{x + \mathsf{v}(x)}\right| < \infty\right\}$ і $\mathcal{P}^+ = \{\mathsf{v} \in \mathcal{P} : x\mathsf{v}(x) \geq 0\}$. Легко показати, що $\mathcal{P}^+ \subset \mathcal{P}^*$.

Теорема 2. *Нехай* f *- функція задана в околі точки* x_0 *і* $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, *тоді для довільної* $\mathsf{v} \in \mathcal{P}^*$ *виконується рівність* $\mathfrak{D}^{\mathsf{v}} f(x_0) = f'(x_0)$.

Доведення. Нехай $f'(x_0) = c \in \mathbb{R}$, тоді

$$\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} = c + \alpha(t),\ \lim_{t\to 0}\alpha(t) = 0 \Rightarrow$$

$$f(x_0+t) = f(x_0) + \big(c+\alpha(t)\big)t. \tag{3}$$

Тоді враховуючи (3) маємо

$$\Delta^{\mathsf{v}}_{\Delta x} f(x_0) = f(x_0) + \big(c+\alpha(\Delta x)\big)\Delta x - \Big(f(x_0) - \big(c+\alpha(-\mathsf{v})\big)\mathsf{v}\Big) =$$

$$= c\,(\Delta x + \mathsf{v}) + \alpha(\Delta x)\Delta x + \alpha(-\mathsf{v})\mathsf{v}.$$

Перетворимо вираз

$$\frac{\alpha(\Delta x)\Delta x + \alpha(-\mathsf{v})\mathsf{v}}{\Delta x + \mathsf{v}} = \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x + \alpha(-\mathsf{v})\mathsf{v} + \alpha(-\mathsf{v})\Delta x - \alpha(-\mathsf{v})\Delta x}{\Delta x + \mathsf{v}} =$$

$$= \frac{\Delta x}{\Delta x + \mathsf{v}}\Big(\alpha(\Delta x) - \alpha(-\mathsf{v})\Big) + \alpha(-\mathsf{v}).$$

тоді

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)\Delta x + \alpha(-\mathsf{v})\mathsf{v}}{\Delta x + \mathsf{v}} = 0.$$

Отже,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta^{\mathsf{v}}_{\Delta x} f(x_0)}{\Delta^{\mathsf{v}}_{\Delta x} x} = c = f'(x_0).$$

□

Теорема 3. *Нехай f - функція задана в околі точки x_0 і $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, або $f'(x_0) = +\infty$, або $f'(x_0) = -\infty$ тоді для довільної $\mathsf{v} \in \mathcal{P}^+$ виконується рівність $\mathfrak{D}^{\mathsf{v}} f(x_0) = f'(x_0)$.*

Доведення. Враховуючи те, що $\mathcal{P}^+ \subset \mathcal{P}^*$, то у випадку, коли $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ умови задовольняють теорему 2, а отже, $\mathfrak{D}^{\mathsf{v}} f(x_0) = f'(x_0)$.

Нехай $f'(x) = +\infty$, або $f'(x) = -\infty$ тоді

$$\frac{\Delta^{\mathsf{v}}_{\Delta x} f(x_0)}{\Delta^{\mathsf{v}}_{\Delta x} x} = \frac{\Delta x}{\Delta x + \mathsf{v}} \cdot \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \frac{\mathsf{v}}{\Delta x + \mathsf{v}} \cdot \frac{f(x_0-\mathsf{v}) - f(x_0)}{-\mathsf{v}}. \tag{4}$$

Враховуючи те, що величини $\frac{\Delta x}{\Delta x+\mathsf{v}}$ і $\frac{\mathsf{v}}{\Delta x+\mathsf{v}}$ є невід'ємними, а також $\frac{\Delta x}{\Delta x+\mathsf{v}} + \frac{\mathsf{v}}{\Delta x+\mathsf{v}} = 1$ маємо

$$\lim_{\Delta x\to \infty}\frac{\Delta^{\mathsf{v}}_{\Delta x} f(x_0)}{\Delta^{\mathsf{v}}_{\Delta x} x} = f'(x_0). \tag{5}$$

□

Наслідок 2. *Нехай f - функція задана в околі точки x_0 і для $\mathsf{v} \in \mathcal{P}^+$ маємо $\mathfrak{D}^{\mathsf{v}} f(x_0) = +\infty$ або $\mathfrak{D}^{\mathsf{v}} f(x_0) = -\infty$, тоді функція f – недиференційовна в точці x_0.*

Наслідок 3. *Нехай f - функція задана в околі точки x_0 і для $\mathsf{v} \in \mathcal{P}^+$ не існує $\mathfrak{D}^{\mathsf{v}} f(x_0)$, тоді не існує $f'(x_0)$.*

Наслідок 4. *Нехай в околі точки x_0 задано функцію f та послідовності дійсних чисел (l_n) та (r_n) такі, що $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} r_n$, і $l_j \le x_0 \le r_j$, $l_j \ne r_j$ при $j \in \mathbb{N}$. Тоді*

- *якщо $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ або $f'(x_0) = \pm\infty$, то вона рівна $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(r_n)-f(l_n)}{r_n-l_n}$.*
- *якщо не існує $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(r_n)-f(l_n)}{r_n-l_n}$, то в точці x_0 не існує похідної.*

Доведення. Згідно з теоремою 3 ми маємо, що якщо $f'(x_0)$ існує, тоді для довільної нескінченно малої послідовності h_n виконується рівність

$$f'(x_0) = \mathfrak{D}^{\mathsf{v}} f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(x_0 + h_n\right) - f\Big(x_0 - \mathsf{v}\left(h_n\right)\Big)}{h_n + \mathsf{v}\left(h_n\right)}, \mathsf{v}(x) \in \mathcal{P}^{+}. \tag{6}$$

Обравши $h_n = (r_n - x_0)$ та функцію $\mathsf{v}(x) \in \mathcal{P}^+$, таку, щоб $\mathsf{v}\left(h_n\right) = (x_0 - l_n)$ отримуємо твердження яке потрібно було довести.

Припустимо, що не існує границі $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(r_n)-f(l_n)}{r_n-l_n}$, але існує $f'(x)$. Хоча згідно з раніше описаного має існувати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(r_n)-f(l_n)}{r_n-l_n}$, а отже припущення, що існує $f'(x)$ – не правильне. □

Зазвичай, коли для задання функції f використовується певне зображення аргументу, то для оцінки значення похідної в точці використовують циліндричну похідну, тобто границю відношення приросту функції на кінцях циліндру n-го рангу до довжини цього циліндру, який містить точку x_0, спрямувавши n до нескінченності. Очевидно, що циліндрична похідна задовільняє наслідок 4.

2. Функція Салема

В цьому розділі ми будемо розглядати функцію Салема використовуючи двійкове та Q_2 зображення. Більш детально про ці зображення читач може ознайомитися в [2, 1].

Нехай q_0 – фіксоване дійсне число з інтервалу $(0;1)$, $q_1 = 1 - q_0$, $\beta_0 = 0$, $\beta_0 = q_0$, $A = \{0;1\}$ – алфавіт.

Теорема 4. *Для довільного $x \in [0;1]$ існує така послідовність (α_n), $\alpha_n \in A$*

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta_k \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right).$$

Подання числа x рядом (4) називається Q_2-представленням числа, а його формальний запис $x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ – Q_2-зображенням. Зліченна множина точок відрізку $[0;1]$ має по два зображення. Відрізок $\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} := \left[\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}; \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)}\right]$ – є циліндром n-го рангу, його довжину позначатимемо так $\left|\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right|$.

Для Q_2-зображення числа основне метричне відношення має вигляд

$$\frac{\left|\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n c}\right|}{\left|\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right|} = q_c, \ c \in A. \tag{7}$$

Якщо $q_0 = \frac{1}{2}$, тоді ми отримаємо двійкове зображення числа з відрізку $[0;1]$.

Для задання функції Салема використаємо двійкове та Q_2-зображення числа при $q_0 \neq q_1$.

$$S(x = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}. \tag{8}$$

Лема 2. *Нехай (a_n) і (b_n) – нескінченна послідовність дійсних чисел таких, що $|a_n| \leq a < 1$, $|b_n| > b > 1$. Тоді для довільного $t = \Delta^2_{c_1c_2\ldots c_n\ldots} \in [0;1]$ нескінчений добуток $\prod\limits_{j=1}^{\infty} \mu_j$ може або не існувати, або бути рівним нулю чи нескінченності, де*
$$\mu_j = \begin{cases} a_j & \text{при } c_j = 0; \\ b_j & \text{при } c_j = 1. \end{cases}$$

Доведення. Нескладно показати, що в залежності від значення t, добуток $\prod\limits_{j=1}^{\infty} \mu_j$ може бути рівним 0 або $\pm\infty$ або взагалі не існувати.

Методом від супротивного покажемо, що не існує такого $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, щоб $\prod\limits_{j=1}^{\infty} \mu_j = c$. Припустимо, що таке c – існує, але тоді згідно з необхідною умовою збіжності нескінчених добутків послідовності (a_n) та (b_n) мають прямувати до 1, але це суперечить умові леми, а отже такого числа не існує. □

Покажемо сингулярність функції Салема.

З інтервалу $(0;1)$ оберемо довільну точку $x = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, яка має єдине двійкове представлення (множина всіх таких точок має повну міру).

Побудуємо послідовності

$$l_n = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)},\ r_n = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)},$$

тоді різниця $r_n - l_n = \left|\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right| = \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-n}$.

Тоді

$$S(l_n) = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)},\ S(r_n) = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(1)},$$

$$S(r_n) - S(l_n) = \left|\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right|.$$

Тоді

$$J_n(x) = \frac{S(r_n) - S(l_n)}{r_n - l_n} = \frac{\left|\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right|}{\left|\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right|}.$$

Позначимо через $\mu_j = \begin{cases} 2q_0 & \text{при } \alpha_j = 0; \\ 2q_1 & \text{при } \alpha_j = 1. \end{cases}$

Враховуючи основне метричне відношення для Q_2-зображення маємо

$$\phi_n = \frac{J_n(x)}{J_{n-1}(x)} = \frac{\left|\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right|}{\left|\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right|} : \frac{\left|\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}\right|}{\left|\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}\right|} = \frac{\left|\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right|}{\left|\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}\right|} : \frac{\left|\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right|}{\left|\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}\right|} = 2q_{\alpha_n}, \tag{9}$$

$$J_n(x) = J_{n-1}(x)\cdot\phi_n = J_{n-1}(x)\cdot 2q_{\alpha_n} = \prod_{j=1}^{n} 2q_{\alpha_j}. \qquad (10)$$

Очевидно, що згідно з побудовою функції, $2q_{\alpha_j}$ або строго більше 1 або строго її менше і набуває лише двох можливих значень, тоді згідно з лемою 2 маємо, що

$$\lim_{n\to\infty} J_n(x) = \lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n} 2q_{\alpha_j} = \left[\begin{array}{l} 0, \\ \infty, \\ \nexists. \end{array}\right.$$

Враховуючи те, що функція Салема є функцією обмеженої варіації, а тому вона має скінченну похідну майже скрізь і враховуючи наслідок 4 маємо, що для майже всіх значень аргументу виконується рівність

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{S(r_n)-S(l_n)}{r_n-l_n} = \lim_{n\to\infty} J_n(x) = \left[\begin{array}{l} 0, \\ \infty, \\ \nexists. \end{array}\right.$$

З останьої рівності маємо, що тільки одне значення є скінченним – 0, отже функція Салема є сингулярною.

3. Функція Мінковського

Задамо функцію Міковського на $[0;1]$ використовуючи представлення аргументу елементарними лангцюговими дробами

$$?\big(x = [0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]\big) = \sum_{j=1}^{\infty}\Big((-1)^{j-1}2^{1-a_1-a_2-\cdots-a_j}\Big). \qquad (11)$$

Оберемо довільне ірраціональне $x \in [0;1]\backslash\mathbb{Q}$, і побудуємо дві послідовності $l_n = [0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$ та $r_n = [0, a_1, a_2, \ldots, a_n + 1]$. Обчислимо значення різниці $(r_n - l_n)$

$$\frac{P_{n-1}(a_n+1)+P_{n-2}}{Q_{n-1}(a_n+1)+Q_{n-2}} - \frac{P_{n-1}a_n+P_{n-2}}{Q_{n-1}a_n+Q_{n-2}} =$$

$$= \frac{P_{n-2}Q_{n-1}-P_{n-1}Q_{n-2}}{Q_n^2+Q_nQ_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_n^2+Q_nQ_{n-1}}.$$

Відповідно

$$?(r_n) - ?(l_n) = (-1)^{n-1}2^{-\sum_{j=1}^{n} a_j}. \qquad (12)$$

Тоді

$$J_n(x) = \frac{?(r_n)-?(l_n)}{r_n-l_n} = 2^{-\sum_{j=1}^{n} a_j}\left(Q_n^2+Q_nQ_{n-1}\right). \qquad (13)$$

Розглянемо відношення

$$\phi_n = \frac{J_n(x)}{J_{n-1}(x)} = 2^{-a_n}\left(a_n+\tau\right)\left(1+\frac{a_n}{1+\tau}\right),$$

де $\tau = \frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}}$ і $\tau \in [0;1]$, $J_0(x) = 1$, тоді

$$J_n(x) = \prod_{j=1}^{n} \phi_n. \tag{14}$$

Величину ϕ_n можна розглянути, як функцію від τ. Оцінимо значення $\phi_n(\tau)$ при цілих a_n і $\tau \in [0;1]$, результат представимо у вигляді таблиці:

a_n	1	2	3	4	≥ 5
$\phi_n(\tau)$	≥ 1	$\geq \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2$	$\left[\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right]$	$\left[\frac{15}{16};\frac{5}{4}\right]$	$\leq \frac{15}{16}$

Нехай B - множина всіх дійсних чисел з відрізку $[0;1]$, в зображенні яких ланцюговим дробом починаючи з деякого місця n_0 всі цифри зображення є виключно 1 та 4. Тоді для кожного $x \in B$ величина ϕ_n, враховуючи оцінки вище, може прямувати до 1, а отже, нескінченний добуток $\prod_{j=1}^{\infty} \phi_n$ може мати скінченне значення відмінне від нуля. Враховуючи теорему 4.2.1 [2]: "Множина всіх чисел відрізку $[0;1]$ з обмеженими елементами ланцюгового представлення має міру Лебега нуль"отримуємо„ що міра множини B є також нульовою.

А раз так, то

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \phi_n = \left[\begin{array}{l} 0; \\ \infty; \\ \nexists. \end{array}\right.$$

Для того, щоб добуток $\prod_{j=1}^{\infty} \phi_n$ був скінченним і відмінним від нуля необхідно, щоб $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n = 1$, а це не виконується для майже всіх чисел з відрізку $[0;1]$.

Враховуючи те, що функція Мінковського є функцією обмеженої варіації і наслідок 4 маємо, що її похідна майже скрізь рівна $\lim\limits_{n\to\infty} J_n$, а оскільки остання границя має лише одне скінченне значення, то маємо, що $?'(x) = 0$ майже скрізь.

Література

[1] *Працьовитий М. В., Замрій І.В.* Інверсор цифр Q^3-зображення дробової частини дійсного числа як розв'язок системи трьох функціональних рівнянь // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1 : Фізико-математичні науки : зб. наук. праць.– Київ : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2013. – Вип. 15. – С. 156-167.

[2] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів – Київ: Вид-во НПУ ім. М.П.Драгоманова, – 1998. – 296с.

[3] *Працьовитий М. В.* Ніде не монотонні сингулярні функції // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, – 2011. – № **12**. – С. 24-36.