Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2015, № 17. — С. 77–82.

УДК 519.21

Розподіл значень однієї функції, аргумент якої є випадковою величиною з незалежними цифрами Q_s-зображення

Шевченко А.В.
Чернігівський національний педагогічний університет імені Т.Г. Шевченка

Анотація. У роботі вивчається розподіл значень майже скрізь (у розумінні міри Лебега) неперервної функції з нетривіальними локальними властивостями: зліченною всюди щільною множиною розривів, самоафінним графіком тощо, аргументом якої є випадкова величина, цифри Q_s-зображення (узагальнення s-кового розкладу) якої є незалежними випадковими величинами з наперед заданими розподілами. Встановлюється його лебегівська структура (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент), описуються тополого-метричні і фрактальні властивості спектра (мінімального замкненого носія), вивчаються інші властивості.

Ключові слова: Сингулярно неперервний розподіл, лебегівська структура розподілу, сингулярний розподіл канторівського типу, сингулярний розподіл салемівського типу, точковий спектр розподілу, спектр розподілу, Q_s-зображення дійсного числа

Abstract. In the paper, we consider almost everywhere with respect to Lebesgue measure continuous function with nontrivial local properties: countable everywhere dense set of discontinuities, self-affine graph, etc. We study the distribution of values of this function if its argument is a random variable whose digits of Q_s-representation (generalization of s-adic expansion) are independent random variables with a given probability distribution. Lebesgue structure of this probability distribution (i.e., content of discrete, absolutely continuous, and singular components), topological, metric, and fractal properties of spectrum (minimal closed support) as well as other properties are described.

Keywords: Singularly continuous probability distribution, Lebesgue structure of a probability distribution, singular probability distribution of Cantor type, singular probability distribution of Salem type, point spectrum of probability distribution, spectrum of probability distribution, Q_s-representation of a real number.

1. Вступ

Переважна більшість (принаймні в топологічному сенсі, див. теорему Замфіреску [1]) розподілів ймовірностей на $[0, 1]$ має нетривіальну лебегівську структуру і складні локальні властивості [5]. Навіть у випадку неперервності їх функції розподілу вони мають континуальну, іноді всюди щільну, множину особливостей диференціального характеру [2]. До таких, зокрема, відносяться сингулярні розподіли випадкових величин, які зосереджені на множинах нульової міри Лебега, а отже, потенційно володіють фрактальними властивостями [5]. Саме вони є основним об'єктом нашого інтересу.

Нагадаємо [5], що лебегівською структурою ймовірнісної міри μ на $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B})$ аналогічно функції розподілу F_ξ випадкової величини ξ називається її розклад в лінійну комбінацію

$$\mu = \alpha_1\mu_d + \alpha_2\mu_{a.c.} + \alpha_3\mu_s, \tag{1}$$

$$F_\xi = \alpha_1 F_d + \alpha_2 F_{a.c.} + \alpha_3 F_s, \tag{2}$$

де $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелівських множин, μ_d, $\mu_{a.c.}$, μ_s — ймовірнісні міри, F_d, $F_{a.c.}$, F_s — функції розподілу, причому

(1) для μ_d існує скінченна або зліченна множина D така, що $\mu_d(D) = 1$;
(2) $\mu_{a.c.}(E) = 0$, якщо міра Лебега $\lambda(E) = 0$;
(3) існує E: $\lambda(E) = 0$ і $\mu_s(E) = 1$, але $\mu_s(D) = 0$, якщо D — скінченна або зліченна;
(4) F_d — функція, що росте виключно стрибками (функція стрибків);
(5) $F_{a.c.}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} F'(t)dt$;
(6) F_s — неперервна, але $F'_s(x) = 0$ майже скрізь у розумінні міри Лебега.

Якщо одне з чисел α_1, α_2, α_3 дорівнює 1, а решта — 0, то кажуть, що міра μ і функція F розподілу мають чистий лебегівський тип.

Якщо $\alpha_1 = 1$ (а отже, відповідно $\alpha_2 = 0 = \alpha_3$), то ймовірнісна міра відповідно функція розподілу (розподіл) називається чисто дискретною.

Якщо $\alpha_2 = 1$ (а отже, $\alpha_1 = 0 = \alpha_3$), то μ і F_ξ називаються чисто абсолютно неперервними.

Якщо $\alpha_3 = 1$ (а отже, $\alpha_1 = 0 = \alpha_2$), то μ і F_ξ називаються чисто сингулярними. Якщо $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \neq 1$, то розподіл називають сумішшю розподілів чистих лебегівських типів.

Сингулярні функції розподілу утворюють найменш вивчений підклас сім'ї неперервних функцій, а їх суперпозиції та згортки є ще достатньо загадковим об'єктом для дослідження, як і суміші сингулярних розподілів з іншими.

2. Об'єкт дослідження

2.1. Q_s-зображення. Нехай $1 < s$ — фіксоване натуральне число, $A_s = \{0, 1, \dots, s-1\}$ — алфавіт s-кової системи числення,

$$Q_s = \{q_0, q_1, \dots, q_{s-1}\}$$

— множина додатних дійсних чисел така, що $q_0 + q_1 + \ldots + q_{s-1} = 1$, $\beta_0 = 0$, $\beta_i = q_0 + q_1 + \ldots + q_{i-1} = \beta_{i-1} + q_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Відомо [6,7], що *для будь-якого числа* $x \in [0,1]$ *існує послідовність* (α_n), $\alpha_n \in A_s$, *така, що*

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_k}\prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i}\right) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}. \quad (3)$$

Подання числа x рядом (3) називається його Q_s*-представленням*, а останній символічний (скорочений) запис цього ряду і числа x — Q_s*-зображенням.* При цьому $\alpha_n = \alpha_n(x)$ називається n-ою цифрою (символом) цього зображення.

Період у Q_s-зображенні числа записується у круглих дужках.

Зауважимо, що цифри Q_s-зображення виконують функцію індексів, а не чисел, хоча при $s = 2$, маємо $\beta_{\alpha_k} = \alpha_k q_{1-\alpha_k}$.

Q_s-представлення є узагальненням звичайного s–вого розкладу:

$$[0;1] \ni x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s^n} + \cdots \equiv \Delta^{s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Зауваження 1. *Якщо* $q_0 = q_1 = \ldots = q_{s-1} = \frac{1}{s}$, *то* Q_s*-представлення є класичним* s*-ковим розкладом, а* Q_s*-зображення —* s*-ковим зображенням.*

Поняття n-ої цифри Q_s-зображення є, взагалі кажучи, некоректно означеним, оскільки

$$\Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_m(0)} = \Delta^{Q_s}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}[c_m-1](0)}. \quad (4)$$

Ті числа, що мають два Q_s-зображення, називаються Q_s*-раціональними* (це числа виду (4)). А ті числа, що мають єдине зображення, називаються Q_s*-раціональними.*

Зауважимо, що інваріантною мірою оператора лівостороннього зсуву, означеного рівністю

$$\omega\left(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots} \quad \Leftrightarrow \quad \omega(x) = \frac{1}{q_{\alpha_1(x)}}x - \frac{\beta_{\alpha_1(x)}}{q_{\alpha_1(x)}},$$

є міра Лебега, оскільки для довільного інтервалу $(a;b)$

$$\begin{aligned}\omega^{-1}((a;b)) &= (a_0;b_0) \cup (a_1;b_1) \cup \ldots \cup (a_{s-1};b_{s-1}) = \\ &= \left(\Delta^{Q_s}_{0\alpha_1(a)\ldots\alpha_n(a)\ldots}; \Delta^{Q_s}_{0\alpha_1(b)\ldots\alpha_n(b)\ldots}\right) \cup \ldots \\ &\cup \left(\Delta^{Q_s}_{[s-1]\alpha_1(a)\ldots\alpha_n(a)\ldots}; \Delta^{Q_s}_{[s-1]\alpha_1(b)\ldots\alpha_n(b)\ldots}\right),\end{aligned}$$

а отже,

$$\lambda\left[\omega^{-1}((a;b))\right] = (b-a)[q_0 + q_1 + \ldots + q_{s-1}] = \sum_{i=1}^{s-1}(b_i - a_i).$$

2.2. **Проектор цифр.** Зафіксуємо (задамо) розбиття множини алфавіту A_s:

$$A_s = A_0 \cup A_1, \quad A_0 \neq \varnothing \neq A_1, \quad A_0 \cap A_1 = \varnothing.$$

Розглянемо два Q_s-зображення (Q_s-зображення з $s > 2$, Q_2-зображення з $Q_2 = G_2 = \{g_0, g_1\}$) і функцію f, визначену рівністю

$$f(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots} = b_{a_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(b_{a_k}\prod_{i=1}^{k-1} g_{a_i}\right),$$

де $b_i = ig_{1-i}$, $i \in \{0,1\}$, тобто $b_0 = 0$, $b_1 = g_0\ g_1 = 1 - q_2$;

$$a_n = \varphi(\alpha_n) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_n \in A_0, \\ 1, & \text{якщо } \alpha_n \in A_1. \end{cases}$$

Щоб забезпечити коректність означення функції f, домовимось з двох існуючих Q_s-зображень Q_s-раціональних чисел використовувати для аргумента функції f лише те, що має період (0).

Функція f має наступні властивості:

(1) Областю визначення $D(f)$ функції f є піввідрізок $[0,1)$.

(2) Множиною значень $E(f)$ функції f є піввідрізок $[0,1)$, якщо $0 \in A_0$, і півінтервал $(0,1]$, якщо $0 \in A_1$.

(3) Функція f є неперервною в Q_s-ірраціональних точках і розривною в Q_s-раціональних точках.

(4) Графік Γ_f функції f є самоафінною множиною:

$$\Gamma_f = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_{s-1}, \quad \text{де} \quad \Gamma_i = \psi(\Gamma_f),$$

$$\psi_i\colon \begin{cases} x' = q_i x + \beta_i, \\ y' = g_{\varphi(i)} y + b_{\varphi(i)}, \quad i = \overline{0, s-1}. \end{cases}$$

(5) Якщо

$$C[Q_s, (V_n)] = \{x\colon x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},\ \alpha_n \in V_n,\ n = 1, 2, \ldots\},$$

то $C[Q_s, A_0] \xrightarrow{f} \Delta^{G_2}_{(0)}$, $C[Q_s, A_1] \xrightarrow{f} \Delta^{G_2}_{(1)}$.

(6) Множиною $f^{-1}(y)$ рівня $y = \Delta^{G_2}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ функції f (тобто $f^{-1}(y) = \{x\colon f(x) = y\}$) є множина канторівського типу $C[Q_s, (V_n)]$, де $V_n = \{v\colon \varphi_n(v) = a_n\}$, $n = 1$, $2, \ldots$.

2.3. **Випадкова величина.** Нехай (η_n) — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0, 1, …, $s-1$ з ймовірностями p'_{0n}, p'_{1n}, …, $p'_{[s-1]n}$ відповідно ($p'_{0n} + p'_{1n} + \ldots + p'_{[s-1]n} = 1$), $n = 1, 2, \ldots$. Вона визначає випадкову величину

$$X = \Delta^{Q_s}_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_n\ldots},$$

яка називається *випадковою величиною з незалежними Q_s-символами.* Відомо [5], що випадкова величина X має чистий лебегівський тип розподілу, а саме:

1) дискретний тоді і тільки тоді, коли

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}, \ldots, p_{[s-1]n}\} > 0;$$

2) абсолютно неперервний тоді і тільки тоді, коли

$$L = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{1}\left(1 - \frac{p_{ik}}{q_i}\right)^2 < \infty;$$

3) сингулярний тоді і тільки тоді, коли $M = 0$, а $L = \infty$.

Об'єктом нашого дослідження є розподіл випадкової величини $Y = f(X)$. Ми цікавимося його лебегівською структурою (вмістом дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент), тополого-метричними і фрактальними властивостями спектра (мінімального замкненого носія) тощо.

3. Коректність означення об'єкта дослідження

Лема 1. *Значення Y функції f від аргумента X є випадковою величиною*

$$\Delta^{G_2}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots},$$

цифри τ_n G_2-зображення якої є незалежними випадковими величинами, що мають розподіли

$$P\{\tau_n = i\} = \sum_{j\in A_i} p'_{jn} = p_{in}, \quad i \in \{0,1\}. \tag{5}$$

Доведення. Для обґрунтування коректності випадкової величини Y досить зауважити, що образом циліндра

$$\Delta^{Q_s}_{a_1a_2\ldots a_m} = \{x : \alpha_i(x) = a_i,\ i = \overline{1,m}\}$$

Q_s–зображення при відображенні f є циліндр

$$\Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m} = \{x : x = \Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m a_{m+1}\ldots a_{m+k}\ldots}\}$$

G_2–зображення, де

$$c_i = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha_i \in A_0, \\ 1, \text{ якщо } \alpha_i \in A_1, \quad i = \overline{1,m}; \end{cases}$$

а прообразом G_2–циліндра $\Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m}$ є, взагалі кажучи, об'єднання Q_s–циліндрів:

$$\bigcup_{\alpha_1\in A_{c_1}} \cdots \bigcup_{\alpha_m\in A_{c_m}} \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}.$$

Тоді з незалежності цифр Q_2–зображення випадкової величини X випливає незалежність цифр G_2–зображення випадкової величини Y і рівності (15). □

Зауваження 2. *Випадкова величина Y належить до того ж класу випадкових величин, що й X, але для неї $s = 2$, $Q_2 = G_2 = \{g_0; g_1\}$.*

Теорема 1. *Випадкова величина Y має чистий лебегівський тип розподілу, причому 1) дискретний тоді і тільки тоді, коли*

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0,$$

де $p_{1k} = \sum\limits_{j:j\in A'_k} p_{jk}$, $p_{0k} = 1 - p_{1k}$;

2) абсолютно неперервний тоді і тільки тоді, коли

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{1} \left(1 - \frac{p_{ik}}{g_i}\right)^2 < \infty;$$

3) сингулярний тоді і тільки тоді, коли $M = 0$, а $L = \infty$.

Теорема 1. *Функція розподілу F_Y випадкової величини Y має наступне представлення*

$$F_Y(x) = \delta_{a_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\delta_{a_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{a_j(x)j}\right], \tag{6}$$

де $a_i(x) \in \{0; 1\}, \delta_{0n} = 0, \quad \delta_{1n} = p_{0n}$.

Дві останні теореми випливають з зауваження 2 і відомої з роботи [6] теореми про структури розподілу випадкової величини з незалежними цифрами свого Q_2-зображення

ЛІТЕРАТУРА

(1) Zamfirescu T. Most monotone functions are singular // Amer. Matn. Monthly. — 1981. — Vol. 88, N 1. — P. 47–49. — doi: 10.2307/2320713.

(2) Турбин А. Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. – К.: Наукова думка, 1992. – 208 с.

(3) Pratsiovytyi M., Vasylenko N. Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation // Int. Journal of Math. Analysis. – 2013. –no. 64. – P. 3155–3168.

(4) Працьовитий М.В., Василенко Н.А. Розподіли ймовірностей на графіках одного класу ніде не диференційовних функцій //Труды ИПММ НАН Украины. – 2013. Т. 26, С. 159-171.

(5) Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

(6) Працевитый Н. В. Распределения случайных величин с независимыми Q–символами // Асимптотические и прикладные задачи случайных эволюций. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. — С. 92–101.

(7) Працевитый Н.В. Случайные величины с независимыми Q_2–символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. — Киев: Ин–т математики АН УССР, 1987. — С. 92–102.