МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени А.М.ГОРЬКОГО

М.И. ЖАЛДАК

О ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО И КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕПРЕРЫВНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

автореферат

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор С.И.Зуховицкий

Киев - 1965

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ имени А.М.ГОРЬКОГО

М.И. ЖАЛДАК

О ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО И КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕПРЕРЫВНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор С.И.Зуховицкий

Киев - 1965

Диссертация посвящена построению численных схем алгорифмов для приближенного решения задач:

1/ отыскания

$$\min_{\xi\in\Omega}\max_{t\in Q}|\delta(t,\xi)| \equiv \min_{\xi\in\Omega}\max_{t\in Q}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\varphi_k(t)-f(t)\right|, \quad (1)$$

где Ω – либо все n-мерное пространство, либо выпуклое множество, определяемое условиями

$$h_i(q,\xi) \equiv \sum_{k=1}^{n}\xi_k\varphi_{ki}(q)+b_i(q)\geqslant 0, \quad (q\in Q_i;\ i=1,\dots,p) \quad (2)$$

$f(t)$, $\varphi_k(t)$, $\varphi_{ki}(q)$, $b_i(q)$ $(k=1,\dots,n;\ i=1,\dots,p)$ — заданные действительные непрерывные функции, Q, Q_i $(i=1,\dots,p)$ — заданные компакты /задача чебышевского приближения непрерывной функции полиномом при наличии ограничений на коэффициенты/.

2/ отыскания

$$\min_{\xi\in\Omega} \mathcal{L}(\xi) = \min_{\xi\in\Omega}\sum_{k=1}^{n} p_k\xi_k \quad , \quad (3)$$

где p_k – заданные числа, а Ω определяется условиями /2/ /задача линейного программирования с непрерывно заданными ограничениями/;

3/ отыскания

$$\min_{\xi\in\Omega} f(\xi) = \min_{\xi\in\Omega}\left\{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k+\sum_{i=1}^{n} b_i\xi_i + C\right\}, \quad (4)$$

где Ω – выпуклое множество, определяемое условиями /2/, $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k$ — положительно определенная квадратичная форма, a_{ik}, b_i, c заданные числа /задача квадратичного программирования с непрерывно заданными ограничениями/.

Каждая точка $t \in Q$, $q \in Q_i$ определяет некоторую гиперплоскость

$$\delta(t,\xi) \equiv \varphi_1(t)\xi_1 + \dots + \varphi_n(t)\xi_n - f(t) = 0 \ ,(t \in Q) \ , \qquad (5)$$

или

$$\eta_i(q,\xi) \equiv \varphi_{1i}(q)\xi_1 + \dots + \varphi_{ni}(q)\xi_n + b_i(q) = 0, \ (q \in Q_i \ , \ i=1,\dots,p),$$

в n- мерном евклидовом пространстве, где,например, $\delta(t,\xi')$ — уклонение произвольной точки $\xi'(\xi_1',\dots,\xi_n')$ от гиперплоскости $\delta(t,\xi) = 0$, $(t \in Q)$.

Таким образом, геометрически задача /1/ может быть истолкована так: в n- мерном евклидовом пространстве задана система плоскостей /5/ и надо в заданом множестве Ω найти точку $\xi^*(\xi_1^*,\dots,\xi_n^*)$ взвешенно наименее удаленную от системы плоскостей /5/; [1].

Алгорифмы для непосредственного решения задачи /1/ в случае, когда Ω - все n-мерное пространство, построены в [2] , [3] и др.

Если предварительно перейти к достаточно густым сетям $\{t_1,\dots, t_m\}$, $\{q_1,\dots,q_l\}$ компактов Q, Q_i и задачу /1/ решать на этих сетях, т.е. рассматривать задачу отыскания

$$\min_{\xi \in \Omega'} \max_{1 \le s \le m} \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k(t_s) - f(t_s) \right| , \qquad (6)$$

где Ω' - выпуклое множество, определяемое неравенствами

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_{ki}(q_r) + b_i(q_r) \ge 0 \ , \ (i=1,\dots,p \ ; \ r=1,\dots, l), \ (7)$$

то, в силу непрерывности рассматриваемых функций, решение последней задачи даст сколь угодно хорошее приближение решения исходной задачи.

Алгорифмы для решения задачи /6/ /при отсутствии ограничений /7/ /построены в [3] - [6] . Алгорифм [7] уже полностью решает задачу /6/.

Как известно, введением дополнительной переменной ϑ :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)\xi_k - f(t)\right| \leq \vartheta ,$$

задача чебышевского приближения /1/ сводится к следующей задаче линейного программирования /с непре - рывно заданными ограничениями [20] /:
минимизировать линейную форму

$$z = \vartheta$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)\xi_k - f(t) + \vartheta \geqslant 0 , \quad (t \in Q) ,$$

$$-\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)\xi_k + f(t) + \vartheta \geqslant 0 , \quad (t \in Q) ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{ki}(q)\xi_k + b_i(q) \geqslant 0 , \quad (q \in Q_i , \ i=1,\dots,p) .$$

В [8] E. Stiefel ,используя этот факт, применяет для осуществления своего м е т о д а з а м е н ы жордановы исключения - основной аппарат симплекс-метода, решающего обычную задачу линейного программирования.

На базе жордановых исключений и симплекс-метода для фактического отыскания чебышевского решения несовместной системы линейных уравнений, а также для решения обобщенной задачи линейного программирования, были построены алгорифмы с удобными вычислительными схемами, [8] - [11] .

В [2] С.И.Зуховицкий наметил идею алгорифма для чебышевского приближения непрерывной функции полиномом без предварительного перехода к сети компакта Q . Сеть же строится по мере решения задачи только для тех частей компакта, рассмотрение которых необходимо для приближенного решения задачи /исходя из произвольного начального приближения/.

В предлагаемой работе на базе этой идеи, жордановых исключений и симплекс-метода строятся алгорифмы с удобными вычислительными схемами для решения задач /1/, /3/, /4/.

Диссертация состоит из введения и трех глав.

Во введении приводится краткий обзор рассматриваемого вопроса и излагается содержание работы.

В первой главе строятся алгорифмы для решения задачи /1/, для приближенного отыскания допустимой точки $\xi \in \Omega$,а также для отыскания чебышевской точки системы неравенств /2/. Строится также монотонный алгорифм для решения задачи отыскания

$$\min_{x} \max_{\xi_i \neq 0} i$$

при условии

$$\left| \sum_{i=1}^{s} \xi_i \varphi_i(q) - f(q) \right| \leq \varepsilon, \ (q \in Q,\ s = 1, 2, \ldots)$$

где $\varphi_1(q), \varphi_2(q), \ldots$ – заданная на Q последовательность действительных и линейно независимых функций; другими словами – строится алгорифм для отыскания полинома наименьшей возможной степени, уклоняющегося на Q от действительной непрерывной функции $f(q)$ на величину, не превосходящую наперед заданого числа $\varepsilon > 0$.Эти алгорифмы базируются на алгорифмах [2] , [9] , [10] .

Во второй главе строятся алгорифмы для решения задачи /3/, т.е. для решения задачи линейного программирования с непрерывно заданными ограничениями, и задачи /4/ /квадратичного программирования с непрерывно заданными ограничениями/.Вычислительные схемы этих алгорифмов базируются на вычислительных схемах конечных алгорифмов для решения задач линейного и квадратичного программирования, построенных для случая, когда область Ω задана конечным числом линейных неравенств / [12], [13] и др./.

Кроме того, приводится алгорифм для решения задачи квадратичного программирования, основанный на сведении этой задачи к задаче чебышевского приближения с ограничениями на коэффициенты, т.е. к задаче вида /1/, а следовательно – к задаче линейного программирования с непрерывно заданными ограничениями, т.е. к задаче /3/, [21] .

В третьей главе рассматриваются некоторые применения рассмотренных задач чебышевского приближения, линейного и квадратичного программирования. Конкретно рассматривается задача /подобная задачам, рассматриваемым в [14] – [16] /приближенного построения оптимальных управлений процессом, описываемым уравнением

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}+u_1(t),\ (t>0,\ 0<x<\ell),\ (8)$$

с начальными и граничными условиями

$$f(x,0)=f_1(x),\ f(0,t)=f_2(t),\ f(\ell,t)=u_2(t).$$

Здесь $u_1(t), u_2(t)$ – управления, подчиненные ограничениям

$$|u_1(t)|\le M_1,\ |u_2(t)|\le M_2,$$

$f_1(x), f_2(t)$ и вводимая ниже $f_3(x)$ –заданные фиксированные функции. Оптимальность управлений заключается в том, что в момент $t=T$ должен достигаться

$$\min_{u_1,u_2}\max_{0\le x\le \ell}|f(x,T)-f_3(x)|, \qquad (9)$$

или

$$\min_{u_1,u_2}\int_0^\ell |f(x,T)-f_3(x)|^2 dx. \qquad (10)$$

Если управления $u_1(t), u_2(t)$ заменить наперед данными функциями $g_i(t)$, $h_k(t)$, ($i=1,\dots,m$; $k=1,\dots,n-m$), и решения $f(x,t)|_{t=T}$ уравнения /8/ при $f_1(x)\equiv 0, f_2(t)\equiv 0, u_1(t)=g_i(t), u_2(t)\equiv 0$ обозначить через $S_i(x)$ соот –

ветственно при $f_1(x)\equiv 0$, $f_2(t)\equiv 0$, $u_1(t)\equiv 0$, $u_2(t)=h_k(t)$ через $P_k(x)$, то полиномам

$$\tilde{u}_1(t)=\xi_1 g_1(t)+\ldots+\xi_m g_m(t),\ \tilde{u}_2(t)=\xi_{m+1}h_1(t)+\ldots+\xi_n h_{n-m}(t),$$

приближающим управления, будет соответствовать полином

$$\xi_1 S_1(x)+\ldots+\xi_m S_m(x)+\xi_{m+1}P_1(x)+\ldots+\xi_n P_{n-m}(x),$$

коэффициенты которого надо подобрать так, чтобы удовлетворить /9/ или /10/.

Таким образом, оптимизируя управления в смысле /9/, приходим к задаче /1/, а оптимизируя управления в смысле /10/, приходим к задаче /4/, которые в свою очередь могут быть приведены к задаче /3/.

Далее рассматриваются простейшие случаи задачи параметрического чебышевского приближения на некотором компакте Q функции $f(q,t)$ полиномом вида $\sum_{k=1}^{n}\xi_k(t)\varphi_k(q)$, заключающейся в том,что для каждого $t\in[t_1,t_2]$ нужно указать полином $P_n^*(t,q)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k^*(t)\varphi_k(q)$, наименее уклоняющийся от функции $f(q,t)$ при каждом $t\in[t_1,t_2]$. Приближенно в некоторых случаях эта задача может быть решена с помощью задачи параметрического линейного программирования [17].

В диссертации приводятся численные примеры,иллюстрирующие предлагаемые численные схемы.

Основные результаты диссертации содержатся в [18] - [23].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. С.И. Зуховицкий, Методы эффективного построения чебышевских приближений, Труды IУ всесоюзного математического сезда, "Наука", Л., 1964, 639.

2. С.И. Зуховицкий, Алгорифм для построения чебышевского приближения непрерывной функции полиномом, ДАН СССР, 120, 4 /1958/, 693.

3. Е.Я. Ремез, Общие вычислительные методы чебышевского приближения, Изд. АН УССР, Киев /1958/.

4. Ch. J. Valle Poussin, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 2-e partie, mem. 35 (1911).

5. E. Stiefel, Über diskrete und lineare Tschebischeff-Approximationen, Num. Math., 1958. Bd. 1

6. С.И. Зуховицкий, Алгорифм для решения чебышевской задачи в случае конечной системы несовместных линейных уравнений, ДАН СССР, 79, 4 /1961/, 561.

7. С.И. Зуховицкий, Алгорифм для решения одной обобщенной задачи линейного программирования, ДАН СССР, 133, 1 /1960/, 20.

8. E. Stiefel, Note on Jordan elimination, linear programming and Tchebicheff-Approximation, Num. Math., 1960, Bd. 2.

9. С.И. Зуховицкий, О новой численной схеме алгорифма для чебышевского приближения несовместной системы линейных уравнений и системы линейных неравенств, ДАН СССР, 139, 3 /1961/, 534.

10. С.И. Зуховицкий, Некоторые дополнения к алгорифму для решения обобщенной задачи линейного программирования, ДАН СССР, 139, 4 /1961/, 783.

11. Е.Я. Р е м е з, Некоторые вопросы численного построения решений задач чебышевского приближения, Труды IУ всесоюзного математического съезда, "Наука". Л. 1964, 594.

12. Г. З о й т е н д е й к, Методы возможных направлений, ИЛ, М. 1963.

13. С.И. З у х о в и ц к и й , Л.И. А в д е е в а , Линейное и выпуклое программирование, "Наука", М. 1964.

14. А.Г. Б у т к о в с к и й, А.Я. Л е р н е р, Об оптимальном управлении системы с распределенными параметрами, Автоматика и телемеханика, XXI, 6 /1960/, 682.

15. А.Г. Б у т к о в с к и й , Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами, Автоматика и телемеханика, XXII, 1 /1961/, 17.

16. Ю.В.Е г о р о в, О некоторых задачах теории оптимального управления, ДАН СССР, 145, 4 /1962/, 720.

17. С. Г а с с, Линейное программирование, ИЛ, М. 1961.

18. М.И. Ж а л д а к , О новой вычислительной схеме одного алгорифма для построения чебышевского приближения непрерывной функции полиномом, Труды Киевского высш. инж. радиотехн. уч., 32 /1962/, 32.

19. М.И. Ж а л д а к , О чебышевском приближении непрерывной функции полиномом при наличии ограничений на коэффициенты, ДАН СССР, 159, 3 /1964/, 493.

20. М.И. Ж а л д а к , О задаче линейного программирования с непрерывно заданными ограничениями, Труды первой республиканской конференции молодых исследователей, АН УССР, Киев /1965/.

21. М.І. Ж а л д а к, Б.С. К о в б а с е н к о , Про одну задачу квадратичного програмування, Доповіді АН УРСР /печ./.

22. М.І. Ж а л д а к , Про чебишовське наближення неперервної функції поліномом при наявності обмежень на коефіцієнти, Тезисы доклада на итоговой научной конференции кафедр КГПИ им. А.М.Горького, Киев, 1964.

23. М.І. Ж а л д а к, Про одну задачу оптимального керування, Тезисы доклада на итоговой научной конференции кафедр КГПИ им. А.М.Горького, Киев, 1965.

БФ.20757. 23/III-1965.Печ.лист.0,75.Зак.64.Тираж 150.

Ротапринт КГПИ.Кловский спуск,8.