

## Систематизація та узагальнення знань у навчанні математиці

Проблема узагальнення і систематизації – давнішня гносеологічна, психологічна і педагогічна проблема. З історії педагогіки відомо, що кожний видатний дидакт минулого торкався цих питань. Зокрема Я. М. Каменський неодноразово в своїх працях підкреслював необхідність дотримуватись послідовності у вивченні матеріалу: "Всі заняття повинні влаштовуватись таким чином, щоб наступне завжди базувалось на попередньому, а попереднє зміцнювалось наступним". Його поради не втратили свого значення і до цього часу.

К. Д. Ушинський звертав увагу на те, що "тільки система, звичайно, розумна, яка виходить з самої суті предметів, дає нам владу над нашими знаннями." Він не тільки вимагав від учителів застосовувати принцип систематичності в процесі навчання, але й надавав великого значення виробленню в учнів умінь самостійно узагальнювати і систематизувати набуті знання з шкільних предметів [1].

Узагальнення і систематизація невід'ємні компоненти розумової діяльності, яка лежить в основі встановлення істотних взаємозв'язків між явищами, які вивчаються. Послідовне здійснення систематизації – необхідна умова формування узагальнених знань, особливо в математиці – бо, якщо хоча б один ланцюг випадає, то стають незрозумілими і наступні поняття, теореми, методи тощо. Узагальнення відіграє надзвичайно важливу роль у процесі навчання, оскільки на його основі учні засвоюють наукові поняття, вчать визначати їх загальні і істотні ознаки.

Послідовне здійснення систематизації – необхідна умова формування узагальнених знань, які творчо використовуються в різних ситуаціях. Узагальнення знань, в свою чергу, передбачає їх систематизацію.

Для шкільного курсу математики характерним є те, що багато понять не вводяться відразу в повному обсязі і змісті, а розширюються і збагачуються послідовно, в міру розвитку курсу.

На занятті, в процесі узагальнення теми чи розділу, учень має можливість оглянути вивчений матеріал, виділивши саме головне. При цьому одночасно йде повторення навчального матеріалу, поглиблюються, виробляються інтелектуальні і практичні вміння і навички.

Не дивлячись на ефективність, узагальнююче повторення проводиться в школі дуже рідко або ж проводиться лише в плані закріплення отриманих знань. Це можна пояснити недостатністю часу; відсутністю ефективної методики його проведення, відсутністю в підручниках достатньої кількості узагальнюючих вправ, недостатньою повнотою внутріпредметних зв'язків в темах курсу і т.д.

Узагальнююче повторення можна класифікувати так: узагальнююче повторення на рівні понять; узагальнююче повторення на рівні системи понять; узагальнююче повторення на рівні теорій. Найбільш важкою є організація узагальнюючого повторення на рівні теорій, в зв'язку з чим перші два рівні в більшій мірі використовуються в навчанні учнів молодших і середніх класів, останній дає суттєвий ефект в основному лише в старших класах та вищих навчальних закладах.

Узагальнююче повторення на рівні понять дозволяє набуту учням вміння виділяти істотні ознаки понять, давати поняттям означення через різну сукупність ознак.

Узагальнююче повторення на рівні системи понять має на меті виробити в учнів вміння співставляти вивчені поняття, знаходити нові зв'язки і відношення між ними. На даному рівні узагальнюючого повторення визначається місце і значення понять в системі.

Узагальнююче повторення на рівні теорій дає певне трактування вивченим поняттям з позиції тих чи інших фундаментальних ідей, які розглядаються в курсі. На цьому рівні значне місце займає узагальнення і конкретизація. Основна суть узагальнюючого повторення даного виду полягає в тому, що будується єдина, загальна форма окремих фактів, явищ, понять [1].

Однією із важливих задач освітніх закладів є формування в учнів уміння самостійно поповнювати знання, орієнтуватися в науковій і політичній інформації, оволодіння учнями не простою сумою знань, а їх системою.

Методика організації повторення враховує віковий рівень учнів. Так, якщо в середніх класах основною організаційною формою є бесіда чи розповідь учителя, в процесі якої він звертає увагу учнів на необхідність всебічного вивчення кожного поняття, явища, на взаємозв'язок понять, які вивчаються, то в старших класах, а також у ліцеях, коледжах та інших навчальних закладах заняття організовується так, щоб учні самостійно прийшли до відкриття нових зв'язків між засвоєними поняттями, до узагальнення одержаних знань.

Слід зауважити, що яким би повним не було пояснення вчителя, майже завжди може зникнути з поля зору який-небудь факт, деталь, приклад, використання яких при узагальнюючому повторенні міцніше закріпило б в пам'яті учнів вивчений матеріал.

Мета узагальнення не тільки в тому, щоб поновити раніше засвоєні знання, а і в тому, щоб навчити учнів використовувати вивчений матеріал.

В цілому узагальнюючі заняття сприяють систематизації і міцнішому засвоєнню навчального матеріалу.

Систематизація знань невід'ємна від їх узагальнення і чим ширше узагальнення, тим більше відображено між ними зв'язків і відношень, тим ширше коло знань об'єднується в систему.

Так, наприклад, програма з алгебри середньої школи має шість змістовних ліній: дійсні числа; тотожні перетворення; рівняння, нерівності; елементарні функції; елементи математичного аналізу; додатки математичного аналізу, які мають глибокі взаємозв'язки. Об'єктами вивчення першої змістовної лінії "Дійсні числа" є числа і дії з ними. Об'єктами другої – вирази та дії з ними.

Вирази складаються за допомогою чисел і букв, але дії з ними виконують за тими правилами що і з числами. При глибокому засвоєнні першої змістовної лінії друга – особливих труднощів не викликає. Оволодіння третьою змістовною лінією – це та ж робота з виразами, але із урахуванням характерних властивостей нових об'єктів – рівнянь і нерівностей і тд.

Матеріальна єдність світу виявляється у взаємозв'язку і взаємообумовленості різних явищ і процесів, що відбуваються в природі. Розглядаючи їх, доводиться враховувати залежність одних змінних від інших. Необхідність вивчення на практиці залежностей між змінними різної природи привела до поняття функції, яке є одним із важливих понять математики.

Розглянемо узагальнення змістовних ліній шкільної математики на прикладі елементарних функцій.

В курсі алгебри неповної середньої школи учні повинні засвоїти поняття функції, вивчити простіші елементарні функції ( $y=kx$ ,  $y=kx+b$ ,  $y=k/x$ ,  $y=x^2$ ,  $y=ax^2+bx+c$ ,  $y=x^3$ ,  $y=x^{1/2}$ ,  $y=|x|$ ) і їх властивості, засвоїти прийоми дослідження функцій і побудови їх графіків.

В курсі алгебри і початків аналізу систематизуються, поповнюються відомості про основні елементарні функції (як на елементарному рівні, так і з застосуванням апарату аналізу), причому матеріал, який завершує одну з основних змістовних ліній шкільного курсу.

Програма з алгебри неповної середньої школи в межах даної змістовної лінії розпочинається знайомством учнів з лінійним рівнянням з двома змінними і його графіком. Можна вважати, що це є пропедевтика вивчення лінійної функції.

Далі вводиться поняття функції. Учні знайомляться з такими функціями: лінійна функція, обернена пропорційність, функція виду  $y=x^2$  і  $y=x^{1/2}$ . Вони з'ясовують, що є графіком даних функцій, встановлюються істотні внутрішні зв'язки, знання організуються в систему.

Перед вивченням квадратичної функції повторюється система знань змістовної лінії "Елементарні функції", відновлюються набуті навички і вміння. Далі вивчається квадратична функція і функції виду  $y=x^n$  і  $y=x^{1/n}$ , встановлюються їх властивості. Отже, в процесі вивчення даної змістовної лінії, узагальнюються і систематизуються знання, навички і вміння учнів щодо побудови графіків, вивчених властивостей, аналізу властивостей функцій заданих графічно.

План дослідження функції поступово уточнюється: спочатку учні знайомляться з поняттям функції, способами її задання, графіком, областю визначення і областю значень; потім вводяться поняття проміжків зростання і спадання функції, знакосталості, нулів функції, а також поняття парності і непарності.

Курс "Алгебра і початки аналізу" розпочинається уроком узагальнюючого повторення на тему: "Повторення і розширення відомостей про функцію".

В педагогічній літературі класифікація узагальнюючого повторення в основному дається за такими основами: за часовою ознакою; за основною дидактичною ціллю; за частотою використання; за місцем в процесі засвоєння.

Урок узагальнюючого повторення, яким розпочинається курс "Алгебра і початки аналізу" в середній школі за часовою ознакою є урок узагальнюючого повторення на початку навчального року; за дидактичною ціллю – узагальнено-систематизуюче повторення; за частотою використання – періодичне; за місцем в процесі засвоєння – повторення, яке передє вивчення нового матеріалу, при якому актуалізуються факти із раніше пройденого, необхідні для повноцінного засвоєння нового.

Одна з найважливіших проблем навчального процесу полягає в тому, як за одиницю навчального часу дати учням максимальну кількість практично необхідних знань, умінь та навичок.

Наведемо один із способів проведення уроку узагальнюючого повторення в курсі алгебри і початків аналізу, на якому можна проаналізувати з учнями таку кількість вправ, щоб вони могли зробити відповідні висновки. Це можливо здійснити при використанні сучасних інформаційних технологій навчання, зокрема пакета програм GRAN1. Цей пакет програм можна використати для графічного аналізу функцій. (Його функціональні можливості детально описані в [2]). Дружній інтерфейс значно полегшує роботу учнів з програмою.

Якщо узагальнююче повторення будується на поєднанні теоретичного і практичного матеріалу, то на уроці доцільніше розглянути систему вправ, яка б спонукала учнів робити припущення, висновки, узагальнення. Наші дослідження показали, що використання комп'ютера на такому уроці підсилює ефект відновлення і засвоєння знань, і дає можливість розглянути і проаналізувати багато різних прикладів, а це, в свою чергу, сприяє міцнішому закріпленню знань.

Протягом багаторічної історії викладання математики у школі постійно вдосконалювались методи розв'язання різних типів задач і вправ. Проте навіть при найраціональнішому розв'язанні певні типи задач містять багато рутинних обчислень, складних перетворень, внаслідок чого розв'язання таких задач викликають великі утруднення не лише в середніх, а й у найсильніших учнів. Використання комп'ютерів і сучасних інформаційних технологій дає можливість зробити процес розв'язування багатьох математичних задач швидшим, позбавити учнів рутинних обчислень, акцентувати їх увагу на творчій стороні процесу розв'язання [3].

Нижче, наведено систему пізнавальних вправ, яку можна використати на уроці узагальнюючого повторення за темою "Повторення і розширення відомостей про функцію". Дана система вправ відтворює характерні властивості вивчених елементарних функцій, а це сприятиме виведенню учнями правильних узагальнюючих висновків. Для полегшення роботи учнів, ці вправи об'єднуються в окремі файли, які використовуються учнями послідовно.

Урок доцільно почати з переліку вивчених елементарних функцій. На дошці записуємо основні типи функцій, які були вивчені в курсі неповної середньої школи.

1.  $y=kx$
2.  $y=kx+b$
3.  $y=a$
4.  $x=b$
5.  $y=k/x$
6.  $y=x^2$
7.  $y=ax^2+bx+c$
8.  $y=x^3$
9.  $y=x^{1/2}$
10.  $y=|x|$ .

### ПЕРШЕ ЗАВДАННЯ:

- вказати тип функцій (Рис. 1);
- вказати координати точок перетину графіків функцій (Рис. 1), використовуючи команду "Координати F9" з пункту меню "ГРАФІК".

(Учні самостійно завантажують файл zavd1.)

### ДРУГЕ ЗАВДАННЯ:

а) Провести дослідження розміщення графіка функції  $y=kx+b$  залежно від  $k$  та  $b$  (Учні завантажують файл zavd2\_a). Розглянувши і проаналізувавши розміщення графіків функцій  $y=3x-1$ ,  $y=x-1$ ,  $y=-2x-1$ , які побудовані в одній системі координат (можливості пакета програм GRAN1 дозволяють в одній системі координат побудувати п'ять графіків одночасно) учні записують в зошити висновки, що для  $k>0$  кут, який утворює графік функції  $y=kx+b$  з додатнім напрямом осі OX, буде гострий, а для  $k<0$  – тупий.

б) Щоб проаналізувати вплив коефіцієнта  $b$  на розміщення графіка функції  $y=kx+b$  учні завантажують файл zavd2\_b. Розглянувши графіки функцій  $y=3x-1$ ,  $y=3x+1$ ,  $y=-3x-1$  учні записують в зошити відповідний висновок: 1) при  $b>0$  графік функції  $y=kx+b$  перетинає додатню піввісь OY; 2) при  $b<0$  графік функції  $y=kx+b$  перетинає від'ємну піввісь OY.

в) Завдання для самостійної роботи.

Завантажити файл zavd2\_в і провести дослідження розміщення графіка функції  $y=(x\pm a)^2\pm b$  залежно від  $a$  та  $b$ .

На основі самостійного аналізу розміщення графіків учні роблять відповідні висновки.

### ТРЕТЄ ЗАВДАННЯ: (завантажити файл zavd3\_1.)

1) Вказати за допомогою яких геометричних перетворень (паралельного перенесення, симетрії) відомих графіків функцій побудовано графіки даних функцій (Рис. 2). При виконанні такого типу завдань можливі різні варіанти геометричних перетворень. План декількох варіантів побудови доцільно було б записати на дошці, а решту запропонувати учням розглянути самостійно. Наприклад, на дошці можна записати варіанти перетворень типу а), а варіанти перетворень типу б) для самостійного розгляду ( $\Gamma_{x^2}$  – графік функції  $y=x^2$ ).

$$а) \Gamma_{x^2} \rightarrow \Gamma_{(x-4)^2} \rightarrow \Gamma_{-(x-4)^2} \rightarrow \Gamma_{-(x-4)^2+5}$$

$$\Gamma_{-x^2} \rightarrow \Gamma_{-x^2+5} \rightarrow \Gamma_{-(x-4)^2+5}$$

$$б) \Gamma_{x^2} \rightarrow \Gamma_{x^2+5} \rightarrow \Gamma_{-x^2+5} \rightarrow \Gamma_{-(x-4)^2+5}$$

$$\Gamma_{x^2} \rightarrow \Gamma_{-x^2} \rightarrow \Gamma_{-x^2+5} \rightarrow \Gamma_{-(x-4)^2+5}$$

Далі учні аналізують графік функції  $y=(2x-5)/(x-4)$  і роблять відповідний висновок.

2) (завантажити файл zavd3\_2). Проаналізувавши графіки функцій (Рис. 3) і дослідивши їх взаємне розміщення учні приходять до висновків, що графік функції типу  $y=|f(x)|$  осиметричний відносно вісі OX, а графік функції типу  $y=f(|x|)$  симетричний відносно вісі OY.

### ЧЕТВЕРТЕ ЗАВДАННЯ: (завантажити файл zavd4.)

Перевірити чи належать точки (5; 2), (3; 3), (2.22; 6.09), (1.75; 3.97), (1.40; 0.07), (6; 2.02), (6; 11), (-5; 11), (2; 11), (10; 24), (3; 20), (0; 7) графіку даної функції (Рис. 4). Використання комп'ютера і пакета програм GRAN1 значно полегшує виконання даного завдання. Учень, використовуючи команду "Координати F9" з пункту меню "КООРДИНАТИ", легко виконає це завдання.

### П'ЯТЕ ЗАВДАННЯ: (завантажити файл zavd5.)

Провести дослідження даних функцій за такою схемою:

- область визначення;
- область значень;
- парність;
- проміжки знакосталості;
- нулі функції;
- проміжки монотонності.

### ВИСНОВКИ

1. Організація узагальнюючого повторення є складним процесом, тому на таких уроках доцільно використовувати комп'ютер і сучасні інформаційні технології.

2. Змістовнішими були висновки учнів тієї групи, в якій використовувався комп'ютер.

3. Використання комп'ютера на уроці дає учням можливість не зосереджуватись на виконанні технічних операцій, а думати, аналізувати, співставляти, а всю технічну роботу виконати за допомогою комп'ютера. При застосуваннях комп'ютера урок стає емоційно насиченішим, продуктивнішим.

4. Учні краще робили узагальнюючі висновки стосовно властивостей тих функцій, з якими вони зустрічаються при вивченні інших предметів ( $y=ax+b$ ,  $y=k/x$ ,  $y=ax^2+bx+c$ ). Наприклад, в курсі фізики середньої школи, за допомогою функції  $y=ax+b$  описується механічний рух, падіння тіла по вертикалі під дією сили тяжіння, залежність сили тертя від ваги тіла. Функції  $y=ax+b$ ,  $y=k/x$  використовується при вивченні електричних явищ (залежність сили струму від напруги і опору), функція  $y=ax^2+bx+c$  використовується як при описанні механічного руху так і при описанні руху тіла кинутого під кутом до горизонту. Саме тому, розгляд цих функцій можна провести за такою схемою:

1) означення; 2) аналітичне дослідження; 3) графічне дослідження. При аналізі функцій  $y=x^{1/n}$ ,  $y=ax^n$ ,  $y=f(|x|)$ ,  $y=|f(x)|$  в учнів виникають труднощі. В цих випадках, лише аналітичного задання функції не достатньо для того, щоб учні могли відразу сформулювати узагальнюючі висновки. В цьому випадку, щоб результативність узагальнення була вищою необхідно аналіз цих функцій провести за такою схемою: 1) дати означення цих функцій; 2) графічне дослідження; 3) аналітичне дослідження.

5. Слід також відмітити наступне:

а) виникають значні труднощі у вчителів сільських та районних шкіл при підготовці та проведенні уроків з використанням прикладного програмного забезпечення через відсутність на нього документації, додаткової літератури, в якій дається опис програм. Так, при ознайомленні з пакетом GRAN1, необхідно звернути увагу на відповідність між заданою областю визначення функцій та вибраним масштабом. Так як, при використанні опції "масштаб авто" можливе неадекватне відображення функції на екрані (вона повністю або частково вироджується в лінію), особливо при зображенні декількох функцій одночасно. В цьому випадку для встановлення відповідного масштабу необхідно скористатися опцією "Масштаб користувача";

б) на підготовку до уроку витрачається додатковий час на вивчення відповідних програмних пакетів, особливо у випадку, коли вчитель немає навичок роботи з комп'ютером;

в) використання комп'ютера в попередніх класах вимагає проведення додаткових факультативних занять, для того щоб учні набули елементарних навичок роботи на комп'ютері, оскільки шкільна програма складена таким чином, що курс інформатики вводиться лише починаючи з 10-го класу;

г) більшість шкіл не мають достатньо коштів для придбання сучасної обчислювальної техніки та навчальних програмних пакетів.

#### **ЛІТЕРАТУРА**

1. Иржавцева В.П., Федченко Л.Я. Систематизация и обобщение знаний учащихся в процессе изучения математики: Пособие для учителя / Под ред. Н.Л. Коломинского - Киев: Рад. школа, - 1988. - 205 с.
2. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики.: Посібник для вчителя. - К.: Техніка, 1997. - 303 с.
3. Монахов В. М. Что такое новая информационная технология обучения? // Математика в школе. – 1990. - №2. - С. 47-52.