Міністерство освіти і науки України
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Національний університет «Києво-Могилянська академія»

ВОСЬМА ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ МОЛОДИХ ВЧЕНИХ З МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ «АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ СУЧАСНОЇ МАТЕМАТИКИ І ФІЗИКИ ТА МЕТОДИКИ ЇХ НАВЧАННЯ»

Тези доповідей

Київ, 23 травня 2019 р.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених
з математики та фізики
«Актуальні проблеми сучасної математики і фізики
та методики їх навчання»

ЗМІСТ

СЕКЦІЯ 1. МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Умови інтегрованості тригонометричних рядів
Бовсуновська В. В., Задерей П.В., Мокану Я.Г. 10

Побудова асимптотичного розв'язку задачі Коші для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь другого порядку
Говорадло Н.В., Козакова Н.В., Пафик С.П. 11

Моделі бойових дій Ланчестерського типу з урахуванням підкріплень
Грицишен Л.А. 12

Про одну властивість двовимірного стандартного нормального розподілу
Дворний А. В. 13

Задача Бюффона для «голки» складної форми
Десницький О.М. 14

Асимптотична єдиність оцінки найменших квадратів параметрів нелінійної моделі регресії
Драбик Т.О 15

Про деякі особливості викладання математичних курсів на ФМФ «КПІ ім. Ігоря Сікорського» на прикладі формули Стірлінга
Ковтун А. С., Дем'яненко О. О. 16

Консистентність періодогманої оцінки в задачі виявлення прихованих періодичностей із дискретним часом
Кухарчук Я. С., Орловський І.В. 17

Застосування моделей стохастичної волатильності для аналізу смайл-ефекту
Леськів М.О. 18

Консистентність періодограмної оцінки частот двовимірного гармонічного коливання
Лимар О.В. 19

Поверхня максимумів спектральних щільностей MA(2)-процесів та великі відхилення оцінки найменших квадратів
Лиховид С.П. 20

Побудова асимптотичних розв'язків лінійного сингулярно збуреного диференціального рівняння m-го порядку
Михальчук О.В., Пафик С.П. 21

Леон Іссерліс: український математик
Митрофанова О.В. 22

Про центральну граничну теорему Алана Тюрінга
Мокану Я.Г. 23

Про одну випадкову величину, визначену в термінах представлення дійсних чисел рядами Енгеля
Мороз М.П. 24

Економетричний аналіз інвестицій в рекламу та їх вплив на прибуток підприємства
Москалець В. В. 25

Властивості r-узагальнених бета - функцій та гіпергеометричних функцій
Овчаренко О.В. 26

Ніде не монотонні сингулярні функції необмеженої варіації
Осауленко Р.Ю. 27

Косінор-аналіз
Плотніков М.Д. 28

Побудова асимптотичного розв'язку крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь другого порядку
Посудевський В.В., Пафик С.П. 29

Достатні умови функції корисності для існування оптимальних стратегій у симетричній грі з накопичення капіталу
Силенко І.В. 30

Узагальнений розв'язок задачі Діріхле для модельного анізотропного вагового рівняння
Соловйова А.І. 31

Властивості цінової динаміки деяких фінансових інструментів, що моделюються за допомогою стохастичних диференціальних рівнянь
Танасюк Б.М., Тимошенко О.А. 32

Переваги геометричного доведення класичної теореми
Трохіна В.Ю., Репета Л.А. 33

Лінійні системи диференціальних рівнянь з малим параметром та регулярною особливою точкою
Чорненька О.В. 34

СЕКЦІЯ 2. МЕТРИЧНОЇ ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ, ГЕОМЕТРІЇ, ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Топологічна структура множини неповних сум рядів, пов'язаних з послідовністю чисел Люка
Артемчук О.Р. 36

Субгеометричні розклади Кантора
Балицька Н.О. 37

Канторівські системи числення і послідовності Фібоначчі
Бондаренко О.І. 39

Розподіл значень класичної неперервної ніде не диференційовної функції Серпінського при заданому розподілі значень аргумента
Климчук С.О., Василенко Н.А. 40

Простір послідовностей нулів та одиниць як множина зображень дробової частини дійсного числа відрізка [0;1]
Лисенко І.М., Гордійчук М.Р. 41

Фрактальні властивості збурених множин кантора, пов'язані з Q-розкладами*
Дорош О.П. 42

Деякі властивості функції, породженої розподілом випадкової величини заданої знакододатнім рядом Люрота
Калашнікова Є.І. 43

Рівномірно розподілені послідовності породжені ергодичними перетвореннями
Кривошия Р.В., Макарчук О.П. 44

Узагальнення Трибін-функції
Маслова Ю.П. 45

Дослідження ефективності використання фрактальної інтерполяції для заповнення пропусків у масивах даних
Панасенко О.Б., Ткаченко С.В. 46

Один клас фрактальних функцій, пов'язаних з Q_2^*-зображенням чисел
Ратушняк С.П. 47

Одна фрактальна неперервна функція канторівського типу 48
Свинчук О.В.

Узагальнені моментні зображення та апроксиманти типу Паде деяких базисних гіпергеометричних рядів двох змінних
Тетерук І.С. 49

Оцінка максимальної правдоподібності невідомих параметрів одного класу сингулярних розподілів та її властивості
Ціціліна Н.В. 50

Апроксимація дійсних чисел відрізка [0,5; 1] ланцюговими A_2-дробами
Чуйков А.С. 51

СЕКЦІЯ 3. АЛГЕБРИ, ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ, ТЕОРІЇ АЛГОРИТМІВ, ІНФОРМАТИКИ

Ensemble clustering of images based on representations with deep neural networks
Vasiur O.K. 53

Про евклідовість деяких кілець матриць
Власюк В.В. 54

Управління та вимірювання ризику при інвестуванні у цінні папери
Гаврилюк О.М., Заставний Н.І. 55

Some properties of Lagrangian groups
Donchyk A.M. 56

Кредитний скоринг: система підтримки рішень
Жибак Б.-Х.С. 57

Сильна метрична розмірність уніциклічних графів
Матвеєва М.М. 58

Дилема мандрівника. Чутливість вибору до розміру штрафу
Міцан А.І. 59

Захист ключів за допомогою медового шифрування
Олійник М.А. 60

З історії одиниць вимірювання ємності носіїв та об'єму інформації
Паршуков С.В., Паршукова Л.М. 61

Збереження секрету при документообігу
Степанюк С.В. 62

Властивості трикутника Паскаля
Тверітінова М.В., Голыченко І.І. 63

До питання формування інформаційно-технічних компетентностей майбутніх учителів інформатики
Ткачук Г.В. 64

Впровадження інформаційно-комунікаційних технологій у навчальний процес
Усатюк Я.В. 65

Спрощення згорткових нейронних мереж
Федоров О.В. 66

On properties of groups with an A^p-subgroup
Fedorchuk Yu.S., Trebenko O.O. 67

Прийняття рішень при визначенні маршруту інтернет-платежів
Цислицький А.М. 68

СЕКЦІЯ 4. МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ, ФІЗИКИ, ІСТОРІЇ ТА МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ І ФІЗИКИ

Гнучка модель як одна із перспективних моделей змішаного навчання алгебри і теорії чисел в педагогічному університеті
Антошків М.С. 70

Задачі з елементами українського фольклору при вивченні алгебри у 7 класі
Билим А.В., Чорненька О.В. 72

Організація інтегрованого навчання фізики та астрономії з використанням квест-технологій
Бронішевська О.В. 73

Акустичні властивості наповненого пентапласту
Віржанський В.В. 75

Аксіологічний підхід у процесі формуванні валеологічної компетентності майбутніх вчителів математики
Возносименко Д.А. 76

Розрахунок другого коефіцієнта в'язкості та поглинання у фторованих спиртах
Гетало А.М. 77

A boundary value problem with free boundary: Lie symmetry, reduction and exact solutions
Davydovych V.V. 78

Електронна версія підручника як засіб навчання фізики
Декарчук С.О. 79

Візуалізація математичних обєктів у середовищі GEOGEBRA 6.0
Зінченко Ю.М., Рудий А.В. 80

Контроль знань учнів середньої та старшої школи за допомогою тестування
Ільяшенко Д.В. 81

Проектування засобів оцінювання сформованості компетентностей педагогів-фізиків
Кириленко О.І. 82

Розвиток пізнавального інтересу учнів з фізики в сучасному освітньому середовищі
Кифорук І.І. 83

Підготовка вчителів фізики до використання інформаційних технологій в освітньому процесі
Криворучко І.І. 84

Приклади застосування методу кейсів та STEM-технологій при вивченні елементів теорії ймовірності, комбінаторики та математичної статистики в шкільному курсі математики
Кручко І.М. 85

Від принципу відображення зображення до сучасного телебачення
Максюта Д.І. 86

Інтерактивне навчання майбутніх учителів математики
Махомета Т.М.,Тягай І.М. 8

Фундаментальні основи виникнення природничих дисциплін, значення математики і фізики у пізнанні природничих наук
Мельник Р.М. 88

Відкриття космічних променів
Мірошник І.Л. 89

Проблема простору-часу
Морозова О.В. 90

Перестановки доданків в умовно збіжних рядах 91
Огородник А.О., Павленко В.В.

Анрі Леон Лебег
Паршукова А.С. 92

«Космічні» українці
Підгорний О.В. 93

Професор Дущенко В.П. – вихованець теплофізичної школи професора Казанського М.Ф.
Пудченко С.А. 95

Користь псевдонаукових теорій у створенні якісного науково-освітнього контенту
Пустова С.О. 97

Формування екологічної компетентності учнів на уроках математики
Джаркин Рахматуллаєа 98

Інноваційні підходи під час викладання практичних занять з теоретичної фізики
Решітник Ю.В. 99

Історія винайдення мікроскопа
Романенко Д.В. 100

Квантова фізика – основа нових технологічних можливостей
Ротозєй А.О. 101

Фелікс Хаусдорф
Рудницький С.О. 102

Цікаве при вивченні математичної статистики
Савич І.М. 103

До питання мотивації учнів у процесі вивичення логарифмів
Святецька Н.В., Наконечна Л.Й. 104

Особливості викладання алгебри та теорії чисел при підготовці майбутніх вчителів математики
Скасків Л.В., Ярова О.А. 106

Відкриття гравітаційних хвиль
Солтусенко Г.Г. 107

Модифікуючий вплив наповнювачів на значення коефіцієнта теплопровідності пентапласту
Столярова С.С. 108

Гідродинамічні радіуси макромолекул сироваткового альбуміну людини, отримані з даних по зсувній в'язкості його водних розчинів
Хорольський О.В. 109

Кристалофізика. Фізичні властивості кристалів
Челнокова С.М. 110

Електричні властивості наповненого поліхлортрифторетилену
Ярошко А.Л. 111

Секція 1.

Математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 10.

УМОВИ ІНТЕГРОВНОСТІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ

В.В. Бовсуновська, П.В. Задерей, Я.Г. Мокану
(КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

А. Зигмундом (див. [1, стор. 233]) встановлене таке твердження. Для того, щоб тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{1}$$

був рядом Фур'є функції $f(\cdot)\in\mathbb{L}_1[-\pi,\pi]$, необхідно і достатньо, щоб $\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\sigma_N(x)-\sigma_n(x)|dx\to 0$ при $N>n\to\infty$, де

$$\sigma_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

є сумою Фейера порядку n ряду (1).

Базуючись на результаті С.О. Теляковського [2], про асимптотичну рівність для інтеграла від модуля функції, заданої тригонометричним рядом, встановлено більш прозорі умови інтегровності ряду (1).

Теорема 1. *Для того, щоб ряд* (1) *був рядом Фур'є функції* $f(\cdot)\in\mathbb{L}_1[-\pi,\pi]$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}|\beta_k+\alpha_{N-1-k}\cos x+\beta_{N-1-k}\sin x|dx\to 0\quad \textit{при}\quad N>n\to\infty,$$

де

$$\alpha_k=\begin{cases}(\frac{1}{n}-\frac{1}{N})ka_k, & 1\le k\le n-1,\\ (1-\frac{k}{N})a_k, & n\le k\le N-1,\\ 0, & k\ge N;\end{cases}\qquad \beta_k=\begin{cases}(\frac{1}{n}-\frac{1}{N})kb_k, & 1\le k\le n-1,\\ (1-\frac{k}{N})b_k, & n\le k\le N-1,\\ 0, & k\ge N;\end{cases}$$

Література

[1] Зигмунд А. *Тригонометрические ряды: В.2-х томах* — М.: Мир, 1965.— Т.1 — 615 с.

[2] Теляковский С.А. *Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории аппроксимации* // Тр. мат. ин-та АН СССР. — 1971. — Т. 109. — С. 65–97.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 11.

ПОБУДОВА АСИМПТОТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Говорадло Н.В., Козакова Н.В., Пафик С. П.
(НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

Розглянуто задачу Коші

$$\varepsilon^2 \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon A(t;\varepsilon)\frac{dx}{dt} + B(t;\varepsilon)x = f(t;\varepsilon) \cdot \exp\left(\varepsilon^{-1}\int\limits_0^t \alpha(\tau)d\tau\right), \tag{1}$$

$$x(0;\varepsilon) = x_0(\varepsilon), \frac{dx(t;\varepsilon)}{dt}\Big|_{t=0} = x_1(\varepsilon), \tag{2}$$

в якій $x(t;\varepsilon)$- шуканий, а $f(t;\varepsilon)$ – відомий n-вимірні вектори, $A(t;\varepsilon)$, $B(t;\varepsilon)$ - відомі квадратні матриці n-го порядку, $t \in [0;T]$, ε - малий дійсний параметр, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0], \varepsilon_0 \ll 1$.

Початкову задачу (1), (2) досліджено при виконанні наступних умов:

1. Матриці $A(t;\varepsilon), B(t;\varepsilon)$ і вектор $f(t,\varepsilon)$ допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра ε:

$$A(t;\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k A_k(t), B(t;\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k B_k(t), f(t;\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k f_k(t) \tag{3}$$

2. Коефіцієнти матриць $A_k(t), B_k(t)$ і функція $\alpha(t)$ нескінченно диференційовні на відрізку $[0;T]$.

3. Квадратична в'язка матриць $P(t,\lambda) = \lambda^2 E + A_0(t)\lambda + B_0(t)$ має на відрізку $[0;T]$ $2n$ різних власних значень $\lambda_i(t), i = \overline{1,2n}$.

4. Вирази $x_0(\varepsilon), x_1(\varepsilon)$ представляються у вигляді асимптотичних розвинень за степенями ε, тобто

$$x_0(\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k x_0^{(k)}, x_1(\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k x_1^{(k)}.$$

5. $Re\lambda_i(t) < 0, i = \overline{1,2n}, \forall t \in [0;T]$.

При виконанні умов 1–5 побудовано формальний розв'язок задачі Коші (1), (2), а також, використовуючи методи робіт [1–2], доведено, що побудований формальний розв'язок є асимптотичним розвиненням точного розв'язку задачі (1), (2) при $\varepsilon \to 0$.

Література

[1] Самойленко А.М.,Шкіль М.І., Яковець В.П. *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням.* — Київ: Вища школа, 2000. — 294 с.
[2] Шкіль М.І. *Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях.* — Київ: Вища школа, 1971. — 227 с.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 12.

МОДЕЛІ БОЙОВИХ ДІЙ ЛАНЧЕСТЕРСЬКОГО ТИПУ З УРАХУВАННЯМ ПІДКРІПЛЕНЬ

Л. А. Грицишен
(Донецький національний університет імені Василя Стуса Вінниця, Україна)

В [1] описано три моделі ведення бойових дій, побудовані під час першої світової війни англійським інженером і математиком Ф.У. Ланчестером. Розглянуто випадки ведення бойових дій регулярними військами (система типу A), партизанськими силами (система типу B), а також тими й іншими одночасно (система типу C).

Нехай у бойових діях беруть участь дві протиборчі сторони x та y. Їхній чисельний склад в момент часу t, де t вимірюється у днях, позначений $x(t)$ та $y(t)$ відповідно. В [1] описано спрощену ситуацію, коли втрати обох сторін, не пов'язані з бойовими діями, відсутні, та обидві сторони не отримують підкріплень. В кожному з трьох досліджуваних випадків записано відповідні системи диференціальних рівнянь відносно невідомих швидкостей $\dot{x}(t)$ та $\dot{y}(t)$ змінення чисельного складу протиборчих сторін, проведено якісні дослідження побудованих математичних моделей, і наведено відповіді на питання про ймовірного переможця.

Ми розглядаємо три моделі бойових дій ланчестерського типу в ситуації, коли втрати обох протиборчих сторін, не пов'язані з бойовими діями, відсутні, але обидві сторони отримують постійне підкріплення. Зокрема, система типу A за таких умов набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} = -by + k, \\ \dot{y} = -cx + m, \end{cases}$$

де коефіцієнт b відображає ефективність кожної одиниці бойових сил сторони y, коефіцієнт c – ефективність кожної одиниці бойових сил сторони x, сталі k і m – швидкості підходу підкріплень протягом дня сторонами x та y відповідно.

Показано, що у досліджуваному випадку зв'язок між чисельним складом протиборчих сторін виражається рівністю

$$k(y - y_0) - \frac{b(y - y_0)^2}{2} = m(x - x_0) - \frac{b(x - x_0)^2}{2},$$

де x_0 та y_0 – чисельний склад сил x та y перед початком бойових дій. Досліджено питання про ймовірного переможця. Аналогічні дослідження проведено для систем типів B і C.

Література

[1] Амелькин В.В. *Дифференциальные уравнения в приложениях.* — М: Наука, 1987. — 160 с.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 13.

ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ ДВОВИМІРНОГО СТАНДАРТНОГО НОРМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ

А. В. Дворний
(КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Функція

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}+\frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}-\frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right)}, \qquad (x,y)\in\mathbf{R}^2, \quad (1)$$

називається щільністю стандартного двовимірного нормального (або гауссівського) вектору (X, Y) з вектором середніх (μ_X, μ_Y) та корреляційною матрицею $\left(\begin{smallmatrix}\sigma_X & \rho\\ \rho & \sigma_Y\end{smallmatrix}\right)$.

Розглянемо випадок $\mu_X = \mu_Y = 0$ і $\sigma_X = \sigma_Y = 1$, коли розподіл називається стандартним нормальним з параметром ρ, $|\rho| < 1$. В цьому випадку функція (1) виглядає наступним чином:

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}} \qquad (x,y)\in\mathbf{R}^2.$$

Оскільки такий розподіл є симетричним, то здається правдоподібним, що ймовірності $P(X > 0, Y > 0)$, $P(X < 0, Y < 0)$, $P(X > 0, Y < 0)$ та $P(X < 0, Y > 0)$ є однаковими й дорівнюють $\frac{1}{4}$. Проте

$$\inf_{|\rho|<1} P(X>0, Y>0) = 0,$$

$$\sup_{|\rho|<1} P(X>0, Y>0) = \frac{1}{2}.$$

Цей факт ми виводимо з наступної рівності

$$P(X>0, Y>0) = \frac{1}{2\pi}\arcsin\rho + \frac{1}{4} \quad (2)$$

Відомими є три метода доведення рівності (2):

(1) за допомогою диференціальних рівнянь [1];
(2) з використанням властивостей скалярного добутку та норми векторів на площині [2];
(3) на основі перетворення Бокса–Мюллера [1].

Один з цих методів буде представлено у доповіді.

Література

[1] https://math.stackexchange.com/questions/255368/px0-y0-for-a-bivariate-normal-distribution-with-correlation-rho
[2] Клесов О. І. *Гауссівські випадкові вектори* // конспект лекцій. — 2019.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 14.

ЗАДАЧА БЮФФОНА ДЛЯ "ГОЛКИ" СКЛАДНОЇ ФОРМИ

О. М. Десницький
(КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Задача Бюффона є першим прикладом обчислення ймовірностей у моделі геометричної ймовірності. З іншого боку, цю задачу можна розглядати як приклад знаходження наближенного значення числа π методом Монте Карло. Класичне формулювання Бюффона наведено нижче.

Задача Бюффона 1. *На площину, на якій проведено паралельні прямі з відстанню між ними d, кидають голку довжини l, $l < d$. Обчислити ймовірність того, що голка перетне хоча б одну з ліній.*

Якщо позначити шукану ймовірність через p, то відповіддю до задачі Бюффона є

$$p = \frac{2l}{\pi d}.$$

У доповіді [1] на україно-норвезькій школі "*Stochastic Analysis, Probability Theory and Related Topics*" задачу Бюффона було розглянуто у загальному випадку.

Задача Бюффона 2. *На площину, на якій проведено паралельні прямі з відстанню між ними d, кидають "голку" довільної форми, довжина "діаметру" якої дорівнює l. Обчислити ймовірність того, що голка перетне хоча б одну з ліній.*

У доповіді буде розглянуто випадок голки, яка має форму трикутника. Якщо позначити шукану ймовірність через $p_\triangle$, то відповіддю до задачі є

$$p_\triangle = \frac{l\sqrt{3}}{\pi d}.$$

Отримана відповідь базується на наступному допоміжному результаті.

Лема 1. *Геометричний центр правильного трикутника ділить його висоту на дві частини з довжинами $2h/3$ та $h/3$*

Література

[1] Klesov O. I. *Cauchy equation and Buffon needle problem.* — Norwegian-Ukrainian Winter School 2019 on Stochastic Analysis, Probability Theory and Related Topics. Uzhgorod. February 19–14, 2019.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 15.

АСИМПТОТИЧНА ЄДИНІСТЬ ОЦІНКИ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ПАРАМЕТРІВ НЕЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ

Т.О. Драбик
(КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Розглянемо модель регресії $X_t = g(t,\theta)+\varepsilon_t, t = \overline{1,T}$, де $g : \mathbb{N}\times\Theta_\gamma \to \mathbb{R}$ – неперервна функція при будь-яких $t \geq 1$, $\Theta_\gamma = \bigcup_{\|a\|\leq 1}(\Theta + \gamma a)$, $\gamma > 0$ – деяке число, $\Theta \in \mathbb{R}^q$ – відкрита множина, що містить монотонно неспадну сім'ю відкритих опуклих множин $\{\Theta_T, T > T_0 > 0\}$, дійсне значення параметра $\theta \in \Theta_T, T > T_0$. Відносно шуму ε припустимо, що

1) $\varepsilon_t = G(\xi_t), t \in \mathbb{Z}$, де $G(x), x \in \mathbb{R}$, – борелева функція, причому $E\varepsilon_0 = 0, E\varepsilon_0^4 < \infty$.

2) $\xi_t, t \in \mathbb{Z}$, є гауссівським стаціонарним часовим рядом, $E\xi_0 = 0$, із коваріаційною функцією $B(t) = \sum_{j=0}^{r} A_j B_{\alpha_j\varkappa_j}(t), r \geq 0, t \in \mathbb{Z}$,
$B_{\alpha_j\varkappa_j}(t) = \frac{\cos\varkappa_j t}{(1+t^2)^{\alpha_j/2}}, \alpha_j \in (0,1)$, $0 \leq \varkappa_0 < \varkappa_1 < ... < \varkappa_r < \pi, \sum_{j=0}^{r} A_j = 1, A_j \geq 0$.

Розглянемо оцінку найменших квадратів (о.н.к.) невідомого параметра $\theta \in \Theta_T$, тобто випадковий вектор $\hat{\theta}_T \in \Theta_T^c$ такий, що мінімізує функціонал
$Q_T(\tau) = \sum_{t=1}^{T}[X(t) - g(t,\tau)]^2$.
Введемо нормовану о.н.к. $\hat{u}_T = d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)$. Тоді нормована о.н.к. $\hat{w}_T = T^{-\frac{1}{2}}\hat{u}_T$ є розв'язком системи рівнянь

$$M_T(w) = \bigtriangledown Q_T(\theta + T^{\frac{1}{2}} d_T^{-1}(\theta) w) = 0. \tag{1}$$

У доповіді наведено умови, за яких $\hat{w}_T$ є єдиним розв'язком системи (1) з імовірністю, що прямує до 1 при $T \to \infty$. Отриманий результат є важливим фрагментом доведення асимптотичної нормальності нормованої о.н.к. $\hat{u}_T$ з використанням теореми Брауера про нерухому точку. Останній результат можна застосувати для отримання асимптотичної нормальності нормованої о.н.к. $\hat{u}_T$ параметрів тригонометричної функції регресії [2]

$$g(t,\theta) = \sum_{k=1}^{N}(A_k\cos\varphi_k t + B_k\sin\varphi_k t), t \in \mathbb{N},$$

$\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, ..., \theta_{3N-2}, \theta_{3N-1}, \theta_{3N}) = (A_1, B_1, \varphi_1, ..., A_N, B_N, \varphi_N)$,
$(A_k)^2 + (B_k)^2 > 0, k = \overline{1,N}$.

Література

[1] A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, M.D. Ruiz-Medina, and B.M. Zhurakovsky *Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors, Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics, 49:1, 2015, 156–186.*

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 16.

ПРО ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ КУРСІВ НА ФМФ „КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО"» НА ПРИКЛАДІ ФОРМУЛИ СТІРЛІНГА

А.С. Ковтун, О.О. Дем'яненко
(КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Сучасним проблемам викладання математики на технічних факультетах присвячено досить багато уваги. Але не менш важливим питанням є сприйняття математики студентами як єдиного цілого, а також вміння застосовувати отримані знання та навички до розв'язання поставлених задач. Покажемо це на прикладі формули Муавра-Стірлінга. Ця формула дає асимптотичне наближення факторіала і подається в курсі математичного аналізу у вигляді: $n! \to \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, n \to \infty, n \in N$. Вперше з цією формулою студенти знайомляться при вивченні числових та функціональних рядів. Зважаючи на те, що формула пов'язана з факторіалом, легко встановлюється зв'язок із гама-функцією.Формула побачила світ у 1730 році, коли Абрахам де Муавр в своїй роботі «Miscellanea Analytic» опублікував отриманий ним результат $n! \approx B\sqrt{n}\left(\frac{e}{n}\right)^n, B = const$, а Дж. Стірлінг встановив значення константи $B = \sqrt{2\pi}$.

Стосовно доведення формули Стірлінга, то варіантів у різних формах існує багато. Студентам 2-го курсу, теж можна запропонувати декілька. Наприклад, зважаючи на те, що $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln k \;\; V \;\; \int_{n-1}^{n} \ln x dx < \ln n < \int_{n}^{n+1} \ln x dx, n \in N$, бо функція $f(x) = \ln x$ - зростаюча, отримуємо оцінку: $n \ln n - n < \ln n! < (n+1)\ln(n+1) - n$. Розглянемо послідовність $\left\{d_n = \ln n! - \left(n + {}^1\!/\!_2\right)\ln n + n, n \in N\right\}$. Використовуючи розклад функції $f(t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$ в ряд Тейлора, можна довести, що задана послідовність є зростаючою та обмеженою зверху, а отже, збіжною до деякої константи. Потенціюючи відповідне граничне співвідношення та застосовуючи до отриманої оцінки $n! \sim \frac{e^C n^{n+{}^1\!/\!_2}}{e^n}$, $C = const$.Використовуючи Валісову формулу, одержимо формулу Стірлінга.

Запропонуємо ще один варіант доведення формули Стірлінга з використанням гама-функції.

$$n! = (n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \left|x = n + t\sqrt{n}\right| = \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n}\int_{-\sqrt{n}}^{\infty}\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-t\sqrt{n}} dt$$

Далі, розглянемо границю підінтегрального виразу, прологарифмувавши його попередньо та розклавши в ряд Тейлора теж отримаємо формулу Стірлінга.

Ці два доведення використовують широкий спектр теоретичних відомостей і при цьому не виходять за межі курсу математичного аналізу, що читається студентам ФМФ «КПІ ім. Ігоря Сікорського» на 1 та 2 курсах.

[1] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика.* — 2001. — 648 с.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 17.

КОНСИСТЕНТНІСТЬ ПЕРІОДОГРАМНОЇ ОЦІНКИ В ЗАДАЧІ ВИЯВЛЕННЯ ПРИХОВАНИХ ПЕРІОДИЧНОСТЕЙ ІЗ ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ

Я.С. Кухарчук, І.В. Орловський
(КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Розглянемо модель регресії

$$X_j = A_0 \cos \varphi_0 j + \varepsilon_j,\ j = \overline{1, N}, \tag{1}$$

де $A_0 > 0$, $\varphi_0 \in (\overline{\varphi}, \underline{\varphi})$, $0 < \underline{\varphi} < \overline{\varphi} < \infty$, а процес ε задовольняє наступним умовам.

A1. $\varepsilon_j,\ j \in \mathbb{Z}$, є локальним перетворенням гауссівського стаціонарного часового ряду ξ_j, $j \in \mathbb{Z}$, тобто $\varepsilon_j = G(\xi_j)$, $G(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – борелева функція, причому $E\varepsilon_0 = 0$, $E\varepsilon_0^4 < \infty$.

A2. $\xi_j,\ j \in \mathbb{Z}$, – стаціонарний гауссівський часовий ряд з нульовим середнім.

Означення **1.** Періодограмою оцінкою частоти φ_0 назвемо таку випадкову величину $\varphi_T \in [\overline{\varphi}, \underline{\varphi}]$, для якої

$$Q_T(\varphi_T) = \max_{\varphi \in [\overline{\varphi}, \underline{\varphi}]} Q_T(\varphi), \quad Q_T(\varphi) = \left| 2N^{-1} \sum_{i=1}^{N} X_j e^{i\varphi j} \right|^2 .$$

Доповідь присвячена дослідженню властивості консистентності періодограмної оцінки φ_T для моделі (1) з випадковим шумом, що задовольняє умовам **A1, A2** та деякій умові сильної залежності.

Асимптотичні властивості періодограмної оцінки параметрів гармонічного коливання в задачі виявлення прихованих періодичностей із неперервним часом та випадковим шумом, що задовольняє умові сильної залежності, розглядались в роботі Б.М. Жураковського та О.В. Іванова [1].

Результати, представлені у доповіді, продовжують дослідження [1], розширюючи їх на випадок дискретного часу.

Література

[1] Ivanov A.V. *Consistency and asymptotic normality of periodogram estimator of harmonic oscillation parameters* / A.V. Ivanov, B.M. Zhurakovskyi // Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2013. — V. 89. — P. 30–39.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 18.

ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛЕЙ СТОХАСТИЧНОЇ ВОЛАТИЛЬНОСТІ ДЛЯ АНАЛІЗУ СМАЙЛ ЕФЕКТУ

М.О. Леськів
(Національний університет «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна)

Здатність прогнозування волатильність фінансових активів є важливою передумовою для вибору портфеля та управління активами, а також для ціноутворення. Хоча більшість дослідників вважають, що волатильність є передбачуваною змінною для багатьох ринків активів, проте вибір адекватної моделі залишається відкритою проблемою.

Найбільш популярним для моделювання волатильності є клас моделей авторегресійної умовної гетероскедастичності (ARCH), що використовуються для опису і моделювання часових рядів. Їх використовують тоді, коли умовна дисперсія часового ряду (дисперсія розрахована по минулим значенням ряду) не є константою і залежить від різних параметрів на кожному проміжку часу.

У своїй роботі на реальних статистичних даних я розглянула і побудувала декілька з найбільш популярних моделей передбачуваної волатильності в класі ARCH: авторегресивна умовно гетероскедастична модель (ARCH); узагальнена авторегресійна модель гетероскедастичності(GARCH); експоненціальна узагальнена авторегресійна модель гетероскедастичності(EGARCH). В процесі дослідження цих моделей впровадила ідею кривої впливу новин, яка характеризує вплив шоків минулої доходності на неявну волатильність.

Для цих моделей спрогнозувала очікувану волатильність та визначила криву впливу новин для кожної з моделей, де показала ефект "посмішки волатильності"(smile effect). За допомогою кривої впливу оцінила та порівняла властивості різних моделей в класі ARCH.

Література

[1] Marius Matei *Assessing Volatility Forecasting Models: Why GARCH Models Take The Lead* // Romain Journal of Economic Forecasting, 2009
[2] Robert F. Engke, Victor K. Ng *Measuring and Testing the Impact of News on Volatility.* // The Jornal of Finance, 1993

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 19.

КОНСИСТЕНТНІСТЬ ПЕРІОДОГРАМНОЇ ОЦІНКИ ЧАСТОТ ДВОВИМІРНОГО ГАРМОНІЧНОГО КОЛИВАННЯ

О.В. Лимар
(КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

У статті [1] доведено консистентність оцінки найменших квадратів параметрів двовимірної тригонометричної моделі регресії, а стаття [2] містить доведення асимптотичної нормальності цієї ж оцінки. Ціллю подальшого дослідження вказаної моделі є доведення консистентності періодограмної оцінки частот.

Нехай спостерігається випадковий процес

$$X(t_1,t_2) = A_0\cos(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2) + \varepsilon(t_1,t_2),\ (t_1,t_2)\in[0,T]^2, \tag{1}$$

де $A_0 > 0$, $\theta_0 = (\lambda_0,\mu_0) \in \Lambda\times M = (\underline{\lambda},\overline{\lambda})\times(\underline{\mu},\overline{\mu})$, $0<\underline{\lambda}<\overline{\lambda}<\infty$, $0<\underline{\mu}<\overline{\mu}<\infty$, а процес $\varepsilon(t_1,t_2)$ задовольняє наступній умові.

N. ε – майже напевно (м. н.) вибірково неперервне однорідне гауссівське поле з нульовим середнім, коваріаційна функція якого $B(t_1,t_2) = \mathsf{E}\varepsilon(t_1,t_2)\varepsilon(0,0)$, $(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$, задовольняє одну з умов:

(i) поле ε є ізотропним та $B(t_1,t_2) = \tilde{B}(\|t\|) = L(\|t\|)\|t\|^{-\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$, де $L(\rho)$, $\rho>0$, монотонно неспадна повільно змінна на нескінченності функція, $t=(t_1,t_2)$, $\|t\| = (t_1^2+t_2^2)^{1/2}$.

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2}|B(t_1,t_2)|dt_1dt_2 < \infty$.

Означення **1.** Періодограмною оцінкою частоти θ_0 назвемо такий випадковий вектор $\theta_T\in\Lambda\times M$, для якого

$$Q_T(\theta_T) = \max_{\theta\in\Lambda\times M} Q_T(\theta),$$

$$Q_T(\theta) = |2T^{-2}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)e^{i(\lambda t_1+\mu t_2)}dt_1dt_2|^2.$$

Теорема 1. *Якщо для моделі (1) виконується умова* **N**, *то* $\theta_T\to\theta_0$ *м. н. при* $T\to\infty$.

Література

[1] Іванов О.В., Маляр О.В. *Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів синусоїдної моделі текстурованої поверхні* // Теорія ймовірностей та математична статистика — 2017. — № 97. — С. 72–82.

[2] Іванов О.В., Лимар О.В. *Асимптотична нормальність оцінки найменших квадратів параметрів двовимірної синусоїдної моделі спостережень* // Теорія ймовірностей та математична статистика — 2019. — № 100. — (у друці).

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 20.

ПОВЕРХНЯ МАКСИМУМІВ СПЕКТРАЛЬНИХ ЩІЛЬНОСТЕЙ MA(2)-ПРОЦЕСІВ ТА ВЕЛИКІ ВІДХИЛЕННЯ ОЦІНКИ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

С. П. Лиховид
(КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Припустимо, що спостерігається часовий ряд

$$X_t = a_t(\theta) + \varepsilon_t, t \geq 1,$$

де неперервні функції $a_t(\tau), \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_q) \in \Theta^c \in \mathbf{R}^q, t \geq 1$, неперервно диференційовні за $\tau \in \Theta$, Θ - обмежена відкрита опукла множина, що містить істине значення параметра θ. Нехай випадковий шум ε є оборотним $MA(2)$-процесом, а саме $\varepsilon_t = \xi_t + b_1\xi_{t-1} + b_2\xi_{t-2}, t \in \mathbf{Z}$, де $\{\xi_t, t \in \mathbf{Z}\}$ - білий субгауссівський шум [1], $E\xi_t = 0, E\xi_t^2 = \sigma_\xi^2$. Спектральна щільність ε має вигляд

$$f(\lambda, b_1, b_2) = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi}|b(e^{i\lambda})|^2, \lambda \in [-\pi; \pi],\ b(z) = 1 + b_1 z + b_2 z^2 \ ,$$

причому b_1, b_2 набувають значення в області

$$S_0 = \{(b_1, b_2) \in \mathbf{R}^2 : b_1 + b_2 > -1, b_1 - b_2 < 1, b_2 < 1\}.$$

Позначимо $d_{i\tau}^2(\theta) = \sum_{t=1}^T (\frac{\partial}{\partial\theta_i} a_t(\theta))^2$, $d_T^2 = diag(d_{iT}^2(\tau), i = \overline{1, q})$. Нехай існують числа $0 < c_0 < c_1 < \infty$ такі, що $\forall\theta \in \Theta$ та $u, v \in d_T(\theta)(\Theta^c - \theta)$

$$c_0||u - v||^2 \leqslant \sum_{t=1}^T [(\theta_t + d_T^{-1}(\theta)u) - (\theta_t + d_T^{-1}(\theta)v)] \leqslant c_1||u - v||^2, T > T_0.$$

Тоді існують константи $B, b_0 > 0$ такі, що для $T > T_0, R > R_0$ оцінка найменших квадратів $\hat{\theta_T}$ параметра θ_0 має властивість [2]

$$P\{||d_T(\theta)(\hat{\theta_T} - \theta)|| \geq R\} \leq B \exp\{-bR^2\},$$

причому для будь-якого $\beta > 0$ константу B можна обрати так, що

$$b \geq c_0(8\sigma_\xi^2(1 + q)f_0(b_1, b_2))^{-1} - \beta,\ f_0(b_1, b_2) = \max_{\lambda \in [-\pi; \pi]} f(\lambda, b_1, b_2).$$

Ми знайшли явну формулу поверхні $f_0(b_1, b_2),\ b_1, b_2 \in S_0$, щоб зрозуміти як змінюється константа b зі зміною параметрів b_1, b_2 і для яких значень $b_1, b_2 \in S_0$ константа b набуває найбільших значень.

Література

[1] В. В. Булдыгин, Ю. В. Козаченко. *Метрические характеристики случайных величин и процесов*, ТВиМС, 1998, 290 с.

[2] A.V. Ivanov *Large deviatons of regression parameter estimate in the models with stationary sub-Gaussian noise, Teor. Imovir. ta Matem. Statist.*, No.95, 2016, pp. 92-100.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 21.

ПОБУДОВА АСИМПТОТИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНОГО СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ m-ГО ПОРЯДКУ

О. В. Михальчук, С. П. Пафик
(НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

Розглянуто лінійне сингулярно збурене диференціальне рівняння вигляду

$$\varepsilon^m \frac{d^m y}{dt^m} + \varepsilon^{m-1} a_{m-1}(t;\varepsilon) \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \cdots + \varepsilon a_1(t;\varepsilon) \frac{dy}{dt} + a_0(t;\varepsilon) y = 0, \tag{1}$$

в якому $y(t;\varepsilon)$- шукана функція, а $a_i(t;\varepsilon), i = \overline{0, n-1}$, – відомі функції, $t \in [0;T]$, ε - малий дійсний параметр, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0], \varepsilon_0 \ll 1$.

Диференціальне рівняння (1) досліджено при виконанні наступних умов:

1. Функції $a_i(t;\varepsilon), i = \overline{0, n-1}$, представляються на відрізку $[0;T]$ у вигляді асимптотичних рядів за степенями малого параметра ε:

$$a_i(t;\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k a_i^{(k)}(t), i = \overline{0, n-1}. \tag{2}$$

2. Коефіцієнти $a_i^{(k)}(t), i = \overline{0, n-1}, k = 0, 1, \ldots,$ рядів (2) нескінченно диференційовні на відрізку $[0;T]$.

3. Характеристичне рівняння $\lambda^m + a_{m-1}^{(0)}(t)\lambda^{m-1} + \cdots + a_1^{(0)}(t)\lambda + a_0^{(0)}(t) = 0$ має на відрізку $[0;T]$ m простих коренів $\lambda_i(t), i = \overline{1, m}$.

4. $Re\lambda_i(t) < 0, i = \overline{1, m}, \forall t \in [0;T]$.

При виконанні умов 1–4 побудовано формальний розв'язк рівняння (1) у вигляді функції

$$y(t;\varepsilon) = \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda(\tau;\varepsilon) d\tau\right), \tag{3}$$

в якій $\lambda(t;\varepsilon)$ – невідома функція, яка представляється у вигляді формального ряду за степенями параметра ε. Коефіцієнти цього ряду визначаються таким чином, щоб (3) перетворювала рівняння (1) в тотожність.

В результаті вдалося побудувати m лінійно незалежних розв'язків рівняння (1), а також, використовуючи методи робіт [1–2], доведено, що побудовані формальні розв'язки є асимптотичними розвиненнями точних лінійно незалежних розв'язків рівняння (1) при $\varepsilon \to 0$.

Література

[1] Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. *Диференціальні рівняння.* — Київ: Либідь, 2003. — 599 с.
[2] Шкіль М.І. *Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях.* — Київ: Вища школа, 1971. — 227 с.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 22.

ЛЕОН ІССЕРЛІС: УКРАЇНСЬКИЙ МАТЕМАТИК

О. Митрофанова
(КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Леон Іссерліс народився в Богуславі, під Києвом в червні 1881 році. У 1892 році він разом зі своєю овдовілою матір'ю, старшим братом та двома сестрами переїхав до Англії.

У 1904 році він закінчив Кембріджський університет й почав працювати на математичному факультеті Державного технічного інституту в Лондоні. Після Першої світової війни в управлінні судноплавства Великобританії вирішили, що ця організація повинна мати постійний штат статистиків. Одним з співробітників став Іссерліс, якого рекомендував Карл Пірсон. У 1916 році Іссерліс отримав ступінь доктора наук.

Головними досягненнями Іссерліса, як співробітника управління судноплавства, були створені індекс вантажоперевезень і дослідження внесків судноплавства в платіжний баланс країни. З початку Другої світової війни Іссерліс працював над створенням тарифів для оренди британських судів, більшість з яких були націоналізовані урядом. Більшість робіт, які Іссерліс зробив для управлінні судноплавства є неопублікованими або анонімними, хоча управління отримало велику користь від його рекомендацій.

Статистичні роботи Іссерліса можна підрозділити на три основні категорії: наукові роботи у галузі статистики, роботи в області судноплавства та його роботи у галузі медицини та охорони здоров'я.

Іссерліс опублікував тільки одну математичну статтю, не пов'язану зі статистикою (1923 рік). Найбільш знаними серед його робіт є дві, опубліковані у 1916 та 1918 роках, у яких він довів формулу, яку зараз називають формулою Іссерліса.

Доктор Леон Іссерліс помер 14 березня 1966 року.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 23.

ПРО ЦЕНТРАЛЬНУ ГРАНИЧНУ ТЕОРЕМУ АЛАНА ТЮРІНГА

Я. Г. Мокану
(КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Англійський математик Алан Тюрінг (1912–1954) є знаменитим своїми роботами у математичній логіці та криптографії. Загальновідомими його досягненнями є так звана (уявна) машина Тюрінга та розшифровка коду німецької шифрувальної машини "Енігма". З іншого боку, мало хто може пов'язати його ім'я з теорією ймовірностей або математичною статистикою, оскільки зовсім невідомою залишається його робота, в якій він незалежно він фінського математика Я. Ліндеберга довів теорему, яку тепер називають центральною граничною теоремою Ліндеберга.

Центральна гранична теорема завжди привертала увагу багатьох математиків, оскільки, окрім того, що це просто цікавий математичний результат, вона ще є досить потужним інструментом при розв'язанні багатьох задач. Один з варіантів центральної граничної теореми у 1935 році "перевідкрив" Алан Тюрінг. Цю роботу Тюрінга не було опубліковано, оскільки він дізнався про більш ранішню роботу Ліндеберга й не вважав за потрібне повторно публікувати відомий результат. Проте доведення Тюрінга відрізнялось від існуючого на той час, тому його метод становить інтерес навіть зараз.

До наших часів дійшов рукопис його роботи, доступною є електронна версія. Базуючись на тексті рукописа Тюрінга, в цій доповіді наведено коротку схему виведення достатніх умов за Тюрінгом, побудованні на їх основі критерії, які мають більш пряме застосування, а також приклад, коли вони не працюють.

Література

[1] Zabell S. L. *Alan Turing and the Central Limit Theorem.* //The American Mathematical Monthly. — 1995. — vol. 102, № 6. — pp. 483-494.

[2] Turing A. *On the Gaussian Error Function.* //Електронний режим доступу. www.turingarchieve.org/browse.php/C/28

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 24.

ПРО ОДНУ ВИПАДКОВУ ВЕЛИЧИНУ, ВИЗНАЧЕНУ В ТЕРМІНАХ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ РЯДАМИ ЕНГЕЛЯ

М.П. Мороз
(НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

Означення **1.** Рядом Енгеля називається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(p_1+1)\cdot\ldots\cdot(p_n+1)}$, де $p_n\in\mathbb{N}$, $p_{n+1}\geq p_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Відомо [1], що кожне число з $(0;1]$ єдиним чином розкладається в ряд Енгеля, тобто для $\forall x\in(0;1]$ існує єдина неспадна послідовність натуральних чисел $(p_n(x))$ така, що $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(p_1(x)+1)\cdot\ldots\cdot(p_n(x)+1)}$. В силу єдиності представлення числа рядом Енгеля, функція $p_n=p_n(x)$ є коректно визначеною на $(0;1]$ для кожного $n\in\mathbb{N}$.

Ряди Енгеля використовуються для розвитку метричної, ймовірнісної та фрактальної теорії дійсних чисел, вивчення сингулярних ймовірнісних мір [1, 2].

Нехай маємо ймовірнісний простір $(\Omega,\mathcal{F},\lambda)$, де $\Omega=(0;1]$, λ – міра Лебега, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин Ω.

Лема 1. *Функції p_n та $\dfrac{1}{p_n+1}$ є випадковими величинами на $(\Omega,\mathcal{F},\lambda)$.*

Теорема 1. *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{p_n(x)+1}$ збіжний майже скрізь на Ω (в сенсі міри Лебега).*

На множині $\Omega^*\subset\Omega$ збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n(x)+1}$ визначимо функцію

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n(x)+1}.$$

Нехай $\mathcal{F}^*$ – σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин Ω^*.

Теорема 2. *Функція ψ є випадковою величиною на $(\Omega^*,\mathcal{F}^*,\lambda)$, математичне сподівання якої дорівнює 1, а дисперсія дорівнює $\dfrac{\pi^2}{6}-1$.*

Література

[1] Працьовитий М.В., Гетьман Б.І. *Ряди Енгеля та їх застосування* // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006, № 7. — С. 105–116.

[2] Renyi A. *A new approach to the theory of Engel's series* // Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Math. — 1962. — Vol. 5. — Pp. 25–32.

[3] Shallit J.O. *Metric theory of Pierce expansions* // Fibonacci Quart. — 1986. — № 1. — Pp. 2–40.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 25.

ЕКОНОМЕТРИЧНИЙ АНАЛІЗ ІНВЕСТИЦІЙ В РЕКЛАМУ ТА ЇХ ВПЛИВ НА ПРИБУТОК ПІДПРИЄМСТВА

В.В. Москалець
(Національний Університет “Києво-Могилянська Академія”, Київ, Україна)

Наразі дуже важливими для компаній є ефективні інвестиції у рекламу, тож метою роботи є дослідження залежності прибутків та реклами та побудова моделей, що її описують.

По-перше, побудуємо мультиплікативну модель, що описує фактори прибутку підприємства[1]:

$$y = a^L \cdot A^L \cdot d^L,$$

де a - об'єм інвестицій у рекламу, A - попередні інвестиції у рекламу, d - об'єм продажів.

По-друге, застосуємо метод декомпозиції часового ряду та дослідимо тренд, сезонність та бізнес циклічніть підприємства[2]:

$$y_t = q_t \cdot u_t \cdot s_t \cdot r_t,$$

де $t = 1, ..., T$, q - тренд, v - бізнес-цикл, s - сезонність, r - випадкова величина.

У роботі порівнюються результати моделей для кількох компаній з одного сигменту ринку та встановлюється статистично значуща залежність чи незалежність впливів реклами на продажі[3].

Література

[1] Лук'яненко І.Г., Краснікова Л.І. *Економетрика* //К.: Товариство “Знання "КОО, 1998. – 494 с.; (390).
[2] Козьменко О.В, Козьменко О.В *Економіко-математичні методи та моделі (економетрика).* — Суми: Унаверситецька книга, 2014. – 406 с.
[3] Эрнст Р. Берндт *Практика эконометрики: класика и современность.* — М.: Юнити-Дана, 2005. – 863 с.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 26.

ВЛАСТИВОСТІ r-УЗАГАЛЬНЕНИХ БЕТА-ФУНКЦІЙ ТА ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

О.В. Овчаренко
(КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Метою доповіді є вивчення властивостей нових r-узагальнених гіпергеометричних і r- узагальнених бета-функцій. Для дослідження цих функцій застосовано методи теорії спеціальних функцій, теорії інтегральних перетворень і операторів дробового інтегрування. Отримано співвідношення для нових введених функцій з дробовими інтегральними операторами Сайго. У дослідженні використано поняття добутку Адамара для степеневих рядів. Також була встановлена формула для бета-перетворення нової r-узагальненої гіпергеометричної функції. Інтегральні перетворення та дробові інтегральні формули, що містять гіпергеометричні функції, цікаві самі по собі і відіграють важливу роль у застосуваннях. Аналіз сучасної літератури з теорії узагальнень гіпергеометричних функцій вказує на те, що дослідження в теорії гіпергеометричних функцій та їх застосувань є актуальним та важливими, оскільки запровадження різноманітних узагальнень уже відомих спеціальних функцій, їх всебічне вивчення і дослідження дають змогу суттєво розширити клас задач, розв'язки яких можна побудувати в замкненому вигляді. Таким чином, для розширення кола математичних задач, що розв'язуються за допомогою методів теорії диференціальних та інтегральних рівнянь і теорії інтегральних перетворень, доцільним і актуальним є запровадження нових узагальнень функцій гіпергеометричного типу, узагальнених інтегральних операторів з такими функціями в ядрі, тощо. Серед спеціальних функцій важливе місце посідають бета-функції завдяки їх широкому застосуванню як у теорії спеціальних функцій, так і в багатьох розділах прикладної математики. В статті [1] запроваджено таке узагальнення ейлерового інтегралу I-го роду (r-узагальнення бета-функції)

$$\tilde{B}(x,y;r) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt. \tag{1}$$

Література

[1] Вірченко Н.О. *Узагальнення ейлерового інтегралу першого роду* // Наукові Вісті НТУУ "КПІ". — 2016. — № 4. — С. 27–31.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 27.

НІДЕ НЕ МОНОТОННІ СИНГУЛЯРНІ ФУНКЦІЇ НЕОБМЕЖЕНОЇ ВАРІАЦІЇ

Р. Ю. Осауленко
(КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Нехай маємо послідовність алфавітів $A_3 = \{0, 1, 2\}$, $L = A_3 \times A_3 \times \dots \times A_3 \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавітів; $Q_3^* = ||q_{i,j}||$ – матриця з нескінченною кількістю стовпців (k-ий стовпець містить 3 елементи), $i \in A_3$, $j \in \mathbb{N}$, така, що задовольняє наступні умови

(1) $0 < q_{i,j} < 1$ для всіх $i \in A_3$, $j \in \mathbb{N}$;
(2) $\sum_{c=0}^{m_j} q_{c,j} = 1$ для всіх $j \in \mathbb{N}$;
(3) $\prod_{j=1}^{\infty} \sup\limits_{i \in A_3} \{q_{i,j}\} = 0$.

Для будь якого дійсного числа $x \in [0;1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$, така що $x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_n n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j} \right) = \Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}$, де $\beta_{0,n} = 0$, $\beta_{c,n} = \sum_{i=0}^{n-1} q_{i,n}$, $c \in A_n$.

Розглянемо матрицю $G_3^* = ||q_{i,j}||$, де $g_{0n} > 0$ $g_{2n} > 0$, $g_{1n} \le 0$, $|g_{in}| < 1$, $g_{0n} + g_{1n} + g_{2n} = 1$ і $\prod\limits_{j=1}^{\infty} \max\limits_{i=0,1,2} |g_{ij}| = 0$.

Довільне число $x \in [0;1]$ можна представити у вигляді:

$$x = \delta_{\alpha_1 1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\delta_{\alpha_n n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j} \right) = \Delta^{G_3^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots},$$

де $\alpha_i \in A_3$, $\delta_{0n} = 0$, $\delta_{1n} = g_{0n}$, $\delta_{2n} = g_{0n} + g_{1n}$.

Нехай $N_j(x, n)$ – це кількість цифр j серед перших n цифр Q_3^*-зображення числа $x = \Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}$. Якщо існує границя $\nu_j^{Q_3^*}(x) = \lim\limits_{n \to \infty} n^{-1} N_j(x, n)$, то її значення називається *частотою цифри* $j \in A$ в Q_3^*-зображенні числа x.

Значення $\overline{\nu}_j^{Q_3^*}(x) = \limsup\limits_{n \to \infty} n^{-1} N_j(x, n)$, $\underline{\nu}_j^{Q_3^*}(x) = \liminf\limits_{n \to \infty} n^{-1} N_j(x, n)$ називаються *верхньою та нижньою частотами цифри* j Q_3^*-зображення числа x відповідно.

Нехай при $\in A_3$:

$$p_c := \begin{cases} \left(\limsup\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{g_{c,j}}{q_{c,j}} \right| \right)^{\overline{\nu}_c} & \text{при } \limsup\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{g_{c,j}}{q_{c,j}} \right| \ge 1; \\ \left(\limsup\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{g_{c,j}}{q_{c,j}} \right| \right)^{\underline{\nu}_c} & \text{при } \limsup\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{g_{c,j}}{q_{c,j}} \right| < 1; \end{cases}$$

Теорема 1. *Нехай існує таке $\xi > 0$, що $q_{c,n} \ge \xi$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $c \in A_3$. Якщо $\xi^{\overline{\eta_1}^{-1} - \underline{\eta_1}^{-1}} \prod\limits_{c=0}^{2} p_c < 1$, тоді майже скрізь, у розумінні міри Лебега, $f'(x) = 0$, де $f\left(\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}\right) = \Delta^{G_3^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}$.*

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 28.

КОСІНОР - АНАЛІЗ

М.Д. Плотніков
(Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна)

Модель косинор-аналіза розглядає деякий процес U_t як суму періодичного сигнала $f(t)$ та випадкової похибки X_t:

$$U_t = f(t) + X_t \tag{1}$$

Оскільки функція від часу $f(t)$ є періодичною, доцільно вважати, що вона має вигляд

$$f(t) = h + \sum_{k=1}^{m} A_k \cos(\omega_k t + \phi_k) = h + \sum_{k=1}^{m} (x_k \cos(\omega_k t) + y_k \cos(\omega_k t)) \tag{2}$$

Випадковий процес X_t вважається стаціонарним з відомою функцією коваріації $R(t)$. Задача косинор-аналізу полягає в тому, щоб дослідити функцію $f(t)$ за допомогою ансамблю реалізацій $\{u_{t_k}\}_j, k = 1, ..., n, j = 1, ..., m$ процесу U_t.

Процедура косинор-аналіза складається з двох етапів:

Однокомпонентний косинор-аналіз. Для кожного часового ряду $(t_1, ..., t_n)_j$ та відповідного ряду реалізацій $(u_{t_1}, ..., u_{t_n})_j$ окремо розглядаємо наступну регресійну модель:

$$f(t) = h + cos(\omega t + \phi) + X_t = h + x\cos(\omega t) + y\cos(\omega t) + X_t \tag{3}$$

Для знаходження ОМП знаходимо екстремальні значення функції правдоподібності

$$L_u(\vec{v}, x, y, h) \sim \exp(-\frac{1}{2}(\vec{v} - \mu)^T \Sigma^{-1}(\vec{v} - \mu)) \tag{4}$$

та будуємо відповідну систему рівнянь $xa_{i1} + ya_{i2} + ha_{i3} = a_{i0}$, де i=1;2;3 За допомогою вказаної системи знаходимо оцінки параметрів (A, ϕ, h). Будуємо еліпс помилок для кожного часового ряда.

Середньо вибірковий косінор-аналіз. Знаходяться усереднені оцінки параметрів кожного доданка в сумі (2). Знаходяться середньоквадратичні похибки.

Література

[1] Хальберг Ф. *Хронобиология* //Кибернетический сборник — 1972. — № 5
[2] Емельянов И. П. *Форма колебаний в биоритмологии.* — Новосибирск: Наука, 1976.
[3] Емельянов И. П. *Структура биологических ритмов человека в процессе адаптации. Статистический анализ и моделирование.* — Новосибирск: Наука, 1986.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 29.

ПОБУДОВА АСИМПТОТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

В. Б. Посудевський, С. П. Пафик
(НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

Розглянуто крайову задачу

$$\varepsilon^2 \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon A(t;\varepsilon)\frac{dx}{dt} + B(t;\varepsilon)x = f(t;\varepsilon)\cdot \exp\left(\varepsilon^{-1}\int\limits_0^t \alpha(\tau)d\tau\right), \tag{1}$$

$$x(0;\varepsilon) + x(T;\varepsilon) = x_0(\varepsilon), \frac{dx(t;\varepsilon)}{dt}\Big|_{t=0} + \frac{dx(t;\varepsilon)}{dt}\Big|_{t=T} = x_1(\varepsilon), \tag{2}$$

в якій $x(t;\varepsilon)$- шуканий, а $f(t;\varepsilon)$ – відомий n-вимірні вектори, $A(t;\varepsilon)$, $B(t;\varepsilon)$ - відомі квадратні матриці n-го порядку, $t \in [0;T]$, ε - малий дійсний параметр, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0], \varepsilon_0 \ll 1$.

Крайову задачу (1), (2) досліджено при виконанні наступних умов:

1. Матриці $A(t;\varepsilon), B(t;\varepsilon)$ і вектор $f(t,\varepsilon)$ допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра ε:

$$A(t;\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k A_k(t), B(t;\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k B_k(t), f(t;\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k f_k(t) \tag{3}$$

2. Коефіцієнти матриць $A_k(t), B_k(t)$ і функція $\alpha(t)$ нескінченно диференційовні на відрізку $[0;T]$.

3. Квадратична в'язка матриць $P(t,\lambda) = \lambda^2 E + A_0(t)\lambda + B_0(t)$ має на відрізку $[0;T]$ $2n$ різних власних значень $\lambda_i(t), i = \overline{1,2n}$.

4. Вирази $x_0(\varepsilon), x_1(\varepsilon)$ представляються у вигляді асимптотичних розвинень за степенями ε, тобто

$$x_0(\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k x_0^{(k)}, x_1(\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k x_1^{(k)}.$$

5. $Re\lambda_i(t) < 0, i = \overline{1,2n}, \forall t \in [0;T]$.

При виконанні умов 1–5 побудовано формальний розв'язок крайової задачі (1), (2), а також, використовуючи методи робіт [1–2], доведено, що побудований формальний розв'язок є асимптотичним розвиненням точного розв'язку задачі (1), (2) при $\varepsilon \to 0$.

Література

[1] Самойленко А.М.,Шкіль М.І., Яковець В.П. *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням.* — Київ: Вища школа, 2000. — 294 с.
[2] Шкіль М.І. *Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях.* — Київ: Вища школа, 1971. — 227 с.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 30.

ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ СТРАТЕГІЙ ДЛЯ РІЗНОВИДУ СИМЕТРИЧНОЇ ГРИ З НАКОПИЧЕННЯ КАПІТАЛУ

І.В. Силенко
(НаУКМА, Київ, Україна)

В науковій роботі роглядається економічна гра з накопичення капіталу. Одним з результатів існування рівноваги Неша в такій грі із симетричними діями гравців, непереврвним простором станів і виборів, нескінченним горизонтом і дисконтованістю є стаття Балбуса і Новака[1]. Проте в ній накладені досить спецефічні умови на розподіл переходу між станами - функція переходу є комбінацією скінченної кількості стохастичних ядер, залежних лише від поточного стану.

Структурною відмінністю розгляданої мною гри G є припущення щодо розподілу переходу, а саме що новий стан гри залежить від інвестиції гравців:

$$s' = \left(s - \sum_{i=1}^{m} x_i\right) \cdot \xi,$$

де $s > 0 -$ поточний стан гри, $s' -$ новий стан, $m -$ кількість гравців, $x_i -$ ресурс використаний кожним гравцем, а $\xi -$ певна додатна випадкова величина зі скінченним математичним сподіванням.

Дослідити питання існування рівноваги Неша і оптимальних стаціонарних стратегій для загального випадку гри G досить непросто, проте вдалося довести, що якщо накласти певні умови на функцію корисності, то рівновага Неша в такій грі точно існуватиме.

Теорема 1. *В описаній грі з накопичення капіталу G, де кожен гравець має функцію корисності $u(x)$, існує рівновага Неша у стаціонарних стратегіях, якщо:*

(1) $u(x) = const \cdot y(x)$, де $y(x)-$ мультиплікативна функція на $\mathbb{R}^+$, тобто

$$y(A \cdot B) = y(A) \cdot y(B), \quad (A > 0, B > 0).$$

(2) $u'(x) = const \cdot z(x)$, де $z(x)-$ мультиплікативна функція на $\mathbb{R}^+$, яка крім того є неперервною з областю значень $\mathbb{R}^+$, і диференційованою, причому $u'(x) \neq 0$.

(3) $0 < \beta \cdot y(1) \cdot E\left(y\left(\xi\right)\right) < 1$.

Теорема 1 є достатньою умовою існування рівноваги для вузького класу функцій корисності, проте непорожнього. Зокрема, прикладом такої функції, яка задовільняє умови Теореми 1 є функція $u(x) = \sqrt{x}$.

Література

[1] Balbus Ł., Nowak A. *Existence of perfect equilibria in a class of multigenerational stochastic games of capital accumulation* // Automatica — 2008. — vol. 44, № 6. — p. 1471–1479.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 31.

УЗАГАЛЬНЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО АНІЗОТРОПНОГО ВАГОВОГО РІВНЯННЯ

А. І. Соловйова
(Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, Україна)

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена область з межею $\partial\Omega$; $q_i \in (1,2)$, $i = 1,2$ – задані дійсні числа (показники анізотропії). Нехай $a_i(x,\xi) = |x|^{q_i}\,|\xi_i|^{q_i-1}\operatorname{sign}\xi_i$, де $x \in \Omega$, $\xi = (\xi_1;\xi_2) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1,2$.

Введемо ваговий анізотропний простір Соболєва

$$W^{1,q_1,q_2}(\Omega) = \left\{u \in L^1(\Omega) : |x|^{q_i}|D_i u|^{q_i} \in L^1(\Omega), i = 1,2\right\}.$$

Він є банаховим простором відносно норми

$$\|u\|_{W^{1,q_1,q_2}(\Omega)} = \int\limits_\Omega |u|dx + \left(\int\limits_\Omega |x|^{q_1}|D_1 u|^{q_1}dx\right)^{1/q_1} + \left(\int\limits_\Omega |x|^{q_2}|D_2 u|^{q_2}dx\right)^{1/q_2}. \tag{1}$$

Через $\overset{\circ}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)$ позначимо замикання множини $C_0^\infty(\Omega)$ у просторі $W^{1,q_1,q_2}(\Omega)$. Простір $\overset{\circ}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)$ є банаховим простором відносно норми, індукованої нормою (1). Крім того, простір $\overset{\circ}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)$ є рефлексивним (див. [1]).

Розглянемо таку задачу Діріхле:

$$-D_1(a_1(x,\nabla u)) - D_2(a_2(x,\nabla u)) = f \quad \text{в } \Omega, \tag{2}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{3}$$

Означення **1.** Нехай $f \in L^2(\Omega)$. Узагальненим розв'язком задачі Діріхле (2), (3) називатимемо функцію $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)$ таку, що для довільної функції $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q_1,q_2}(\Omega)$ справедлива інтегральна тотожність

$$\int\limits_\Omega (a_1(x,\nabla u)D_1 v + a_2(x,\nabla u)D_2 v)\,dx = \int\limits_\Omega f v\,dx.$$

Теорема 1. *Існує єдиний узагальнений розв'язок задачі Діріхле* (2), (3).

Доведення теореми 1 спирається на відому теорему Браудера-Мінті про розв'язність нелінійних операторних рівнянь з монотонними операторами в рефлексивних банахових просторах (див. [2]).

Література

[1] Ковалевский А.А., Горбань Ю.С. *Вырождающиеся анизотропные вариационные неравенства с L^1-данными* // Донецк, ИПММ НАН Украины, препринт. — 2007. — 92 с.

[2] Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* — М: Мир, 1978. — 336 с.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 32.

ВЛАСТИВОСТІ ЦІНОВОЇ ДИНАМІКИ ДЕЯКИХ ФІНАНСОВИХ ІНСТРУМЕНТІВ, ЩО МОДЕЛЮЮТЬСЯ ЗА ДОПОМОГОЮ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Б.М. Танасюк, О.А. Тимошенко
(НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», Київ, Україна)

Для аналізу ціноутворення різноманітних фінансових інструментів досить успішно використовуються методи та моделі стохастичного аналізу та теорії звичайних диференціальних рівнянь. Цінні папери, в які можна вкладати фінансові кошти з метою отримати прибуток, а саме акції і облігації, відомі всім, навіть людям, далеким від світу фінансів. Обидва види паперів є інструментами фондового ринку. Акції належать до ризикових активів [1]. Динаміка зміни ціни акції $(S(t), t \geq 0)$ найкраще моделюється за допомогою стохастичного диференціального рівняння [2]

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + r dW(t)), \tag{1}$$

де $\mu \in R^+$ – відсоткова ставка, $r \in R^+$ – показник волатильності, $W(t)$ - стандартний вінерівський процес.

Облігація є безризиковим активом. Облігація приносить фіксований дохід, що обмежується відсотковою ставкою $r \in R^+$, зазначеною в договорі. Динаміку ціни облігації $(B(t), t \geq 0)$ можна зобразити за допомогою детермінованого диференціального рівняння [3]

$$dB(t) = rB(t)dt. \tag{2}$$

Ми досліджуємо деякі властивості ціни акції, яка дисконтується ціною облігації.

Лема 1. *Нехай $S(t)$ і $B(t)$ – ціни акції і облігації відповідно. Ціна акції у початковий момент часу $S(0) = a$ ум. од.та має динаміку (1), ціна облігації $B(0) = b$ ум. од. з динамікою (2). Тоді середнє очікування ціни акції дисконтованої ціною облігації, має наступні властивості:*

- *якщо $\mu > r$, то $\lim\limits_{t\to\infty} E[\frac{S(t)}{B(t)}] = \infty$ (вигідніше купувати акції);*
- *якщо $\mu < r$, то $\lim\limits_{t\to\infty} E[\frac{S(t)}{B(t)}] = 0$ (краще купувати облігації);*
- *якщо $\mu = r$, то $\lim\limits_{t\to\infty} E[\frac{S(t)}{B(t)}] = \frac{a}{b}$.*

Література

[1] Голіченко І.І., Клесов О.І., Тимошенко О.А., *Елементи фінансової математики фондових ринків.* — К: НТУУ «КПІ», 2017. — 71 с.
[2] Оксендаль Б., *Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения.* — Москва: Мир, АСТ, 2003. — 408 с.
[3] P. Wilmott. – John Wiley and Sons, *Derivatives. The Theory and Practice of Financial Engineering.* — Chichester, 1998. — 739 p.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 33.

ПЕРЕВАГИ ГЕОМЕТРИЧНОГО ДОВЕДЕННЯ КЛАСИЧНОЇ ТЕОРЕМИ

В.Ю. Трохіна, Л.А. Репета
(КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

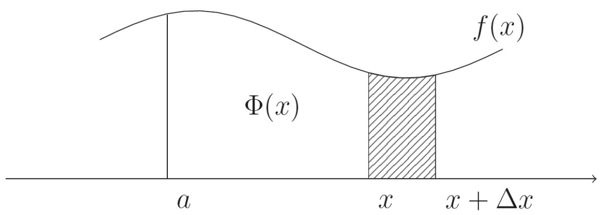
Однією з ключових теорем математичного аналізу є теорема Барроу.

Теорема 1. *Похідна визначеного інтегралу як функції її верхньої межі дорівнює значенню підінтегральної функції в точці диференціювання, тобто*

$$f\colon [a;b] \to \mathbb{R} \quad \text{неперервна на } [a;b], \Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

Φ *— первісна* f *на* $[a;b]$*, тобто* $\Phi'(x) = f(x)$ *для* $\forall x \in [a;b]$.

Аналітичне доведення цієї теореми базується на означенні неперервної функції і властивостях визначеного інтеграла (перша теорема про середнє значення). Розглянемо доведення, яке спирається на геометричний зміст визначеного інтеграла.



Доведення. Зафіксуємо значення x і надамо йому приросту Δx. Тоді $\Delta\Phi(x)$ — площа заштрихованої області. Для достатньо малих Δx:

$$\Delta\Phi \approx f(x)\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} \approx f(x); f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} \Rightarrow f(x) = \Phi'(x).$$

□

Висновок. На відміну від класичного, геометричне доведення є простим і наочним, хоча не достатньо грунтовним. Зважаючи на те, що воно легше для сприйняття і займає менше часу, можливо, його можна наводити на факультетах нематематичних спеціальностей, де на вивчення математичного аналізу виділяють небагато академічних годин.

Література

[1] Натансон И.П. *Краткий курс высшей математики* — 1999. — Г. VI— С. 315.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 1. — С. 34.

ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ТА РЕГУЛЯРНОЮ ОСОБЛИВОЮ ТОЧКОЮ

О.В. Чорненька
(Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя   Ніжин, Україна)

В даній роботі вивчається питання про побудову загального формального розв'язку системи трьох лінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon x \frac{dy}{dx} = A(x, \varepsilon) y, \tag{1}$$

з регулярною особливою точкою $x = 0$; ε – малий дійсний параметр, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$; x - незалежна змінна; $y = y(x, \varepsilon)$ - шукана вектор-функція, $A(x, \varepsilon)$ - квадратна матриця третього порядку, яка задається розвиненням

$$A(x, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{sk} \varepsilon^s x^k. \tag{2}$$

У роботі досліджується можливість побудови лінійно незалежних розв'язків системи (1) в залежності від поведінки спектра головного оператора цієї системи. Вивчаються наступні випадки:

1. Обґрунтовано випадок простого спектра головного оператора, тобто матриця A_{00} має три різних власних значення.

2. Досліджено питання про побудову загального розв'язку системи (1) за умови, що гранична матриця A_{00} має власне значення кратності три, якому відповідає елементарний дільник такої самої кратності.

3. Вивчено також випадок про побудову загального розв'язку системи (1) за умови, що гранична матриця A_{00} має власне значення кратності три, якому відповідає два елементарних дільники різної кратності (один простий, а інший кратності два).

Для кожного випадку знайдено умови, за виконання яких розв'язки системи (1) можна подати у вигляді

$$y(x, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) exp(\varepsilon^{-1} \int_{x_0}^{x} t^{-1} \lambda(t, \varepsilon) dt),$$

де $u(x, \varepsilon)$ - тривимірні вектори, $\lambda(x, \varepsilon)$ - скалярні функції, що допускають розвинення у подвійні степеневі ряди за дробовими показниками параметра та відношення незалежної змінної і параметра.

Отримані результати уточнюють та доповнюють дослідження, подані у роботі [1].

Література

[1] Чорненька О.В. *Асимптотичний аналіз лінійних систем диференціальних рівнянь з параметром та регулярною особливою точкою* // Вісник Черкаського університету. — 2016. — Випуск № 1. — С. 90–99.

Секція 2.

Метрична теорія чисел, геометрії фрактального аналізу

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 2. — С. 36.

ТОПОЛОГІЧНА СТРУКТУРА МНОЖИНИ НЕПОВНИХ СУМ РЯДІВ, ПОВ'ЯЗАНИХ З ПОСЛІДОВНІСТЮ ЧИСЕЛ ЛЮКА

О.Р. Артемчук
(НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

Розглядається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n}{b_n}, \tag{1}$$

де (b_n) – геометрична прогресія з першим членом $b_1 > 0$ та знаменником $q > 0$, (L_n) – послідовність чисел Люка, яка задається початковими умовами $L_1 = 2$, $L_2 = 1$ та рекурентним співвідношенням $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ при $n \geq 3$.

Відомо, що для чисел Люка має місце формула типу Біне:

$$L_n = \phi^{n-1} + (-\phi)^{1-n} = \phi^{n-1} + (1-\phi)^{n-1}, \text{ де } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Теорема 1. *Ряд (1) є збіжним тоді і тільки тоді, коли $q > \phi$. Його сума*

$$S = \frac{q\phi}{b_1(q-\phi)} + \frac{q(1-\phi)}{b_1(q+\phi-1)}.$$

Означення **1.** Множиною неповних сум збіжного додатного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ називається множина $E\{u_n\} = \{x : x = \sum\limits_{n\in M} u_n, \text{ де } M \subseteq \mathbb{N}\}$.

Теорема 2. *Множина $E\{u_n\}$ неповних сум збіжного додатного ряду може бути:*
1) відрізком або скінченним об'єднанням відрізків;
2) ніде не щільною множиною, гомеоморфною класичній множині Кантора;
3) гомеоморфною множині $T \equiv C_0 \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_{2n-1} = [0,1] \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_{2n}$, де G_k – об'єднання центральних інтервалів, що вилучаються з відрізка $[0;1]$ на k-му кроці побудови множини Кантора.

Теорема 3. *При $q \in (2\phi; +\infty)$ множина неповних сум ряду (1) є ніде не щільною множиною, гомеоморфною класичній множині Кантора, а при $q \in (\phi; 2\phi)$ вона є скінченним об'єднанням відрізків.*

Зауваження 1. *На сьогодні немає критеріїв, що дозволяють визначити топологічну структуру множини неповних сум довільного збіжного ряду, хоча існують окремі необхідні або достатні умови належності цієї множини одному з можливих топологічних типів. Ряд (1) при $q = 2\phi$ є таким, що не задовольняє жодні наявні достатні умови, а тому вимагає додаткового індивідуального дослідження.*

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 2. — С. 37.

СУБГЕОМЕТРИЧНІ РОЗКЛАДИ КАНТОРА

Н.О. Балицька
(НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

Властивості розкладів Кантора та пов'язаних з ними ймовірнісних мір вивчались багатьма дослідниками як зарубіжними, так і українськими (М.В. Працьовитий, Г.М. Торбін, М.В. Лебідь, Р.О. Нікіфоров, B. Mance, О.В. Слуцький та інші, див., напр., [1, 2, 3]). Значна кількість робіт присвячена дослідженню фрактальних властивостей ймовірнісних мір, які породжуються різними розкладами дійсних чисел, цифри яких є незалежними випадковими величинами. У даній доповіді розглядаються субгеометричні розклади Кантора, тобто розклади, для яких послідовність $\{n_k\}$ задовольняє умову $n_k \leq q^k$ для деякого натурального $q \geq 2$.

Нехай Φ – сім'я циліндричних відрізків розкладу Кантора, а $dim_H(\cdot, \Phi)$– розмірність Хаусдорфа – Безиковича відносно Φ.

Теорема 1. *Сім'я циліндрів Φ, яка породжена субгеометричним рядом Кантора, є довірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа – Безиковича на $[0,1]$, тобто*

$$dim_H E = dim_H(E, \Phi), \quad \forall E \subset [0,1].$$

Якщо ж $n_k = b_0 \cdot q^k$, для деякого $q \geq 2$ і $b_0 \in N$, то Φ є суттєво непорівнянною, тобто існує $B_q \subset [0;1]$ така, що $H^{\alpha_q}(B_q, \Phi) = +\infty, H^{\alpha_q}(B_q) = 0$, де $\alpha_q := dim_H(B_q)$.

Теорема 2. *Нехай*

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k},$$

де незалежні в.в. ξ_k набувають значень $0, 1, \dots, n_k - 1$ з імовірностями $p_{0k}, p_{1k}, \dots, p_{n_k-1,k}$ відповідно. Якщо існує $q \geq 2$ таке, що $n_k \leq q^k, \forall k \in N$, то розмірність Хаусдорфа – Безиковича ймовірнісної міри μ_ξ обчислюється за формулою:

$$dim_H \mu_\xi = \underline{\lim}_{k \to \infty} \frac{H_k}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k)},$$

де $H_k := \sum\limits_{j=1}^{k} h_j$, $h_j := -\sum\limits_{i=0}^{n_j-1} p_{ij} \ln p_{ij}$. Зокрема, якщо $n_k = b_0 \cdot q^k$ ($q \geq 2$ і $b_0 \in N$), то

$$dim_H \mu_\xi = \underline{\lim}_{k \to \infty} \frac{2H_k}{k(k+1)\ln q}.$$

Література

[1] Cantor G. *Uber die einfachen Zahlensysteme* // Zeitschrift f. Math and Physik. — 1869. — Vol. 14. — P. 121–128.

[2] Лебідь М.В., Торбін Г.М. *Про DP-перетворення, породжені випадковими величинами з незалежними С-символами* // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат.науки — 2013. — № 14. — С. 240–252.

[3] Balytska N., Torbin G. *On geometric Cantor series expansions and fractal properties of related probability measures* //Proceedings of VI International Conferenceon Analytic Number Theory and Spatial Tessellations. Kyiv, Ukraine, September 24—28, 2018.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 2. — С. 39.

КАНТОРІВСЬКІ СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ І ПОСЛІДОВНОСТІ ФІБОНАЧЧІ

О.І. Бондаренко
(НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

Нагадаємо, що *послідовністю Фібоначчі* називається будь-яка послідовність дійсних чисел (c_n), яка задовольняє рекурентне співвідношення

$$c_{n+2} = c_n + c_{n+1}, n \in N. \tag{1}$$

Кожна послідовність Фібоначчі є двопараметричною, а саме: визначається своїми двома послідовними членами. Її наступний член обчислюється за формулою (1), а попередній формулою

$$c_n = c_{n+2} - c_{n+1} \tag{2}$$

Тому, по своїй суті, послідовність Фібоначчі є двосторонньою, тобто визначена для всіх цілих значень n. Зрозуміло, що в цьому випадку доречно домовлятись про те, який член є нульовим, а який – першим. Двосторонні цілочисельні послідовності Фібоначчі утворюють двовимірний векторний простір над кільцем цілих чисел (як раціональні – над полем раціональних чисел).

Канторівська система числення визначається послідовністю натуральних чисел $(s_n), 2 \leq s_n$, і послідовністю алфавітів $A_{s_n} \equiv \{0, 1, ..., s_n - 1\}, n = 1, 2, ...$

Ці засоби дозволяють будь-яке число $x \in [0; 1]$ подати у вигляді

$$x = \frac{\alpha_1}{s_1} + \frac{\alpha_2}{s_1 s_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s_1 s_2 \ldots s_n} + \ldots \ , \alpha_n \in A_{s_n}.$$

Ми розглядаємо три види канторівських систем, пов'язаних з послідовностями Фібоначчі, а саме: нас цікавлять системи зображення чисел (або системи числення), для яких

1) $s_1 = c_1 \geq 2, s_2 = c_2 \geq 2, s_n = c_n$,

2) $s_n = s^{c_n}$, де s – фіксоване натуральне число, більше 1,

3)

$$s_n = \begin{cases} 2, n \notin (c_k), \\ 3, n \in (c_k). \end{cases}$$

Ми акцентуємо увагу на питаннях:

1) достатності та надлишковості системи для різних задач метричної та позиційної геометрії чисел,

2) канонізації зображення чисел,

3) симетризації алфавітів тощо.

Доповідь присвячена нормальним властивостям чисел для вказаних зображень і їхнім застосуванням до дослідження різних математичних об'єктів: множин, операторів, функцій, мір та динамічних систем.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 2. — С. 40.

РОЗПОДІЛ ЗНАЧЕНЬ КЛАСИЧНОЇ НЕПЕРЕРВНОЇ НІДЕ НЕ ДИФЕРЕНЦІЙОВНОЇ ФУНКЦІЇ СЕРПІНСЬКОГО ПРИ ЗАДАНОМУ РОЗПОДІЛІ ЗНАЧЕНЬ АРГУМЕНТА

С. О. Климчук, Н. А.Василенко
(Інститут математики НАН України, Київ, Україна)

Одним із аспектів дослідження фрактальних властивостей неперервних ніде не диференційовних функцій є вивчення тополо-метричних і фрактальних властивостей їх множин рівнів, лебегівської структури й спектральних властивостей розподілу їх значень при заданому розподілі значень аргумента.

Доповідь присвячена розподілу значень класичної функції Серпінського [2] в раніше запропонованій нами модифікації. Нагадаємо її суть.

Нехай $A_5 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. На множині A_5 визначимо дискретну функцію

$$\gamma(\alpha) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha = 0, \\ 1, \text{ якщо } \alpha \in \{1, 2, 3\}, \\ 2, \text{ якщо } \alpha = 4. \end{cases}$$

Для кожної послідовності $(\alpha_k) \in L = A_5^\infty = A_5 \times A_5 \times \ldots$ визначимо послідовність (c_k):

$$c_1 = 0, \ c_k = \begin{cases} c_{k-1}, \text{ якщо } \alpha_{k-1} \in A_5 \setminus \{2\} \\ 1 - c_{k-1}, \text{ якщо } \alpha_{k-1} = 2. \end{cases}$$

На відрізку $[0; 1]$ розглядається функція

$$y = f(\Delta^5_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}) = \Delta^{Q_3}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots},$$

де

$$\beta_1 = \gamma(\alpha_1(x)), \ \beta_k = \begin{cases} \gamma(\alpha_k(x)), \text{ якщо } c_k = 0, \\ 2 - \gamma(\alpha_k(x)), \text{ якщо } c_k \neq 0. \end{cases}$$

Відомо, що так означена функція f є неперервною ніде не диференційовною фрактальною функцією.

В доповіді йтиметься про вивчення лебегівської структури (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент) випадкової величини $Y = f(X)$, де X – випадкова величина з наперед заданим розподілом, f – модифікована функція Серпінського.

Література

[1] Працьовитий М. В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів* // Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. — 1998. — 296 с.

[2] Sierpinski W. *Arytmetyczny przyklad funkcji ciaglej, nierozniczkowalnej* // Wektor. — 1914. — №8. — P. 337-343

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 2. — С. 41.

ПРОСТІР ПОСЛІДОВНОСТЕЙ НУЛІВ ТА ОДИНИЦЬ ЯК МНОЖИНА ЗОБРАЖЕНЬ ДРОБОВОЇ ЧАСТИНИ ДІЙСНОГО ЧИСЛА ВІДРІЗКА $[0;1]$

І.М. Лисенко, М.Р. Гордійчук
(НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

Нехай $A \equiv \{0,1\}$ — алфавіт, $L = A \times A \times ... \times A \times ...$ — простір послідовностей нулів та одиниць, елементи якого позначатимемо $\overline{a} = (a_n)$. Останній можна наповнювати різними математичними структурами. Існує багато засобів його метризації. На наш погляд цікавими метриками є:

$$\rho_1(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{cases} \frac{1}{k(\overline{x},\overline{y})}, & \text{коли } \overline{x} \neq \overline{y}, \\ 0, & \text{коли } \overline{x} = \overline{y}, \end{cases}$$

де $k = k(\overline{x}, \overline{y})$ — натуральна функція двох змінних $\overline{x}$ та $\overline{y}$ в просторі L, значення якої визначається умовами: $x_k \neq y_k$, але $x_i = y_i$ при $i < k$;

$$\rho_2(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{q^n}, \quad q > 1;$$

$$\rho_3(\overline{x}, \overline{y}) = \Delta^{Q_2}_{|x_1-y_1||x_2-y_2|...|x_n-y_n|...},$$

де $\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ — Q_2-зображення числа.

Простір L можна розглядати як простір зображень (кодувань) чисел відрізка $[0;1]$ засобами алфавіту A. Нагадаємо, що кодуванням (зображенням) чисел з $[0;1]$ засобами алфавіту A називається відповідність f між множинами $[0;1]$ і L, при якій кожному числу $x \in [0;1]$ відповідає принаймні один елемент множини L і при цьому кожний елемент множини $[0;1]$ є образом єдиної послідовності з множини L (іншими словами: f є сюр'єктивним відображенням L на $[0;1]$).

Одне цікаве двосимвольне зображення чисел визначається вектором $\overline{g} = (g_0; g_1)$, де $0 < g_0 < 1$, $g_1 \equiv g_0 - 1$, $g_0 > -g_1$. Воно отримується розкладом числа x в ряд

$$x = \alpha_1 g_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\alpha_k g_{1-\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}, \text{ де } (\alpha_n) \in L.$$

У доповіді пропонуються результати дослідження математичних об'єктів з фрактальними (самоподібними, самоафінними, автомодельними) властивостями, означених в термінах вказаного зображення чисел з використанням названих метрик. В першу чергу, це функції зі складною локальною структурою і розподіли ймовірностей, зосереджені на фракталах.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 2. — С. 42.

ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ЗБУРЕНИХ МНОЖИН КАНТОРА, ПОВ'ЯЗАНИХ З Q^*-РОЗКЛАДАМИ

О.П. Дорош
(НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

Доповідь присвячена збуреним множинам Кантора [2], тобто множинам виду:

$$D[Q_3^*;\{V_k\}] = \{x : x = \triangle^{Q_3^*}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\ldots}, \alpha_k \in V_k\},$$

де або $V_k = \{\beta_k, \gamma_k\}, \beta_k \neq \gamma_k, \beta_k \in \{0,1,2\}, \gamma_k \in \{0,1,2\}$, або $V_k = \{0,1,2\}$,

$$Q_3^* = ||q_{ik}||, \sum_{i=0}^{2} q_{ik} = 1, \lim_{k\to\infty} q_{ik} = \frac{1}{3}, q_{ik} > 0, i \in \{0,1,2\}$$

(детальніше про Q^*-розклади дійсних чисел дивись роботу [3], де ці розклади були вперше введені в розгляд).

Теорема 1. *Нехай* $N_+ = \{k : V_k = \{0,1,2\}$,

$$N_- = \{k : V_k = \{\beta_k, \gamma_k\}, \beta_k \neq \gamma_k, \beta_k \in \{0,1,2\}, \gamma_k \in \{0,1,2\},\}$$
$$N_-(n) := N_- \cap \{1,2,...,n\}, \quad N_+(n) := N_+ \cap \{1,2,...,n\}.$$

Позначимо

$$\nu_+ := \liminf_{n\to\infty} \frac{N_+(n)}{n}.$$

Тоді при довільному виборі матриці Q^* *з вищеописаного класу, та довільному виборі послідовності* $\{V_k\}$*, розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини* $D[Q_3^*;\{V_k\}]$ *обчислюється за формулою:*

$$\dim_H(D[Q_3^*;\{V_k\}]) = \nu_+ + (1-\nu_+)\log_3 2.$$

Наслідок. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича збуреної множини Кантора $D[Q_3^*;\{V_k\}]$ співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича класичної множини Кантора тоді і тільки тоді, коли «нижня частота» збурень дорівнює нулю, тобто коли $\nu_+ = 0$.

Література

[1] Дорош О.П. *Про розмірність Хаусдорфа-Безиковича «збурених» множин Кантора.* — Студентські фізико-математичні етюди, Т. 1.– К: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 2016. — № 15 – с. 25-29.

[2] Торбин Г.М. *Случайные величины с независимыми Q^*-знаками /Г.М.Торбин, Н.В. Працевитый //Случайные эволюции:теорет. и прикл. задачи.* — Ин-т математики АН Украины, Киев, 1992. — С. 95-104.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 2. — С. 43.

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ, ПОРОДЖЕНОЇ РОЗПОДІЛОМ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ ЗАДАНОЇ ЗНАКОДОДАТНІМ РЯДОМ ЛЮРОТА

Є.І. Калашнікова
(НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

У доповіді розглядається функція випадкової величини: $Y = \mathcal{F}_\xi(X)$, де випадкова величина X має рівномірний розподіл на $[0;1]$, $\mathcal{F}_\xi(x)$ — функція розподілу випадкової величини ξ з незалежними однаково розподіленими елементами її зображення знакододатнім рядом Люрота [1]: $\xi = \Delta^L_{\eta_1 \dots \eta_k \dots}$, де η_k — незалежні, однаково розподілені випадкові величини, які набувають значень $1, 2, ..., n, ...$ з ймовірностями $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ відповідно, $0 \leqslant p_i \leqslant 1$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Відомо [2], що функцію $\mathcal{F}_\xi(x)$ можна представити у вигляді: $\mathcal{F}_\xi(x) = \beta_{c_1} + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \beta_{c_k} \prod\limits_{j=1}^{k-1} p_{c_j}$, $\beta_{c_k} = \sum\limits_{j=c_k+1}^{\infty} p_j$.

В доповіді будуть представлені результати дослідження деяких властивостей функції $Y = \mathcal{F}_\xi(X)$, зокрема умови дискретності та неперервності, абсолютної неперервності або сингулярності розподілу випадкової величини Y, а також умови того, що розподіл Y може бути сумішшю дискретного та неперервного розподілів.

Доведено, що у випадку коли $P\{\eta_k = 1\} = p_1 = 0$, випадкова величина $Y = \mathcal{F}_\xi(X)$ має чисто дискретний розподіл з атомами виду:

$$y_m = \beta_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} \beta_{c_k} \prod_{j=1}^{k} p_{c_j}, \quad c_j = 2, 3, ..., \quad m \in \mathbb{N}.$$

З цього випливає, що якщо існує таке $c \neq 1$, що $p_c = 0$, тоді розподіл $Y = \mathcal{F}_\xi(x)$ є сумішшю дискретного і неперервного розподілів. Знайдено вираз функції розподілу $\mathcal{F}_Y(x)$ випадкової величини Y, а також вираз її похідної в точці $y_0 = \mathcal{F}_\xi(x_0)$, $x_0 = \Delta^L_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}$:

$$\mathcal{F}'_Y(y_0) = \lim_{n \to \infty} \prod_{i=1}^{n} p_{a_i} \cdot a_i(a_i + 1).$$

Встановлено деякі достатні умови абсолютної нерервності та сингулярності розподілу випадкової величини Y.

Література

[1] Lüroth J. *Uber eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reihe* // Math. Ann. — 1883. — T. 21.— P. 441–423.

[2] Жихарєва Ю.І., Працьовитий М.В. *Властивості розподілу випадкової величини, L-символи якої в зображенні знакододатним рядом Люрота, є незалежними* // Труды ИПММ НАН Украины — 2011. — Т. 23.— С. 71–83.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 2. — С. 44.

РІВНОМІРНО РОЗПОДІЛЕНІ ПОСЛІДОВНОСТІ, ПОРОДЖЕНІ ЕРГОДИЧНИМИ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ

Р.В. Кривошия, О.П. Макарчук
(Інститут математики НАН України, Київ, Україна)
(ЦДПУ імені В.Винниченка,Україна)

Послідовність a_n називається рівномірно розподіленою по модулю 1, якщо для довільного інтервалу $(a;b) \subset [0;1]$ виконується умова

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n\big((a;b)\big)}{n} = b - a,$$

де

$$N_n\big((a;b)\big) = \#\{a_j | \{a_j\} \in (a;b), \quad j = \overline{1,n}\}.$$

Перетворення $\varphi : \Omega \to \Omega$ називається ергодичним відносно міри η, якщо

1) $\eta(W) = \eta\big(\varphi(W)\big)$, якщо $W \subseteq \Omega$ і W вимірна за η.

2) Якщо $\varphi(A) \equiv A$, то $\eta(A) \in \{0; \eta(\Omega)\}$.

Теорема 1. *Нехай перетворення $\varphi : [a;b] \to [a;b]$ є ергодичним відносно міри Лебега. Для майже всіх $t \in [a;b]$ послідовність $t, \varphi(t), \ldots, \varphi^n(t), \ldots$ є рівномірно розподіленою тоді і тільки тоді, коли $b - a \in \mathbb{Z}$*

Відомо [1], що для Q_2 — представлення заданого стохастичним вектором $(p;q)$

$$x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$$

оператор зсуву

$$\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = x \to \varphi(x) = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$$

є ергодичним перетворенням.

Використовуючи критерій Вейля [3] рівномірної розподіленості послідовностей, в термінах інтеграла Рімана можливо довести наступну теорему.

Теорема 2. *Якщо для числа $x \in [0;1]$ послідовність $\varphi^n(x)$ є рівномірно розподіленою, то x є Q_2 — нормальним числом, тобто $\nu_0(x) = p$.*

Література

[1] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. Киев: Наук. думка, 1992. 208 с.

[2] *Титчмарш Е.* Теория функций. Москва: Наука, 1980. 464 с.

[3] *Weil H.* Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene. Rend. Circ. Math.Palermo, 1910, 30, 377–407.

[4] *Weil H.* Über ein Problem aus dem Gebiete der diophantischen Approximationen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., 1914, 234–244.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 2. — С. 45.

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТРИБІН–ФУНКЦІЇ

Ю.П. Маслова
(НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

Неперервні функції зі "складною локальною поведінкою", які мають неомежену варіацію на кожному як завгодно малому інтервалі області визначення, сьогодні є актуальним об'єктом наукових математичних досліджень, оскільки наявні ефективні засоби їх теоретичного аналізу. І ми маємо до них нетривіальний інтерес (з боку аналізу їхніх фрактальних властивостей).

Нехай $2 \leq s$ – фіксоване натуральне число, $A_s = \{0, 1, \ldots, s-1\}$ – алфавіт, $L_s = A_s \times A_s \times \ldots \times A_s \times \ldots$ – простір послідовностей елементів алфавіту; $\|q_{ik}\|$ – нескінченна стохастична матриця з додатними елементами $(k \in N,\ i = \overline{0, s-1})$ така, що

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{q_{ik}\} = 0;$$

$\beta_{0k} = 0$, $\beta_{ik} = q_{0k} + \ldots + q_{i-1,k}$.

Відомо, що для будь–якого числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L_s$ така, що

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k k} \prod_{j-1}^{k-1} q_{\alpha_j j} \right) \equiv \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}. \qquad (1)$$

Доповідь присвячена властивостям неперерної ніде не монотонної функції f, яка числу $x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}$ ставить у відповідність число

$$y = \Delta^{G_2^*}_{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n \ldots} = \delta_{\gamma_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\delta_{\gamma_k k} \prod_{j-1}^{k-1} g_{\gamma_j j} \right),$$

де $\|g_{ik}\|$ – нескінченна стохастична матриця з додатними елементами, розмірності $(i \in \{0; 1\}, k \in N)$; $\delta_{0k} = 0, \quad \delta_{1k} = g_{0k}$, $\delta_{ik} = g_{0k} + \ldots + g_{i-1,k} = \delta_{i-1,k} + g_{i-1,k}$, $i = \overline{0, s}$,

$$\gamma_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_1 = 0, \\ 1, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 0, \end{cases} \qquad \gamma_{n+1} = \begin{cases} \gamma_n, & \text{якщо } \alpha_{n+1} = \alpha_n, \\ 1 - \gamma_n, & \text{якщо } \alpha_{n+1} \neq \alpha_n, \end{cases} \qquad n \in N. \qquad (2)$$

У доповіді акцентуєтся увага на структурних, автомодельних та диференціальних властивостях функції f, множинах її рівнів, фрактальних властивостях графіка та суттєвих для неї множин, зокрема на розподілі її значень при рівномірному розподілі аргумента. Доводиться, що при будь–яких матрицях $\|q_{ik}\|$ і $\|g_{ik}\|$ функція має необмежену варіацію, що є необхідною умовою її ніде не диференційовності. Для частинних випадків обгрунтовано інтегральні властивості функції.

Література

[1] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — К.: Наукова думка, 1992. — 208 с.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 2. — С. 46.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ФРАКТАЛЬНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ДЛЯ ЗАПОВНЕННЯ ПРОПУСКІВ У МАСИВАХ ДАНИХ

О. Б. Панасенко, С. В. Ткаченко
(ВДПУ імені Михайла Коцюбинського,Вінниця, Україна)

Проблема обробки пропусків у масивах даних часто виникає під час проведення різних досліджень. Пропущені дані заповнюються певними величинами. Дослідники намагаються максимально наблизити їх до реальних значень. Для цього використовують як класичні методи (наприклад, різні види інтерполяцій: методом найближчого сусіда, кусково-лінійна, інтерполяція многочленами, сплайнами тощо), так і новітні, які базуються на сучасних обчислювальних алгоритмах (див., наприклад, [1]). Нами досліджувалась проблема ефективності використання фрактальної інтерполяції (див., наприклад, [2]) для заповнення пропущених даних.

Нехай маємо скінченний набір точок $(x_0, y_0), \ldots, (x_N, y_N)$ $(N > 3)$, які описують деякі дані. Припустимо, що відомими є значення лише деяких n з цих точок: $(x_0, y_0) = (x_{i_0}, y_{i_0}), (x_{i_1}, y_{i_1}), \ldots, (x_{i_n}, y_{i_n}) = (x_N, y_N)$. Необхідно відновити невідомі $N - n + 1$ точок так, щоб вони були якомога ближчими до реальних величин.

Для відновлення пропущених даних ми пропонуємо наступне. Зафіксуємо $W > 3$. Покладемо спочатку $j = 0$ і далі діємо за таким алгоритмом, поки $j + W \leq N$:

1) Розглядаємо точки $(x_{i_j}, y_{i_j}), (x_{i_{j+1}}, y_{i_{j+1}}), \ldots, (x_{i_{j+W}}, y_{i_{j+W}})$. Для кожного $k = 1, \ldots, W-1$ знаходимо таку фрактальну інтерполяційну функцію, яка проходить через вказані точки за виключенням $(x_{i_{j+k}}, y_{i_{j+k}})$, і для якої відхилення значення в точці $(x_{i_{j+k}}, y_{i_{j+k}})$ є мінімальним. Таким чином, одержано певні $W - 1$ функції, які інтерполюють частину даних.

2) Для кожного значення l від i_{j+1} до i_{j+W-1} знаходимо значення побудованої фрактальної інтерполяційної функції для x_l. Зберігаємо усі знайдені дані. Збільшуємо j на 1, переходимо до п. 1.

Значення в кожній пропущеній точці знаходимо як середнє арифметичне значень всіх інтерполяційних функцій в цій точці. Нами здійснено порівняльну характеристику роботи вказаного алгоритму із класичними методами інтерполяції на деяких відкритих даних. Виявилось, що нерідко він дає найменшу середньоквадратичну похибку у порівнянні із іншими методами.

Література

[1] Collins L., Ndjiongue A. R., Bhekisipho T., Tshilidzi M. *A Deep Learning-Cuckoo Search Method for Missing Data Estimation in High-Dimensional Datasets* // Advances in Swarm Intelligence. — 2017. — P. 561–572.

[2] Barnsley M. F. *Fractals everywhere.* — San Diego : Academic Press Professional, 1988. — 394 p.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 2. — С. 47.

ОДИН КЛАС ФРАКТАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ, ПОВ'ЯЗАНИХ З Q_2^*-ЗОБРАЖЕННЯМ ЧИСЕЛ

С.П. Ратушняк
(Інститут математики, Київ, Україна)

Одним з узагальнень класичного двійкового зображення чисел з $[0;1]$ засобами алфавіту $A = \{0;1\}$ є Q_2^*-зображення, яке визначається нескінченною додатною числовою послідовністю: $(q_{0k}) = (q_{01}, q_{02}, ..., q_{0k}, ...)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_{ok} = 1$, і означується рівністю

$$x = \alpha_1 q_{1-\alpha_1,1} + \sum_{k=2}^{\infty}(\alpha_k q_{1-\alpha_k,k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j,j}) \equiv \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}, \tag{1}$$

де $q_{1k} \equiv 1 - q_{0k}$, $(\alpha_k) \in L = A \times A \times \cdots A \times \cdots$.

Нехай маємо два Q_2^*-зображення чисел, визначені послідовностями (q_{0k}) і (g_{0k}) відповідно (друге називатимемо G_2^*-зображення), послідовність функцій $\varphi_n : A \times A \to A$.

Розглядається функція $f_{\overline{\varphi}} : [0;1] \to [0;1]$, де

$$f_{\overline{\varphi}}(\Delta^{Q_2^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}) = \Delta^{G_2^*}_{\varphi_1(\alpha_1,\alpha_2)\varphi_2(\alpha_2,\alpha_3)...\varphi_k(\alpha_k,\alpha_{k+1})...}. \tag{2}$$

Означення функції $f_{\overline{\varphi}}$ буде коректним лише тоді, коли вираз (2) дає рівні значення для різних зображень Q_2^*-раціональних чисел ($\Delta^{Q_2^*}_{c_1c_2...c_{m-1}1(0)} = \Delta^{Q_2^*}_{c_1c_2...c_{m-1}0(1)}$). Забезпечити це можна домовленістю використовувати те зображення, яке має період (0). Зауважимо, що число 1 має єдине зображення $\Delta^{Q_2^*}_{(1)}$. Функція, означена рівністю (2), є неперервною на множині Q_2^*-ірраціональних чисел.

Існує лише 16 функцій φ, які відображають $A^2 \to A$, але функція $f_{\overline{\varphi}}$, визначається послідовністю функцій $\overline{\varphi}$, тому існує континуальний клас функцій, означених рівністю (2). Він містить кусково-сталі функції, а також неперервні функції. До сім'ї останніх відносяться тотожне перетворення півінтервала $[0;1)$, інверсор цифр Q_2^*-зображення числа. Представник цієї сім'ї — оператор лівостороннього зсуву цифр є функцією неперервною на циліндрах 1-го рангу.

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних, варіаційних, автомодельних і фрактальних властивостей функцій $f_{\overline{\varphi}}$. Аспект вивчення фрактальних властивостей вичерпується питаннями властивостей множини значень і множин рівнів функцій, а також спектральних властивостей розподілу її значень.

Одні представники сім'ї (2) мають множиною значень проміжок, другі — ніде не щільну множину, треті — об'єднання проміжків. Повна класифікація топологічних типів множин значень функції $f_{\overline{\varphi}}$ наводиться. Розподіл значень функції $f_{\overline{\varphi}}$ при рівномірному розподілі аргумента, взагалі кажучи, є сумішшю дискретного і неперервного розподілів. Висновки про тополого-метричні властивості носія розподілу значень функції $f_{\overline{\varphi}}$ в залежності від послідовності (φ_n) і самого Q_2^*-зображення будуть деталізовані у доповіді.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 2. — С. 48.

ОДНА ФРАКТАЛЬНА НЕПЕРЕРВНА ФУНКЦІЯ КАНТОРІВСЬКОГО ТИПУ

О.В. Свинчук
(Державний університет телекомунікацій, Київ, Україна)

Нехай $A_5 \equiv \{0, 1, 2, 3, 4\}$ — алфавіт п'ятіркової системи числення, $L \equiv A_5 \times A_5 \times \ldots$, $x = \Delta^5_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$— 5-кове зображення числа $x \in [0, 1]$, $(\alpha_k) \in L$.

$G^*_s = \|g_{in}\|$ — нескінченна стохастична матриця, $n \in N$, $i \in A_s = \{0, 1, \ldots, s-1\}$, $2 \le s \in N, s = 2k-1$ така, що має властивості:

1. $g_{0n} = g_{s-1,n} > 0$, $g_{jn} = g_{s-1-j,n}$, $g_{kn} = 0, k = \frac{s-1}{2}$, $j \in A_s$, $n \in N$;
2. $g_{0n} + g_{1n} + \ldots + g_{[s-1]n} = 1$ $n, \in N$;
3. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \max\{g_{0n}, g_{1n}, \ldots, g_{[s-1]n}\} = 0$.

Розглядається функція $f(x)$, означена рівністю

$$f(x) = \delta_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\delta_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j} \right],$$

де $\sum\limits_{i=1}^{s-1} g_{ij} = 1$, $|g_{ij}| < 1$, $\delta_{0j} = 0, 0 < \delta_{ij} = \sum\limits_{k=0}^{i-1} g_{kj} < 1$, $i \in \overline{1, s-1}$.

Теорема 1. *Функція $f(x)$:*

1. *неперервна в кожній точці відрізка $[0, 1]$ і набуває всіх значень з цього відрізка;*
2. *є неспадною, якщо всі елементи матриці $\| g_{in} \|$ є невід'ємними;*
3. *є немонотонною функцією канторівського типу, якщо в нескінченній кількості стовпців $\|g_{in}\|$ існують нулі;*
3. *має графік, симетричний відносно точки $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, і має місце рівність $\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.*

В доповіді обговорюються тополого-метричні і фрактальні властивості множин рівнів функції $f(x)$, її структурні, диференціальні, інтегральні та інші властивості.

Література

[1] Працьовитий М.В., Калашніков А.В. *Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q-зображенням чисел.* // Укр. Мат. Журнал. — 2013. — Т. 65, №3. — С. 381–393.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 2. — С. 49.

УЗАГАЛЬНЕНІ МОМЕНТНІ ЗОБРАЖЕННЯ ТА АПРОКСИМАНТИ ТИПУ ПАДЕ ДЕЯКИХ БАЗИСНИХ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ ДВОХ ЗМІННИХ

І.С. Тетерук
(Інститут математики НАН України, Київ, Україна)

Запропонований В.К. Дзядиком в 1981 р. метод узагальнених моментних зображень [1] дав можливість з єдиних позицій будувати та досліджувати раціональні апроксиманти Паде та їх узагальнення для багатьох класів спеціальних функцій [2]. Зокрема, в [3] були досліджені узагальнені моментні зображення з оператором дробово-лінійного перетворення незалежної змінної

$$(A\varphi)(t) = \varphi\left(\frac{t}{(1-q^k)t+q^k}\right). \tag{1}$$

Цей оператор при $q \in (0,+\infty)\backslash\{1\}$ відображає простір $\mathcal{X} = C[0,1]$ сам в себе. На цій основі в [4] були побудовані апроксиманти Паде базисних гіпергеометричних рядів вигляду

$$\tilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{1+\varepsilon q^k} = \frac{1}{1+\varepsilon}\, {}_2\phi_1\left[\begin{matrix} q; -\varepsilon \\ -\varepsilon q \end{matrix}\; ; q; z\right], \qquad 0 < \varepsilon < \infty, \tag{2}$$

де

$${}_2\phi_1\left[\begin{matrix} a; b \\ c \end{matrix}\; ; q; z\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a,q)_k (b,q)_k}{(c,q)_k (q,q)_k} z^k, \tag{3}$$

а $(a,q)_k$ - символ Похгаммера.

У [5] метод узагальнених моментних зображень було поширено на випадок двовимірних послідовностей.

Базуючись на вищевикладеному, розглядатимуться узагальнені моментні зображення та раціональні апроксиманти типу Паде для базисних гіпергеометричних рядів двох змінних.

Література

[1] Дзядик В.К. *Про узагальнення проблеми моментів* // Доп. АН УРСР — 1981. — № 6. — С. 8–12.
[2] Голуб А.П. *Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде.* — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — 222 с.
[3] Golub A.P. *Generalized moment representations and Padé approximants associated with bilinear transformations* // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 5. — С. 335–339.
[4] Голуб А.П., Гаврилюк Н.М. *Апроксиманти Паде рядів, пов'язаних з дробово-лінійними перетвореннями* // Теорія наближення функцій та суміжні питання. Зб. праць Ін-ту математики НАН України — 2014. — Т. 11, № 3. — С. 70–77.
[5] Голуб А.П., Чернецька Л.О. *Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних.* // Укр. мат. журн. — 2013. — Т. 65, № 8. — С. 1035–1058.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 2. — С. 50.

ОЦІНКА МАКСИМАЛЬНОЇ ПРАВДОПОДІБНОСТІ НЕВІДОМИХ ПАРАМЕТРІВ ОДНОГО КЛАСУ СИНГУЛЯРНИХ РОЗПОДІЛІВ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Н.В. Ціціліна
(НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

Розглянемо випадкову величину $\zeta = \Delta^{Q_s}_{\eta_1\eta_2...\eta_k...}$, з незалежними одаково розподіленими Q_s цифрами η_i, що набувають значень $0, 1, ..., s-1$, з імовірностями $p_0, p_1, ..., p_{s-1}$ відповідно, причому $s \geq 2, 0 \leq p_i \leq 1, \sum\limits_{i=0}^{s-1} p_i = 1,\ Q_s = (q_0, q_1, ..., q_{s-1}),\ \sum\limits_{i=0}^{s-1} q_i = 1$, $0 \leq q_i \leq 1$ [1].

Позначимо через $\rho_i, i = \overline{0, s-1}$, статистичну оцінку p_i. Розглянемо клас багатопараметричних розподілів $F(x, \rho_0, \rho_1, ..., \rho_{s-1})$, а саме: розподілів випадкової величини ζ, прийнявши в якості параметрів $p_0, p_1, ..., p_{s-1}$.

Нехай ми маємо реалізацію $X_n = (x_1, x_2, ..., x_n)$ вибірки з даного класу розподілів. Розв'яжемо задачу оцінки невідомих параметрів модифікованим методам максимальної правдоподібності [2]. Введемо аналог функції правдоподібності для досліджуваного сингулярного розподілу:

$$L_m(X_n, \rho_0, \rho_1, ..., \rho_{s-2}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{P\{x_i \in \Delta_{\alpha_{i1}\alpha_{i2}...\alpha_{im}}\}}{\left|\Delta^{Q_s}_{\alpha_{i1}\alpha_{i2}...\alpha_{im}}\right|} =$$

$$= \left(\frac{\rho_0}{q_0}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n} N_0(x_i,m)} \cdot \left(\frac{\rho_1}{q_1}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n} N_1(x_i,m)} \cdot ... \cdot \left(\frac{\rho_{s-2}}{q_{s-2}}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n} N_{s-2}(x_i,m)} \cdot \left(\frac{1-\rho_0 - ... - \rho_{s-2}}{1 - q_0 - ..q_{s-2}}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n} N_{s-1}(x_i,m)},$$

де $N_j(x_i, m)$ - кількість цифр 'j' в Q_s-розкладі x_i до m-го місця.

Розв'язавши систему рівнянь максимальної правдоподібності, отримаємо:

$$\rho_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} N_j(x_i, m)}{mn},\ j = \overline{0, s-1},\ n, m \in N. \tag{1}$$

Теорема 1. *Оцінки, отримані з формули* (1), *є незміщеними, консистентними та ефективними оцінками параметрів* ρ_j.

Література

[1] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[2] *Гончаренко Я. В., Дивляш Н. В.* Статистичні методи оцінки параметра для одного однопараметричного класу сингулярних розподілів салемівського типу. // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2014, 16(1). — С. 81-94.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 2. — С. 51.

АПРОКСИМАЦІЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ ВІДРІЗКА $[0,5;1]$ ЛАНЦЮГОВИМИ A_2-ДРОБАМИ

А.С. Чуйков
(Інститут математики НАН України, Київ, Україна)

Нехай $\nu_1(x,n) = \dfrac{l_n}{n}, \nu_{\frac{1}{2}}(x,n) = \dfrac{k_n}{n}$, де l_n і k_n — це кількість елементів 1 і $\frac{1}{2}$ відповідно серед $(a_1,\ldots,a_n)$ у ланцюговому A_2-зображенні числа $x = [0; a_1,\ldots,a_n,\ldots]$ (див. [1]).

Лема 1. *Нехай B – множина наборів $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k+l})$ серед яких l елементів 1 та k елементів $\frac{1}{2}$, $q_{k+l} = q((\alpha_1,\ldots,\alpha_{k+l}))$ – число, яке визначається рекурентно*

$$q_0 = 1, q_1 = \alpha_1, q_n = \alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}, n = 2,3,\ldots,k+l.$$

Тоді існують сталі $D_j, \tilde{D}_j (j \in \{1,2,3,4\})(D_j, \tilde{D}_j > 0)$, які не залежать від k та l такі, що

$$\min_{(\beta_1,\ldots,\beta_{k+l})} q((\beta_1,\ldots,\beta_{k+l})) = D_1\delta_1^l\eta_1^k + D_2\delta_1^l\eta_2^k + D_3\delta_2^l\eta_1^k + D_4\delta_2^l\eta_2^k,$$

$$\max_{(\beta_1,\ldots,\beta_{k+l})} q((\beta_1,\ldots,\beta_{k+l})) = \tilde{D}_1\delta_1^l\eta_1^k + \tilde{D}_2\delta_1^l\eta_2^k + \tilde{D}_3\delta_2^l\eta_1^k + \tilde{D}_4\delta_2^l\eta_2^k,$$

де $\delta_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}, \eta_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$.

Лема 2. *Якщо число $x = [0; a_1, a_2,\ldots,a_n,\ldots]$ – A_2-ірраціональне, то*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{q_n}{\delta_1^{l_n}\eta_1^{k_n}} \le \tilde{D}_1, \qquad \varliminf_{n\to\infty} \frac{q_n}{\delta_1^{l_n}\eta_1^{k_n}} \ge D_1.$$

Теорема 1. *Якщо для ланцюгового A_2-дробу ірраціонального числа x існують частоти цифр $\frac{1}{2}$ та 1, які рівні відповідно $\nu_{\frac{1}{2}}$ та ν_1, тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що*

$$|x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{(\delta_1^{\nu_1}\eta_1^{\nu_{\frac{1}{2}}} - \varepsilon)^{2n+1}}, \forall n \ge n_0,$$

зокрема для довільного ірраціонального числа $y \in [0,5;1]$ існує номер n_1 та стала C такі, що

$$|y - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{C}{(\frac{1+\sqrt{17}}{4})^{2n+1}}, \forall n \ge n_1.$$

Література

[1] Дмитренко С.О., Кюрчев Д.В., Працьовитий М.В. *Ланцюгове A_2-зображення дійсних чисел та його геометрія* // Укр.мат.журнал. — 2009. — Т.61, № 4. — С. 452-463.

[2] Джоунс У., Трон В. *Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения.* — М.: Мир, 1985. — 414 с.

Секція 3.

Алгебри, дискретної математики, теорії алгоритмів, інформатики

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 3. — С. 53.

ENSEMBLE CLUSTERING OF IMAGES BASED ON REPRESENTATIONS WITH DEEP NEURAL NETWORKS

O.K. Vasiur
(Національний Університет "Києво-Могилянська Академія", Київ, Україна)

Clustering analysis is a fundamental unsupervised machine learning task that is integral for numerous applications in data analysis and data visualization. The main objective of clustering consists in finding such a partition of data points that

– similar points are grouped in the same cluster;
– dissimilar points belong to different clusters.

Despite an easy to understand definition, clustering problem is difficult to solve due to its combinatorial nature, multiple possible interpretations of what a "good"cluster is, and high dependency on data nature. Different datasets may require different similarity measure (depending on the problem context) and benefit from mapping to the lower-dimension space in order to decrease problem complexity. Consequently, such techniques as dimensionality reduction and representation learning are widely applied in clustering analysis. Recent studies [1] prove the efficiency of clustering methods based on the representations obtained with deep neural networks due to their high representational power.

Similarly to the ensembles of classifiers, cluster ensembles provide a more robust and stable solutions by fusing the clustering mappings from multiple models. Formally, the clustering ensemble problem can be formulated as follows [2]. Let $X = x_1, x_2, ..., x_n$ be a data set, and $S = C_1, C_2, ...C_M$ be a partition (clustering) of this data set, where C_K is a cluster belonging to S, $1 \leq k \leq M$. Then, the clustering ensemble problem consists in finding a new partition C that would outperform (according to some specified measure) existing partitions $C_1, C_2, ...C_M$ by using the information given by these partitions. In the experimental part we implement the ensemble clustering technique based on representation obtain with deep neural networks and show its effectiveness on a real-life image dataset.

Література

[1] Song, C., Liu, F., Huang, Y., Wang, L., and Tan, T. (2013) *Auto-encoder based data clustering.* // In Iberoamerican Congress on Pattern Recognition (CIARP), pages 117–124. Springer.

[2] A.L.N. Fred, A.K. Jain *Combining multiple clusterings using evidence accumulation, IEEE Trans. Pattern Anal..* — Mach. Intel. 27 (6) (2005) 835–850.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 3. — С. 54.

ПРО ЕВКЛІДОВІСТЬ ДЕЯКИХ КІЛЕЦЬ МАТРИЦЬ

В.В. Власюк
(НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

В роботі [1] обґрунтовано актуальність дослідження властивостей подільності для кілець матриць. В роботах [2,3] було виділено кільця матриць, які є областями цілісності, але при цьому не є полями, розглянуто та доведено деякі властивості подільності в даних кільцях.

Найбільш повно описати властивості подільності можна в евклідовому кільці. Тому постало питання щодо пошуку умов, за яких кільця матриць є евклідовими. В роботі [4] встановлено евклідовість деяких кілець матриць. У даній роботі ми виділили нові кільця матриць, які є евклідовими.

Автором було отримано наступні результати.

Теорема 1. *Кільце* $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & \pm a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$ *є евклідовим, факторіальним та кільцем головних ідеалів.*

Теорема 2. *Кільце* $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ \pm a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$ *є евклідовим, факторіальним та кільцем головних ідеалів.*

Теорема 3. *Кільце* $K = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$ *є евклідовим, факторіальним та кільцем головних ідеалів.*

Теорема 4. *Кільце* $K = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{Z} \right\}$ *є евклідовим, факторіальним та кільцем головних ідеалів.*

Теорема 5. *Кільце* $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & bd \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ *є евклідовим, факторіальним та кільцем головних ідеалів тоді і лише тоді, коли* $d \in \{1, 2\}$.

Література

[1] Власюк В. В. *Про подільність в кільці матриць* // Науковий часопис СНТ імені Григорія Волинки, Випуск 2: Зб наукових праць. – К: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2016. – с. 159-161.
[2] Власюк В. В. *Властивості подільності в деяких кільцях матриць* // Освіта та наука. – 2017. Зб наукових праць. – К: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2017. – с. 428-429.
[3] Власюк В. В. *Про властивості подільності в деяких кільцях матриць* // Освіта та наука. – 2018. Зб. наукових праць. – К: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2018. – с. 767-769.
[4] Власюк В. В. *Евклідовість деяких кілець матриць* // Фізика і математика: вчора, сьогодні, завтра: збірник матеріалів круглого столу. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2018. – с. 20.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 3. — С. 55.

УПРАВЛІННЯ ТА ВИМІРЮВАННЯ РИЗИКУ ПРИ ІНВЕСТУВАННІ У ЦІННІ ПАПЕРИ

О.М. Гаврилюк, Н.І. Заставний
(Національний Університет "Києво-Могилянська Академія", Київ, Україна)

Наразі для банкових установ та інвестиційних компаній актуальною є проблема інвестора [1], який має прийняти рішення стосовно величини інвестицій X, в припущенні, що дохід Y –це випадкова величина з відомим законом розподілу. Якщо X більше за Y, то інвестор отримує прибуток (income) $l \cdot |Y-X|^+$, де

$$|Y-X|^+ = \begin{cases} Y-X, & Y>X \\ 0, & Y \leqslant X \end{cases}.$$

Якщо X менше за Y, то виникає дефіцит (shortfall) $u \cdot |Y-X|^-$, де

$$|Y-X|^- = \begin{cases} 0, & Y \geqslant X \\ X-Y, & Y<X \end{cases}.$$

Тоді загальний прибуток має вигляд:

$$H = X - u \cdot |Y-X|^- + l \cdot |Y-X|^+. \tag{1}$$

У роботі розглядається задача про максимізацію математичного сподівання (1) стосовно до торгівлі акціями та опціонами. Для акцій $X = S_t, Y = S_{t+1}$, а для опціонів $X(t) = c$ – ціна опціону (premium), а $Y = |S_{t+1} - K|^+$, де K – страйкова ціна акції.

Сформульовано твердження, які дають можливість знайти як

$$maxE(H) = (1-l) \cdot max(X - \frac{1}{\alpha}E(|Y-X|^-)) + l \cdot E(Y), \alpha = \frac{1-l}{u-l},$$

де $max(X - \frac{1}{\alpha}E(|Y-X|^-)) = AV@R(Y)$, так і точку x^*, в якій воно досягається. Виявляється, що $x^* = G^{-1}(\alpha) = VaR_\alpha(Y)$, де $G^{-1}(\alpha)$ – квантиль розподілу Y рівня α.

Розглянуто як випадок, коли ми знаходимось в умовах моделі Блека-Шоулза [2], так і випадок коли ми маємо модель з активним ринковим часом [3] .

Література

[1] G. Ch Pflug, Romisch Werner *Modeling, Measuring and Managing Risk* // World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. — 2007. — С. 48–58.

[2] Harris R.S., Conroy R.M. *The Black-Scholes Ortion-Prising Model.* — Darden Business Publishing, University of Virginia, 2006.

[3] Castelli F., Leonenko N. N., Shchestyuk N. *Student-like models for risky asset with dependence.* — Stochastic Analysis and Applications, 35:3, 452-464, DOI: 10.1080/07362994.2016.1266945, 2017.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 3. — С. 56.

SOME PROPERTIES OF LAGRANGIAN GROUPS

A. Donchyk
(National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv, Ukraine)

The theory of groups is one of the most important sections of modern algebra. Together with development of group theory, its methods have also been actively developed.

The methods of group theory is a powerful instrument that is used not only in mathematics, but also in other sciences – in chemistry, physics, coding theory, cryptography, topology, theory of functions, crystallography etc. For example, the study of groups is important for classification and determination of properties of minerals and molecules in chemistry and crystallography; the set of symmetry operations is a group which allows drawing conclusions about properties of physical objects in physics; the symmetry group can help to determine the structure of optical spectra, Raman scattering spectra, and so on. Therefore, the need to study groups with prescribed properties has been increased by development of sciences [2, P.342; 3, P.384].

The need to study properties of finite groups first appeared in Lagrange, Ruffini, and Abel investigations of algebraic equations. In particular, Lagrange has established that the order of a subgroup is always a divider of the order of a group.

The groups, for which the statement, inverse to the Lagrange theorem, is true, are Lagrangian. That is, if for every divider m of the order of the group there exists a subgroup of order m, then the group is called Lagrangian.

Actually, not every finite group is Lagrangian. A symmetric group S_5 is the simplest example of a finite group which is not Lagrangian.

In [1], some basic properties of Lagrangian groups were presented. This report will concern the results of further investigations of properties of such groups.

The obtained results can be used in further studies on group theory.

References

[1] Donchyk A.M. *Investigation of the simplest properties of Lagrangian groups* // Education and science. – 2018. Collection of scientific works. – K: NPDU, 2018. – P.787. (In Ukrainian)
[2] Kurosh A.G. *The theory of groups.* 3th edition. – Moscow: Nauka, 1967. – 648 p. (In Russian)
[3] Trebenko D.Ya., Trebenko O.O. *Algebra and number theory*: In 2 Parts. – K: NPDU, 2009. – P. 1. – 420 p. (In Ukrainian)

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 3. — С. 57.

КРЕДИТНИЙ СКОРИНГ: СИСТЕМА ПІДТРИМКИ РІШЕНЬ

Б.-Х. С. Жибак
(Національний Університет "Києво-Могилянська Академія" Київ, Україна)

Модель кредитного скорингу є математичною моделлю, що використовується для оцінки ймовірності дефолту, тобто ймовірність того, що клієнти можуть викликати кредитну подію (тобто банкрутство, невиконання зобов'язань, неплатежі та події за умовчанням). У моделі кредитного скорингу ймовірність дефолту зазвичай відображається у вигляді кредитної оцінки.

Точні та прогнозні моделі кредитного скорингу допомагають максимізувати прибутковість фінансової установи, скоригованої за ризиком. Проте ринки та поведінка споживачів можуть швидко змінюватися під час економічних циклів, таких як спади або розширення. З цієї причини менеджерам з ризиків або кредитним аналітикам потрібно не тільки створювати моделі, але й швидко їх коригувати та перевіряти.

Метою моделі кредитного скорингу є проведення класифікації: відрізняти "хороших"аплікантів від "поганих". На практиці це означає, що статистичні моделі потрібні для виявлення роздільної лінії, що відрізняє дві категорії, в просторі пояснювальних змінних (вік, зарплата, освіта тощо).

У своїй роботі я розглянула питання розробки методу і алгоритмів інтелектуальної підтримки прийняття рішень на основі оцінки ризиків з урахуванням аспектів суб'єктивного кредитного поведінки. Перш за все, ми шукаємо шляхи для зменшення кількості доступних змінних, наприклад, можна відстежити категоричні змінні, де більшість даних лежать в одній категорії. Також є корисними інші інструменти від аналізу даних, такі як таблиці спряженостей або кореляцій.

У зв'язку із запропонованою в роботі концепцією підвищення ефективності системи роздрібного кредитування новим є оцінка ризиків, пов'язана з суб'єктивною кредитною поведінкою, для оцінки ефективності розробленого методу і алгоритмів, що реалізують його, прийнята умова оцінки правильності прийняття рішень тільки на її підставі.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 3. — С. 58.

СИЛЬНА МЕТРИЧНА РОЗМІРНІСТЬ УНІЦИКЛІЧНИХ ГРАФІВ

М. М. Матвеєва
(Національний Університет "Києво-Могилянська Академія" Київ, Україна)

Нехай G — зв'язний простий граф, тобто неорієнтовний граф без кратних ребер і петель.

Зв'язний граф, що має лише один цикл, називається уніциклічним.

Означення **1.** [1] Вершина $w \in V$ сильно розділяє дві вершини $u, v \in V$, якщо виконуються наступні рівності:

$$d_G(w,u) = d_G(w,v) + d_G(v,u) \text{ або } d_G(w,v) = d_G(w,u) + d_G(u,v).$$

Множина $S \subset V$ називається сильним метричним генератором для графа G, якщо будь-які дві вершини G сильно розділяються деяким елементом з S. Сильний метричний генератор найменшої потужності називається сильним метричним базисом, а його потужність — сильною метричною розмірністю G.

Теорема 1. *Нехай G — уніциклічний граф, причому кількість вершин його циклу дорівнює n. Позначимо внутрішні вершини G, які лежать у циклі, як v_i, їх кількість — b, а кількість листків близьких до v_i — l_{v_i}. Тоді виконуються такі твердження:*

(1) якщо $b < [\frac{n+1}{2}]$, то

$$dim_s G = \sum_{i=1}^{b} l_{v_i} - 1 + [\frac{n+1}{2}] - b.$$

(2) якщо $b \geq [\frac{n+1}{2}]$ і з кожних двох протилежних вершин в циклі графа G хоча б одна є внутрішньою, то

$$dim_s G = \sum_{i=1}^{b} l_{v_i} - 1.$$

(3) якщо $b \geq [\frac{n+1}{2}]$ і q — кількість пар протилежних вершин циклу графа G, для яких жодна не є внутрішньою, то

$$dim_s G = \sum_{i=1}^{b} l_{v_i} - 1 + q.$$

Література

[1] Kuziak Dorota, Yero Ismael G. and Rodriguez-Velazquez Juan A. *On the strong metric dimension of the strong products of graphs.* // Open Mathematics. — 2015."
[2] Sebo Andras and Tannier Eric. *On Metric Generators of Graphs.* // INFORMS. — 2004."

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 3. — С. 59.

ДИЛЕМА МАНДРІВНИКА.
ЧУТЛИВІСТЬ ВИБОРУ ДО РОЗМІРУ ШТРАФУ

А.І. Міцан
(Національний Університет “Києво-Могилянська Академія” Київ, Україна)

У теорії ігор дилема мандрівника є типом гри, в якій два гравці намагаються максимізувати свою власну виплату без будь-якого занепокоєння про виплату іншого гравця.

Було досліджено чутливість вибору гравців до розміру штрафу. Зібрано статистику відповідей для варіантів, де розмір R становив 5, 25, 50 та 80дол. Опираючись на зібрану статистику, були обчислені частотні ймовірності вибору опитуваним вартості меншу та більшу за середню, а також максимальної.

Проведені тести відхилили належність відповідей до нормального розподілу, тому була побудована наочна експоненційна залежність між ними.

Для штрафів 5дол. та 25дол. у зібраних відповідях немає суттєвих розбіжностей. Вони хаотично розкидані та не відслідковується залежність. При переході до штрафу 50дол. вже визначається від'ємна кореляція, тобто для штрафу 50дол. відповіді стали суттєво нижчі, ніж ті, що для 5дол. та 25дол.

Між штрафами 50дол. та 80дол. також визначається залежність від штрафу – чим він більший, тим менші за значенням відповіді давали опитувані.

Тестом Манна-Уітні були пдтверджені результати критерію знаків – між штрафами 5дол. та 25дол. відмінність неістотна, а між 25дол. та 50дол., 50дол. та 80дол. – істотна, відповіді суттєво зменшуються в значенні.

Зроблені такі висновки: при штрафі 25дол. і більше – відслідковується певна залежність, в той час як штраф 5дол. – експериментально низький для того, щоб опитувані на нього зважали.
Тому штрафи 5дол. та 25дол. можна ототожнити та не розглядати окремо, а 50дол. та 80дол. – є динаміка на зменшення значення відповідей.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 3. — С. 60.

ЗАХИСТ КЛЮЧІВ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕДОВОГО ШИФРУВАННЯ

М. Олійник
(Національний Університет "Києво-Могилянська Академія" Київ, Україна)

Концепція медового шифрування спрямована на захист персональних даних з низькою ентропією від атаки "грубою силою"(повного перебору). Це можуть бути ключі криптосистеми, пін-коди, паролі, номери кредитних карток. Для кожного з таких випадків розглядається своя схема медового шифрування. У [1] розглянуто схему захисту ключів криптосистеми RSA за допомогою медового шифрування.

Ми покажемо, що ця схема може бути також застосована до криптосистеми Рабіна.

Література

[1] Ari Juels, Thomas Ristenpart *Honey Encryption: Security Beyond the Brute-Force Bound* // Advances in Cryptology – EUROCRYPT — 2014.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 3. — С. 61.

З ІСТОРІЇ ОДИНИЦЬ ВИМІРЮВАННЯ ЄМНОСТІ НОСІЇВ ТА ОБ'ЄМУ ІНФОРМАЦІЇ

С.В. Паршуков, Л.М. Паршукова
(Національний Університет "Києво-Могилянська Академія" Київ, Україна)

Одиниці вимірювання інформації потрібні для вимірювання різних характеристик пов'язаних з інформацією - ємність комп'ютерної пам'яті, об'єми даних, які передаються цифровими каналами зв'язку тощо.

У 1928 році Ральф Гартлі сформулював фундаментальний принцип збереження інформації, який у 1948 році був формалізованим Клодом Шенноном. Термін для мінімальної кількості інформації – «біт» – був запропонований Клоду Шеннону Джоном Тьюкі [1]. Один біт є одиницею інформації, що визначено у міжнародному стандарті ISO/IEC 80000-13:2008 розробленому Міжнародною організацією зі стандартизації (ISO) та Міжнародною електротехнічною комісією (IEC) [2].

Розмір байта (сукупність бітів, які обробляються комп'ютером одночасно та історично використовувалися для кодування одного символу) залежав від апаратного забезпечення (від 1 до 48 бітів) до введення стандарту ISO/IEC 2382-1:1993 відповідно до якого, байт є рядком, який розглядається як єдине ціле та представляє символ або частину символу і складається з 8 бітів (октет) [3]. Один байт може містити значення від 0 до 255 (256 чисел, включно з нулем). Сучасні архітектури використовують 32- чи 64-бітні слова, які складаються відповідно з чотирьох чи восьми байтів. Авторство терміну байт приписують за різними версіями Вернеру Бухгользу та Луї Дж. Дулі [4].

Деяка плутанина виникає з використанням префіксів для похідних одиниць у десятковому (Міжнародна системи одиниць) та двійковому (стандарт IEC 60027-2:1999) представленні, що призводить до похибок під час обчислення. Двійкові префікси використовуються у файлових менеджерах та іншому програмному забезпеченні для вказування розміру файлів, виробниками оперативної пам'яті. Десяткові префікси використовуються у телекомунікаціях, при зазначені розмірів HDD, SSD, Cloud, USB-флешок, DVD, BD.

Література

[1] Ушаков А. *Клод Шенон — создатель теории информации (к 100-летию со дня рождения)* //Control Engineering Россия. — 2016. — № 2. — С. 84–87.
[2] IEC 80000-13:2008 [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: *https://www.iso.org/standard/31898.html*
[3] ISO/IEC 2382:2015 [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: *https://www.iso.org/standard/63598.html*
[4] Байт [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: *https://uk.wikipedia.org/wiki/*

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 3. — С. 62.

ЗБЕРЕЖЕННЯ СЕКРЕТУ ПРИ ДОКУМЕНТООБІГУ

С.В. Степанюк
(Національний Університет "Києво-Могилянська Академія", Київ, Україна)

В основі документообігу зазвичай лежать облікові книжки. В більшості сучасних систем вони досі паперові, проте все ширшого розповсюдження набувають електронні журнали обліку. Один із кращих способів реалізації є розподілені облікові книжки(також відомі як блокчейни). В цій роботі опрацьовувалися теоретичні матеріали, на основі яких було запропоновано систему для вирішення проблем безпеки під час документообігу навчальних відомостей. В даній роботі показано, за рахунок чого запропоновані алгоритми будуть безпечними для використання та яким саме чином будуть захищені дані під час ведення обліку. Це гарантуватиметься саме завдяки протоколам доведення без розголошення (Zero-Knowledge). Також зауважимо, що під час розробки варто звернути серйозну увагу на вже загальновідомий та давно встановлений досвід в галузях криптографії, інформаційної безпеки та теорії розподілених систем для побудови надійних продуктів. В іншому разі довіряти цінності новій системі може бути вкрай небезпечно.

Література

[1] Shafi Goldwasser, Sunoo Park. *Public Accountability vs. Secret Laws: Can They Coexist?, A Cryptographic Proposal MIT and Weizmann.* / https://eprint.iacr.org/2018/664.pdf.

[2] Christian Cachin, Marko Vukoli?c. *Blockchain Consensus Protocols in theWild, IBM Research – Zurich*

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 3. — С. 63.

ВЛАСТИВОСТІ ТРИКУТНИКА ПАСКАЛЯ

М.В. Тверітінова, І.І. Голіченко
(КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна)

Трикутник Паскаля, що базується на біноміальних коефіцієнтах, завжди був цікавим предметом досліджень. Його наочність відіграє провідну роль у математичному застосуванні, адже це дуже зручно для швидких розрахунків. В трикутнику помічено багато корисних властивостей, проте це не означає, що всі вони знайдені.

У даній роботі виявлено і розглянуто деякі властивості трикутника Паскаля. Зокрема такі співвідношення:

$$C^2_{n+2} - C^2_n = 2n + 1$$

для знаходження непарних чисел,

$$C^2_{n+2} - C^1_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

утворюють послідовність центральних багатокутних чисел або "послідовність ледачого постачальника" (англ. *lazy caterer's sequence*) [1],

$$C^3_{n+2} \cdot C^1_n + C^3_n \cdot C^1_n + C^3_n \cdot C^1_{n+1} + C^3_{n+2} \cdot C^1_{n-1} + C^3_{n+1} \cdot C^1_{n-1} + C^3_{n+1} \cdot C^1_{n+1} = n^4$$

та

$$C^2_{n-1} \cdot C^2_{n+1} + C^2_{n+2} \cdot C^2_n + C^2_{n+2} \cdot C^2_{n+1} + C^2_{n-1} \cdot C^2_n - C^1_n \cdot C^1_{n+1} - C^1_n \cdot C^1_{n-1} = n^4$$

дають в результаті четвертий степінь натурального числа $n \geq 1$.

У статті [2] наведено достатньо прикладів застосування трикутника Паскаля, проте зв'язок з непарними числами за другою діагоналлю не виявлено. В статтях [3] та [4] пропонується знайти квадрат чи куб відносно початкової позиції у трикутнику, однак окремої формули саме через комбінаторні вирази для 4-го степеня не запропоновано. Так чи інакше, наведені факти можуть бути застосовані як в простих розрахунках, так і у наукових дослідженнях.

Література

[1] OEIS *The on-line encyclopedia of integer sequences* // Електронний режим доступу http://oeis.org/search?q=A000124

[2] Kate Berryman *Properties of Pascal's Triangle.* //Стаття в електронному вигляді. http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT6680Su12/Berryman/6690/BerrymanK-Pascals/BerrymanK-Pascals.html

[3] Alexander Bogomolny *Squares in Pascal's Triangle.* //Стаття в електронному вигляді. https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra/SquaresInPascal.shtml

[4] Alexander Bogomolny *Cubes in Pascal's Triangle.* //Стаття в електронному вигляді. https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra/CubesInPascal.shtml

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 3. — С. 64.

ДО ПИТАННЯ ФОРМУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-ТЕХНІЧНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ ІНФОРМАТИКИ

Г.В. Ткачук
(Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини
Умань, Україна)

Система вищої освіти має на меті підготовку висококваліфікованого фахівця в обраній сфері діяльності, який, володіючи необхідними вміннями та навичками, здатний використовувати їх у майбутній професійній діяльності. В цьому контексті важливим є не наявність певних знань, а вміння їх застосовувати на практиці для розв'язання конкретного завдання, що передбачає зміну парадигми вищої освіти із знаннєвої в компетентнісну та забезпечує формування ключових компетентностей майбутніх фахівців. Плануючи роботу з формування компетентностей, доцільно визначити критерії, за якими можна зробити висновок про рівень сформованості тих чи інших компетентностей. До складу критеріїв оцінювання рівня сформованості інформаційно-технічних компетентностей майбутніх учителів інформатики у процесі практично-технічної підготовки доцільно включити такі компоненти [2], [1]: - мотиваційно-ціннісний (наявність стійких мотивів до оволодіння технічними знаннями, уміннями та навичками, отримання досвіду, удосконалення інформаційно-технічних компетентностей тощо); - змістовий (визначає рівень володіння технічними знаннями, необхідних для професійної діяльності); - операційно-діяльнісний (рівень володіння технічними уміннями та навичками, необхідними для розв'язку практично-технічних завдань, технічна грамотність, можливість використання технічних умінь в різних ситуаціях). Таким чином, визначені компоненти дають змогу зробити висновок, що інформаційно-технічні компетентності інтегрують знання (про закономірності будови та функціонування конкретних технічних пристроїв), уміння (використовувати наявні знання для розв'язання технічних задач на рівні своєї професійної кваліфікації), навички (використання, обслуговування, ремонту, комплектації технічного обладнання), здатності (доступно викладати навчальний матеріал, що стосується технічної сторони) і виявляються у прагненні і готовності до ефективного застосування сучасних технічних засобів та комп'ютерних технологій для вирішення завдань у професійній діяльності і повсякденному житті, усвідомлюючи при цьому значущість предмета і результату діяльності.

Література

[1] Ткачук Г.В. *Теоретичні і методичні засади практично-технічної підготовки майбутніх учителів інформатики в умовах змішаного навчання : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня докт. пед. наук : спец. 13.00.02 - Теорія та методика навчання (технічні дисципліни)* — Київ, 2019. — 40 с.

[2] Ткачук Г. В., Малежик П. М. *До питання визначення критеріїв та показників рівня сформованості інформаційно-технічних компетентностей майбутніх учителів інформатики у процесі практично-технічної підготовки //* Фізико-математична освіта : науковий журнал. — Суми : Вид-во СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2018. – Вип. 4 (18). — С. 154–160.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 3. — С. 65.

ВПРОВАДЖЕННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ У НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЦЕС

Я.В. Усатюк
(Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини,
Умань, Україна)

Людство неминуче вступає в інформаційну епоху. Сучасний етап розвитку суспільства характеризують різким посиленням інформаційної насиченості і інформаційної взаємодії, що є результатом процесів глобалізації і безпрецедентного розвитку інформаційних і комунікаційних технологій. Одним із важливих напрямків розвитку інформатизації є нові комп'ютерні технології. Комп'ютерні технології постійно вдосконалюються, стають більш насиченими, ємними, гнучкими, продуктивними, націленими на різноманітні потреби користувачів [1]. Інтерактивність, інтенсифікація процесу навчання, зворотний зв'язок - помітні переваги цих технологій, котрі зумовили необхідність їх застосування у різних галузях людської діяльності, насамперед у тих, які пов'язані з освітою та професійною підготовкою. Сьогодні інформаційні технології стали невід'ємною частиною сучасного світу, вони значною мірою визначають подальший економічний та суспільний розвиток людства. У цих умовах революційних змін вимагає й система навчання. Тобто актуальність даного питання має місце у сучасному освітньому середовищі, адже нині якісне викладання дисциплін не може здійснюватися без використання засобів і можливостей, які надають комп'ютерні технології та Інтернет. Вони дають змогу вчителю краще подати матеріал, зробити його більш цікавим, швидко перевірити знання учнів та підвищити їхній інтерес до навчання. У будь-якому варіанті доступ в Інтернет для вчителя підвищує і рівень підготовки самого вчителя, і рівень проведення занять, і якість знань учнів. При цьому інтерес більшості учнів до комп'ютера й Інтернету підвищує мотивацію навчання. Збільшення комп'ютерної техніки та подальше її вдосконалення поширює можливості викладачів використовувати комп'ютерні технології не тільки при вивченні інформатики, але й поєднанні викладання інших дисциплін із використанням ІКТ, в тому числі і математики. Застосування ІКТ у навчальному процесі дозволяє реалізувати ідеї індивідуалізації та диференціації навчання, що є основними завданнями сучасної системи освіти України [2].

Література

[1] Дишлєва С. *Інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ) та їх роль в освітньому процесі [Електронний ресурс] / С. Дишлєва. Режим доступу: http://osvita.ua/school/technol/6804*

[2] Чепурна Н.М. *Сприяння підвищенню конкурентоздатності вчителя поч.кл. в інформаційно-комунікаційному освітньому просторі ЧОІПОПП. [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://www.psyh.kiev.ua/*

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 3. — С. 66.

СПРОЩЕННЯ ЗГОРТКОВИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ

О.В. Федоров
(Національний Університет “Києво-Могилянська Академія”, Київ, Україна)

Згорткові нейронні мережі розв'язують задачі розпізнавання зображень та аудіо, що є дуже поширеними задачами сьогодні. І наразі розгортання великих згорткових нейронних мереж на пристроях користувачів, на яких ці задачі і потрібно вирішувати, є актуальною проблемою через велику складність обчислень.

Архітектури згорткових нейронних мереж для розв'язання поширених задач (AlexNet [1], VGG16 [2], тощо) зазвичай є надлишковими з метою досягнення кращої збіжності у процесі налаштування вагів.

Було досліджено спрощення архітектур нейронних мереж за допомогою розкладу згорткових фільтрів неповного рангу на послідовні фільтри меншої розмірності, за допомогою чого досягається виграш у кількості операцій. Наприклад, для фільтру розміру $K \times K$ рангу 1, цей фільтр розкладається на послідовні фільтри розміру $K \times 1$ та $1 \times K$, що дає виграш в кількості операцій від $O(K * K * S)$ до $O(K * S + K * S)$, де S є кількістю застосувань фільтру до вхідної матриці.

Був застосований такий підхід до популярних архітектур нейронних мереж (VGG16, тощо), та виконано порівняння швидкості роботи та точності початкової моделі та спрощеної.

Література

[1] Alex Krizhevsky, Ilya Sutskever, Geoffrey E. Hinton. *ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks* // Proceedings of the 25th International Conference on Neural Information Processing Systems, p.1097-1105, December 03-06, 2012, Lake Tahoe, Nevada

[2] K. Simonyan, A. Zisserman. *Very Deep Convolutional Networks for Large-Scale Image Recognition.* // In ICLR, 2015.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 3. — С. 67.

ON PROPERTIES OF GROUPS WITH AN A^p-SUBGROUP

Yu.S.Fedorchuk, O.O.Trebenko
(National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv, Ukraine)

A large number of modern investigations in group theory confirm that one of the main questions of group theory research still continues to be the question of the existence of subgroups satisfying some kind of given conditions.

This study belongs to the direction mentioned.

Let G be a group and p be some fixed prime.

Consider a subset H of all elements of G satisfying the following two conditions:

a) $x^{-1}hx = h^p$ for all $h \in H$, $x \in G \backslash H$;

b) $h_1 h_2 = h_2 h_1$ for arbitrary elements h_1, h_2 of H.

It is not hard to show that H is a normal subgroup of G. It was called an A^p-subgroup [1].

The finite Symmetric group S_3 and the quaternion group Q_8 are examples of a group with an A^p-subgroup (with $p = 2$ and $p = 3$ respectively).

Some interesting properties of a group with an A^p-subgroup were established. They will be presented in the report.

Література

[1] Fedorchuk Yu.S. *Groups with an A^p-subgroup* // Education and Science. — 2016. Collection of scientific papers. — Kyiv: NPDU, 2016. — P. 242–243 (in Ukrainian).

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 3. — С. 68.

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ МАРШРУТУ ІНТЕРНЕТ-ПЛАТЕЖІВ

А.М. Цислицький
(Національний Університет "Києво-Могилянська Академія", Київ, Україна)

На даний момент в світі спостерігається активний перехід до безготівкового розрахунку. Такий вид розрахунку набув найбільшого поширення в інтернеті, де можна купити будь-який товар, не виходячи з дому. Навколо інтернет-платежів банківською картою збудовано велику міжнародну інрфраструктуру, яка складається з банків та постачальників платіжних сервісів у більшості країн світу. Складність платіжної інфраструктури створює перешкоди в успішному проходжені платежу. Одна з них: на ринку міжнародних платіжних систем різні банки-еквайри (банк, що списує гроші з картки) мають різні можливості, як технічні так і юридичні, для успішного списання грошей. Обрання правильного банку для кожного конкретного інтернет-платежу, з урахуванням всіх його особливостей і параметрів, збільшує ймовірність успішної оплати. Отже, при правильному прийняті рішення бізнес зможе збільшити конверсію проходження платежів, і як наслідок - власні прибутки. Тому в роботі було поставлено мету: створити систему, що максимізує прибуток, через обрання стратегії пошуку найефективнішого банку.

Задача вибору маршруту інтеренет-платежів зводиться до задачі багаторукого бандиту. Тобто аналогічна грі на декількох ігрових автоматах (бандитів) одночасно. Основна проблема задачі – визначити, з мінімальними втратами в грошах, автомат, який буде давати нам найбільший виграш. Оскільки на старті нам невідомі справжні показники автоматів, ми будемо дізнаватись їх, граючи на кожному автоматі і записувати результат кожної гри. Такий підхід називається навчанням з підкріпленням.

В роботі було розроблено власну систему симуляції роботи банків еквайрів. За її допомогою порівняно різні стратегії гри: A/B тестування, епсилон-жадібний алгоритм, UCB [1], семплування Томпсона [2], пропорційний розподіл. Було визначено найефективнішу стратегію - семплування Томпсона. До обраної стратегії запропоновані покращення у вигляді каскаду з стратегій оцінки різних параметрів та зміни стану системи при технічних несправностях банків. Результати порівняні зі звичайною стратегією семплування Томпсона.

Література

[1] Kaufmann, Emilie Cappe, Olivier Garivier Ltci, Aurelien Paristech, Telecom *On Bayesian Upper Confidence Bounds for Bandit Problems* – 2019.

[2] Emilie Kaufmann, Nathaniel Korda, Remi Munos *Thompson Sampling: An Asymptotically Optimal Finite Time Analysis* [Електронний ресурс] // arXiv.org. 2012. Дата оновлення: 19.07.2012. URL: https://arxiv.org/abs/1205.4217

Секція 4.

Математичної фізики, фізики історії та методики навчання математики і фізики

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 101.

ГНУЧКА МОДЕЛЬ ЯК ОДНА ІЗ ПЕРСПЕКТИВНИХ МОДЕЛЕЙ ЗМІШАНОГО НАВЧАННЯ АЛГЕБРИ І ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ В ПЕДАГОГІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

М.С. Антошків
(НПУ ім. М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

Технологія Blended Learning (комбіноване, змішане навчання) на сьогоднішній день є світовим освітнім трендом, а перспективи її впровадження свідчать на користь організації змішаного навчання алгебри і теорії чисел в педагогічному університеті [1]. Важливою перевагою технології є можливість врахування психологічних особливостей і потреб представників так званого цифрового покоління, які мають відмінні від своїх попередників стиль мислення та способи роботи з інформацією [2].

Виділяють такі моделі змішаного навчання як ротація станцій, перевернутий клас, ротація лабораторій, індивідуальна ротація, модель а-ля карт, збагачена віртуальна та гнучка моделі. Кожна з них має ті чи інші переваги. Зосередимо увагу на перспективах впровадження гнучкої моделі в процес навчання алгебри і теорії чисел.

Зміст гнучкої моделі змішаного навчання полягає в наступному. На початку заняття студенти займають місце в так званому «офісі» — певній локації університету, де кожен із студентів підключається до власного комп'ютера, планшета або смартфона та заходить на дистанційну платформу. Роль офісу може виконувати навчальна аудиторія, чи, навіть, деяка її частина. На дистанційній платформі студент обирає свій план на день (або лише на найближче заняття), самостійно поєднує різні навчальні активності, складає індивідуальний навчальний маршрут. Викладач може призначити окремі активності обов'язковими, але загальний план заняття студент формує сам, виходячи з власних потреб і побажань. Після цього починається навчання відповідно до плану, яке включає відвідування різних локацій: зони групової роботи, індивідуального навчання, консультацій з викладачем або тьютором, відпочинку.

Прогнозовані переваги впровадження гнучкої моделі комбінованого навчання – персоналізація навчального процесу, врахування індивідуальних когнітивних особливостей (кожен працює у власному темпі, виконуючи ті завдання, які для нього є релевантними), навчання за принципом майстерності (наступна тема не відкривається доти, поки не буде ґрунтовно засвоєно попередню тему), розвиток навичок самоосвіти та самоконтролю, вміння працювати в команді тощо. Тому, на нашу думку, дослідження ефективності цієї моделі заслуговує першочергової уваги. Експеримент з її впровадження під час вивчення алгебри і теорії чисел студентами математичних спеціальностей очікується найближчим часом.

Література

[1] Антошків М.С. Требенко О.О. *Blended learning як перспективна технологія навчання вищої алгебри майбутніх вчителів математики* // Відкрите освітнє е-середовище сучасного університету. — 2016. — № 2. — С. 76–83. — ISSN: 2414-0325.

[2] Антошків М.С. *Врахування психологічних особливостей студентів цифрового покоління шляхом організації змішаного навчання* // Фізико-математична освіта : науковий журнал. — Суми: Вид-во СумДПУ імені А. С. Макаренка. — 2018. — Вип. 1 (15). — С. 128–131.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 72.

ЗАДАЧІ З ЕЛЕМЕНТАМИ УКРАЇНСЬКОГО ФОЛЬКЛОРУ ПРИ ВИВЧЕННІ АЛГЕБРИ У 7 КЛАСІ

А.В. Билим, О.В. Чорненька
(Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя, Ніжин, Україна)

Для вчителя математики сучасної української школи досить актуальним та важливим є завдання, що стосуються забезпечення умов успішного навчання та виховання учнів. Доцільним є не лише пряме повідомлення нових знань, а й встановлення зв'язків з уже відомими історичними фактами та подіями, ознайомлення учнів з можливостями застосування математичних понять і методів при вивченні інших дисциплін. Саме тому в основу даного дослідження покладено питання про можливість використання задач з елементами українського фольклору на уроках математики.

Зупиняючись на вивченні алгебри у 7 класі, відмітимо основні завдання даного дослідження: 1) висвітлити основні функції математичних задач з елементами українського фольклору; 2) дослідити наявність задач такого типу в діючих підручниках алгебри 7 класу; 3) проілюструвати на прикладах методичні особливості розв'язання таких задач.

Провівши аналіз сучасних методичних робіт [1], [2] та діючих підручників з алгебри 7 класу, приходимо до висновку, що для сучасного вчителя математики використання задач з елементами українського фольклору є досить цікавим та актуальним. Задачі з елементами фольклору, які наявні у підручниках та можуть бути використані на уроках алгебри у 7 класі, це переважно текстові задачі та задачі на обчислення. Для таких задач, відповідно до класифікації, наведеної у роботі [3], можна виділити наступні функції: навчальна функція (за допомогою задач учні вчаться застосовувати вже відомі знання, в процесі розв'язання дізнаються про додаткову теоретичну інформацію та методи розв'язання); розвивальна функція (задачі сприяють розвитку мислення школярів, формуванню вмінь математизувати ситуацію); виховна функція (спрямована на формування в учнів наукового світогляду; національного, патріотичного, економічного, естетичного виховання).

У подальших дослідженнях планується провести підбір задач з елементами українського фольклору, де зустрічаються давні назви мір довжин, ваги, об'єму. Ці задачі сприятимуть ознайомленню учнів з традиціями та звичаями нашого народу, вихованню патріотичного ставлення до Батьківщини.

Література

[1] Вагіна Н., Іщенко І. *Математичні засоби розвитку профільних інтересів учнів гуманітарних класів філологічного напрямку.* // Рідна школа. — 2014. — № 6. — С. 48–52.

[2] Глібова А.В. *Математика в прислів'ях та приказках.* // Математика в школах України. — 2008. — № 1(193). — С. 40–41.

[3] Слєпкань З.І. *Методика навчання математики.* — Київ: Вища шк., 2006. — 582 с.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 73.

ОРГАНІЗАЦІЯ ІНТЕГРОВАНОГО НАВЧАННЯ ФІЗИКИ ТА АСТРОНОМІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ КВЕСТ-ТЕХНОЛОГІЙ

О. В. Бронішевська
(НПУ ім. М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

На сьогодні одна із вимог під час інтегрованих уроків полягає в тому, що фізика та астрономія для учнів повинні бути цікавими, легкими і сучасними. Більшості учням проблемно здійснювати логічні операції, важко засвоювати велику кількість інформації.

Тому для підвищення мотивації учнів до навчання, розвитку активного пізнання на уроках, самостійної роботи, перевірки знань у процесі інтегрованого навчання фізики та астрономії використовуємо квест-технологію, яка навчає розв'язувати, аналізувати і знаходити розв'язки поставлених завдань і задач у нестандартних умовах.

Квест (від англ. quest – пошук, пошук щастя/знання/істини, пошук пригод) – інтелектуальне змагання з елементами рольової гри, основою якого є послідовне виконання заздалегідь підготовлених завдань командами або окремими учасниками, - за джерелами Вікіпедії.

На нашу думку, квест – це інноваційний підхід до традиційного виду навчання під час інтегрованого курсу фізики та астрономії.

Правильно створений квест допомагає долати проблеми та труднощі, а саме: вміти застосовувати свої знання на практиці у незвичайних ситуаціях, логічно мислити, розв'язувати, розплутувати і доходити до кінцевого результату в процесі задачного підходу до навчання.

Що означає правильно створений квест?

Це цікавий сценарій складений за змістом теми або розділу з фізики та астрономії, який має чітко визначений результат, його має отримати учасник або команда на електронних чи паперових носіях і який необхідно виконувати під час проходження етапів і дійти до цього самого результату. Основна мета квесту – це швидке і якісне виконання цікавих завдань з метою досягнення кінцевої цілі, у результаті чого учасник або команда отримують винагороду.

Квест має певну структуру: вступ (пояснення правил, інструкції щодо виконання, роль учасників, план роботи); завдання (чітко сформульований і визначений кінцевий результат самостійної роботи: створена серія задач, на які потрібно знайти відповіді; вказана проблема, яку слід розв'язати; певна позиція, яка має бути захищена; опис процесу роботи, яку слід виконати кожному учаснику квеста; опис критеріїв та параметрів квеста (критерії оцінки залежать від типу завдань, які мають бути розв'язані); висновки, які отримали під час виконання самостійної роботи; винагородження учасників квесту.

У процесі інтегрованого навчання фізики та астрономії квест дозволяє учням краще ознайомитись з темою, розвиває ерудицію, сприяє розвитку самостійності та самоорганізації учнів, дозволяє учням краще пізнавати один одного під час прийняття рішень у процесі виконання навчального проекту з фізики та астрономії, швидко запам'ятовувати інформацію, розвитку вміння працювати з великими об'ємами фізичної й астрономічної інформації, розвиває логічне мислення, увагу, уяву, спостережливість, збагаченню словникового запасу з фізики та астрономії, підвищує загальний рівень розвиненості учнів, реалізує міжпредметні зв'язки у процесі вивчення фізики та астрономії.

Ми впевнені в тому, що якщо вчитель фізики та астрономії створить і організує квест з учнями, одразу побачить позитивні зміни і зацікавленість предметами під час інтегрованого навчання фізики та астрономії. Адже учні хочуть бути цікавими, оригінальними і поміченими. І під час квесту є можливість кожному учневі проявити себе.

Отже, все викладене вище дає змогу зробити висновок, що квест - це ігрова технологія, яка має чітко поставлене дидактичне завдання, ігровий задум, обов'язково має керівника (наставника), чіткі правила, та реалізується з метою підвищення в учнів знань і вмінь XXI століття.

Література

[1] Електронний ресурс. *Доповідь «Квест як ігрова форма навчання та форма організації дитячого свята».* — https://www.wisely.info/?p=4988.

[2] Електронний ресурс. *Доповідь «Навчальний квест: навчати, шукати, грати».* — http://osvitanova.com.ua/posts/1443-navchalnyi-kvest-navchaty-shukaty-hraty.

[3] Таратухина Т.А. *Использование технологии веб-квест в учебном процессе..* — http://nsportal.ru//schola/snostrannye-yazyki/library/ispozovanie-tekhnologii-veb-kvest-v-uchebnom-protsesse.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 75.

АКУСТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ НАПОВНЕНОГО ПЕНТАПЛАСТУ

В. В. Віржанський
(НПУ ім. М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

Розробка новітніх матеріалів і технологій, привело до створення матеріалів, таких як полімерні композиційні матеріали (ПКМ) на основі пентапласту дисперсного наповнювача AgI (йодид срібла). [1]

ПКМ оптимального складу виразно проявляють властивості як полімерної матриці так і наповнювача. Концентраційна залежність густини системи пентапласт – дисперсний йодид срібла, характеризується монотонним зростанням, що пов'язано із збільшенням вмісту наповнювача (AgI) з більшою густиною. Пористість усіх зразків ПКМ, що визначалась як різниця між значеннями густини, одержаних за даними гідростатичного зважування та розрахованими за правилом сумішей, залежить від вмісту наповнювача та не перевищує 1%, що забезпечує ефективний захист композитів системи від атмосферних впливів та дії агресивних середовищ.

З урахуванням властивостей як наповнювача, так і полімерної матриці, було виготовлено циліндричні зразки для дослідження швидкості поширення та поглинання ультразвуку діаметром 20 мм і висотою $\frac{6}{7}$ мм . [2]

Дослідження акустичних властивостей ПКМ проводили імпульсно-фазовим методом при кімнатній температурі. Для реалізації імпульсного фазового методу використовували вимірювач швидкості та поглинання ультразвуку "УС-12-ИМ", ультразвукові випромінювач та приймач із буферними стержнями. За показами значень швидкості поширення та коефіцієнту поглинання ультразвуку обчислювали хвильовий опір (x), модуль пружності (E') та тангенс кута механічних втрат ($tg\delta$).

Відносна похибка при дослідженні акустичних властивостей становила: швидкості ультразвуку $\varepsilon \leq \frac{0.5}{1}$ %; поглинання – $\frac{4}{5}$ %.

Із результатів дослідження зразка, було з'ясовано, що існує залежність швидкості поширення ультразвуку від вмісту наповнювача в системі пентапласт-AgI. Також, можна ознайомитись із залежностями поглинання ультразвуку та «стрибка» коефіцієнта поглинання ультразвуку.

Аналіз концентраційних залежностей швидкості, поглинання та "стрибка" поглинання ультразвуку дозволяє, в певній мірі, пояснити динаміку зміни структури та розмірів структурних неоднорідностей системи пентапласт – AgI. Відповідно і акустичні властивості цього зразка.

Література

[1] Мулин Ю.А., Ярцев И.К., Пекур А.Х., Богданов В.П. *Наполненный пентапласт.* // Пластические массы. — 1972. — № 2. — С. 63–67.

[2] Берман Н. *Ультразвук и его применение в науке и технике.* // М. — 1975.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 76.

АКСІОЛОГІЧНИЙ ПІДХІД У ПРОЦЕСІ ФОРМУВАННЯ ВАЛЕОЛОГІЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Д. А. Возносименко
(Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, Умань, Україна
Умань, Україна)

Орієнтація підготовки майбутніх вчителів математики на формування у них системи загальнолюдських і професійних якостей, що визначають їхнє ставлення до світу, до власної реальності, до самого себе (як людини і фахівця) відповідає аксіологічному (ціннісному) підходу до навчання, здійснюється на засадах аксіологічного підходу [1]. Аксіологічний підхід у процесі формування валеологічної компетентності майбутнього вчителя математики передбачає набуття ним загальнолюдських цінностей (людина, життя, здоров'я, добро, природа, людська гідність, мораль тощо). Сучасний вчитель повинен володіти аксіологічним мисленням, оскільки завдання вчителя зробити так, щоб цінності життя і здоров'я, стали надбанням кожного учня і основою для формування його особистісних переконань.Реалізація аксіологічного підходу у процесі підготовки майбутніх учителів математики полягає у використанні конкретних прикладів, що розкривають роль і потребу людини у створенні та використанні не лише матеріальних, але й загальнолюдських цінностей. Одне із завдань, яке стоїть перед сучасним вчителем зробити так, щоб визначені освітні цінності, зокрема життя і здоров'я, стали надбанням кожного учня і основою для формування його особистісних переконань. Одним із шляхів реалізації аксіологічного підходу у підготовці майбутніх учителів математики є використання інноваційних технологій. На сучасному етапі модернізації освітнього процесу, особливої популярності набуває впровадження в процес підготовки фахівців тренінгових технологій навчання. Тренінгові заняття сприяють підвищенню пізнавальної активності студентів, формуванню здоров'язберігаючої компетентності, розвитку у них творчого мислення та креативності у процесі виконання завдань. Отже, аксіологічний підхід передбачає формування валеологічної компетентності майбутніх вчителів математики через: систему ціннісного ставлення до власного здоров'я та здатність до об'єктивної оцінки своїх можливостей; усвідомлення студентами важливості здоров'я школярів, та власного здоров'я як до найвищої цінності будь-якої особистості; усвідомлення необхідності дотримуватися основних правил здоров'язбереження, що дозволить найбільш ефективно виконувати завдання власної здоров'язберігаючої діяльності у майбутній професії.

Література

[1] Бевз В.Г. *Реалізація аксіологічного підходу у навчанні майбутніх учителів математики* // Didactics of mathematics : Problems and Investigations. № 39. — С. 7–10.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 77.

РОЗРАХУНОК ДРУГОГО КОЕФІЦІЄНТА В'ЯЗКОСТІ ТА ПОГЛИНАННЯ У ФТОРОВАНИХ СПИРТАХ

А.М. Гетало
(ПНПУ імені В. Г. Короленка, Полтава, Україна)

У доповіді викладені результати розрахунків другого коефіцієнта в'язкості і поглинання в фторованих спиртах. Фторовані спирти знайшли широке застосування у промисловості як теплоносії та холодильні агенти, у медицині як антисептики і кровозамінники, слугують проміжними продуктами в органічному синтезі та мономерами для отримання полімерних матеріалів [1].

Нами були виміряні густина, зсувна в'язкість, швидкість і поглинання звуку в 2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7,7-додекафторгептанолі-1 ($C_7H_3F_{12}OH$) та 1Н,1Н-тридекафторгептанолі-1 ($C_7H_2F_{13}OH$) на частоті 27,5 МГц і в інтервалі температур $(293 \div 363)$ К. При вимірах використовувався метод імпульсної акустичної спектроскопії. Було розраховано класичне поглинання, обумовлене зсувною в'язкістю, згідно рівняння $\frac{\alpha_{stoks}}{f^2} = \frac{8\pi^2\eta}{3\rho c^3}$ та коефіцієнт об'ємної в'язкості η_V з величин надлишкового поглинання при $\omega\tau \ll 1$ згідно рівняння $\eta_V = \frac{4}{3}\frac{\alpha_{exp}}{\alpha_{stoks}}\eta_S$.

Характерним є те, що поглинання звуку в досліджених нами рідинах зі зростанням температури зменшується. Однак спостерігається, що величина класичного коефіцієнта поглинання в значній мірі залежить від кількості замін атомів водню на атоми фтору.

Уведення атомів фтору в органічні молекули змінює електронну густину молекули і суттєво впливає на фізичні властивості спиртів. Ці факти вказують на тісний зв'язок між поглинанням звуку із структурою рідини. Висловити якусь переконливу думку про зв'язок класичного коефіцієнту поглинання з міжмолекулярною взаємодією було б не доцільно. Але в окремих випадках для багатьох рідин, зменшення міжмолекулярної взаємодії призводить до зменшення поглинання звуку.

Проведені розрахунки показали, що характер зміни поведінки коефіцієнта об'ємної в'язкості із зміною температури в досліджуваних рідинах такі самі, як і для зсувної в'язкості. У досліджених рідинах відношення об'ємної в'язкості до зсувної в'язкості зростає зі зростанням температури, і значний вплив на це має заміна атомів водню атомами фтору.

Література

[1] Шартс К., Шеппард У. *Органическая химия фтора.* — Москва: Мир, 1972. — 480 с.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 78.

A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH FREE BOUNDARY: LIE SYMMETRY, REDUCTION AND EXACT SOLUTIONS

V.V. Davydovych
(Institute of Mathematics, NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine)

Let us consider the $(1+2)$-dimensional nonlinear system of the form

$$\begin{aligned}
&\alpha_t + (\alpha u^1)_x + (\alpha u^2)_y = S(\alpha),\ u^1_x + u^2_y = \nabla \cdot (D(\alpha)\nabla p)\,,\\
&\left[(2+\lambda)\alpha u^1_x + \lambda\alpha u^2_y\right]_x + \left[\alpha u^1_y + \alpha u^2_x\right]_y = p_x + (\alpha\Sigma(\alpha))_x,\\
&\left[\alpha u^1_y + \alpha u^2_x\right]_x + \left[(2+\lambda)\alpha u^2_y + \lambda\alpha u^1_x\right]_y = p_y + (\alpha\Sigma(\alpha))_y,
\end{aligned} \tag{1}$$

which is the two-dimensional (in space) approximation of the known tumour growth model proposed in [1]. The tumour growth model derived in [1] formally consists of the seven governing equations in the two-dimensional space approximation (see equations (3), (10)–(12) therein). However the velocity of water in the tumour can be expressed via the cell velocity using equations (11) [1] and substituted into other equations. Moreover the equation for nutrients (12) [1] may be skipped by treating the nutrient-rich case. As a result the system of the governing equations reduces to system (1).

In system (1): α is the tumour cell concentration; u^1 and u^2 are the cell velocity components; p is the water pressure; S, D and Σ are the known functions and their typical forms are listed in [1].

Because the tumour size is changing with time, we need to supply the governing equations (1) by appropriate boundary conditions. Assuming that the tumour boundary is prescribed by a curve $\Gamma(t,x,y) = 0$, where Γ is an unknown function, the boundary conditions have the form

$$\begin{aligned}
&u^1\Gamma_x + u^2\Gamma_y = -\Gamma_t, \quad p = 0,\\
&\left[(2+\lambda)u^1_x + \lambda u^2_y\right]\Gamma_x + \left[u^1_y + u^2_x\right]\Gamma_y = 0,\\
&\left[u^1_y + u^2_x\right]\Gamma_x + \left[\lambda u^1_x + (2+\lambda)u^2_y\right]\Gamma_y = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

So, we have the nonlinear boundary value problem (1)–(2) with the unknown moving boundary $\Gamma(t,x,y) = 0$.

The main result of our investigation can be summarized as follows. The Lie symmetry analysis of the model (1)–(2) was carried out. The symmetries derived are applied for the reduction of the nonlinear boundary value problems in question to those of lower dimensionality. Finally, the reduced problems with correctly-specified coefficients were exactly solved and the exact solutions derived were analysed.

Література

[1] Byrne H., King J.R., McElwain D.L.S., Preziosi L. *A two-phase model of solid tumour growth* // Appl. Math. Letters — 2003. — V. 16 — P. 567–573.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 79.

ЕЛЕКТРОННА ВЕРСІЯ ПІДРУЧНИКА ЯК ЗАСІБ НАВЧАННЯ ФІЗИКИ

С. О. Декарчук
(УДПУімені Павла Тичини, Умань, Україна)

Відповідно до новітніх тенденцій в національній системі шкільної освіти, велике значення має впровадження інформаційних технологій, прискорення темпів процесу навчання та підвищення його якості. Одним із шляхів досягнення цього застосування сучасних досягнень науки і техніки в розробці нових методів і прийомів роботи з новітніми засобами навчання. Неможливо уявити сучасного школяра на уроці без комп'ютерного пристрою (гаджета) з одного боку, а з іншого сучасний учень прихильник мінімалізму і комфорту у навчанні. Тому вивчення шкільного курсу фізики все частіше вимагає не тільки нових підходів але й методів і засобів використання інформаційно-комунікаційних технологій навчання. Успішне оволодіння навчальним матеріалом з фізики залежить від того, яким і як користується підручником учень в закладах освіти, чи це класичний підручник на друкованій основі, чи це його електронна версія, чи це електронна версія з гіперпосиланнями на енциклопедичну інформацію, чи це електронний підручник, вибір за вчителем.

Відповідно до інформаційно-цифрової компетентності, однієї з 10 ключових компетентностей нової української школи, передбачається формування в учнів загальноосвітніх навчальних закладів впевнене, а водночас критичне застосування інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) для створення, пошуку, обробки, обміну інформацією на роботі, в публічному просторі та приватному спілкуванні. Інформаційна й медіа-грамотність, основи програмування, алгоритмічне мислення, робота з базами даних, навички безпеки в інтернеті та кібербезпеці. Розуміння етики роботи з інформацією (авторське право, інтелектуальна власність тощо) [1].

Користуватися рідерами, або планшетами замість паперових підручників, на уроках фізики це сучасно і цікаво для учнів. Електронні версії підручників додають навчальному процесу інтерактивності, насиченості і наочності. Сучасна версії підручників дозволяє швидко знаходити інформацію в параграфі за ключовими словами. Деякі з гаджетів можуть програвати MP3-файли, що стане в пригоді на уроках у разі вивчення конкретних фізичних явищ, виходити в інтернет через Wi-Fi та вбудований браузер дозволить учителю організувати роботу над навчальними проектами. Ці та інші переваги, мали б витісняти паперові версії шкільних підручників, але цілковитого переходу шкіл на навчання за електронними підручниками в найближчому майбутньому.

Література

[1] Нова українська школа (концептуальні засади реформування середньої освіти). Режим доступу: http://nus.org.ua/wp-content/uploads/2017/07/konczepcziya.pdf

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 80.

ВІЗУАЛІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ ОБЄКТІВ У СЕРЕДОВИЩІ GEOGEBRA 6.0

Ю.М. Зінченко, А.В.Рудий
(УДПУ імені Павла Тичини, Умань, Україн)

Сучасне різноманіття потужних математичних комп'ютерних програм (Maple, Mathcad, Mathematica, Maxima, Derive тощо), різноманітних інструментів Google Play Market (Photomath, Science Journal, MalMath,Calculator тощо), онлайн платформ (PNET, Learningapps тощо) дозволяють зробити освітній процес цікавим, максимально концентрувати увагу студентів та прискорювати сприйняття інформації через її візуалізацію. Система динамічної математики GeoGebra 6.0 використовується як засіб для візуалізації досліджуваних математичних об'єктів, ілюстрації методів побудови. Виконання студентами на практичних заняттях із математичного аналізу завдань з використанням середовища GeoGebra 6.0 створює можливість мінімізувати витрати часу на візуалізацію математичних об'єктів та обрахунки [1]. Розглянемо приклад побудови математичних об'єктів у системі GeoGebra 6.0 при вивчені теми "Застосування визначеного інтеграла до задач геометрії".

*Задача.*Обчислити площу плоскої фігури, що обмежена кривою $y^2 = \sqrt{x-2}$ та прямою $x = const$.

Коментар. Це приклад типового завдання з математичного аналізу. Щоб його розв'язати необхідно спочатку виконати побудову плоскої фігури, площу якої потрібно знайти, а потім за відомою формулою вирахувати визначений інтеграл. Щоб розв'язати дану задачу у середовищі GeoGebra 6.0 потрібно спочатку в стрічку команд ввести рівняння функції $y^2 = \sqrt{x-2}$ та $x = 10$ ліній якими обмежена фігура. Далі, для наочного зображення геометричного місця точок, що визначені умовою задачі необхідно в стрічку команд записати нерівності $x \leq 10$ та $y^2 \leq (x-2)$ вибравши колір та прозорість. За допомогою інструмента *Ползунок* можна змінювати значення $x = const$. Потім за допомогою команди *Интеграл* обчислюємо площу фігури.

Як, бачимо, інтерфейс середовища GeoGebra 6.0 є інтуїтивно зрозумілий, процес його освоєння є не таким складним, як спеціалізованих математичних програм. Так що з GeoGebra 6.0 вивчення математичного аналізу перетворюється на цікавий процес. З іншої сторони, у майбутніх учителів математики формуються уміння роботи у популярному серед учителів середовищі.

Література

[1] Поліщук Т.В. *Використання системи GeoGebra в процесі навчання курсу "Математичний аналіз"/ Т.В. Поліщук // Сучасні інформаційні технології в освіті і науці: II Всеукраїнська наукова Інтернет-конференція [27-28 березня 2019 р.]. – Умань : Візаві, 2019. – с. 111 - 117.*

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 81.

КОНТРОЛЬ ЗНАНЬ УЧНІВ СЕРЕДНЬОЇ ТА СТАРШОЇ ШКОЛИ ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕСТУВАННЯ

Д.В. Ільяшенко
(НПУ ім. М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

В сучасній системі оцінювання знань учнів, тестування є одним з найпопулярніших видів підсумкового та проміжного контролю знань. Сучасний навчальний процес, базується на особистісно орієнтованому, діяльнісному і компетентнісному підходах. Важливою потребою педагогічного контролю знань є використання кількісних методів оцінювання навчальних досягнень учнів. На даний час важко уявити сучасний навчальний процес без різних форм тестування.

Після введення обов'язкового проходження Зовнішнього незалежного оцінювання популярність та необхідність проведення контролів у вигляді тестів стрімко зросла. З метою підготовки учнів до системи оцінювання у вигляді тестування, а також швидкої та якісної перевірки знань залучення тестової форми оцінювання стало набагато частішим.

Найбільшою перевагою є те, що за допомогою тестів можна охопити великий обсяг навчального матеріалу за значно коротший час. Якщо порівняти з традиційним опитуванням, то тестуванням можна охопити той самий матеріал витративши у двічі менше часу.

Також перевагою опитування у тестовій формі є швидка перевірка та економія часу вчителя під час перевірки. Тестова форма оцінювання вважається абсолютно об'єктивною, завдяки чому підвищується пізнавальна діяльність учнів.

Література

[1] Сергієнко В.П., Кухар Л.О. *Методичні рекомендації зі складання тестових завдань.* — К., НПУ, 2011. — 41 с.

[2] Барбаш Є.М. *Тестування як засіб контролю навчальних досягнень учнів у вітчизняній іншомовній освіті у 60-90-ті роки XX століття (ретроспективний аспект)*

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 82.

ПРОЕКТУВАННЯ ЗАСОБІВ ОЦІНЮВАННЯ СФОРМОВАНОСТІ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ПЕДАГОГІВ-ФІЗИКІВ

О.І. Кириленко
(НПУ ім. М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

Проблема оцінювання сформованості компетентностей студентів на сучасному етапі розвитку вищої освіти є надзвичайно актуальною. Компетентнісний підхід вносить свої корективи у розв'язання проблеми оцінювання запланованих результатів навчання (компетентностей).

Фундаментальними поняттями компетентнісного підходу є компетенції і компетентності. На нашу думку, компетенції вчителів – це типові завдання їх діяльності, коло обов'язків та повноважень, визначених відповідними нормативними актами. Якості, яких повинен набути вчитель, для діяльності, в рамках визначених для нього компетенцій, називаються компетентностями. Компетентність являє собою п'яти компонентне утворення: 1) знання і розуміння; 2) уміння діяти; 3) готовність до прояву діяльності; 4) ставлення до змісту і об'єкту діяльності (ціннісно-змістовий компонент); 5) емоційно-вольова регуляція діяльності.

Компетентнісна модель вчителя фізики охоплює чітко визначені компоненти, зокрема, кваліфікаційні вимоги, які визначаються майбутньою професійною діяльністю: необхідні знання, вміння та навички; специфічні психологічні та соціальні якості. Ця модель характеризує підготовленість вчителя до професійної діяльності. При проектуванні методів і засобів оцінювання сформованості компетентностей необхідно моделювати реальну діяльність педагога-фізика. Компетентності не перевіряються явно, перевіряються опосередковано через заплановані результати навчання. Перші два компоненти перевіряються у процесі навчання і під час підсумкової атестації, зокрема за допомогою тестових завдань. Таксономія Блума може бути використана під час вивчення окремих навчальних дисциплін. Інші компоненти компетентностей діагностують під час виробничих практик і за допомогою спеціальних методик опитування. Випускну перевірку сформованостей компетентностей доцільно здійснювати за допомогою інструментів, які ґрунтуються на НРК і РК для ЄПВО.

Отже, реалізація процедури оцінки компетентностей передбачає: створення портфоліо і рейтингової таблиці до якої вносяться результати навчально-наукової діяльності студента.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 83.

РОЗВИТОК ПІЗНАВАЛЬНОГО ІНТЕРЕСУ УЧНІВ З ФІЗИКИ В СУЧАСНОМУ ОСВІТНЬОМУ СЕРЕДОВИЩІ

І.І.Кифорук
(УДПУ імені Павла Тичини, Умань, Україна)

На сучасному етапі перед учителями фізики постає актуальна проблема - розвиток пізнавального інтересу учнів до вивчення фізики в сучасному освітньому середовищі. Оскільки, починаючи вивчати фізику, вони впевнені, що це складна наука і для оволодіння нею треба мати певні здібності. Тому навчальний матеріал, який вивчається на уроках фізики може здаватися не цікавим і не потрібним. Сформувати інтерес учнів до фізики, який сприяв би їхній навчально-пізнавальній діяльності, науковці й педагоги пропонують різними способами: зміною структури змісту предмета, удосконаленням фізичного шкільного експерименту, застосуванням нестандартних форм і методів у організації уроку, залученням учнів до позакласної роботи з фізики [2]. Проблему розвитку пізнавальних інтересів учнів у процесі вивчення шкільного курсу фізики досліджували: О. Бугайов, О. Гнатюк, С. Гончаренко, Є. Коршак, І. Ланіна, М. Мартинюк, В. Разумовський, О. Сергєєв, Л. Тарасов, А. Усова, та ін. [1, 2, 3]. Враховуючи індивідуальні інтереси і схильності окремих учнів, вчитель повинен постійно пам'ятати про те, що будь-яка позаурочна робота з фізики з учнями повинна сприяти розвитку пізнавального інтересу всіх учнів [1, 2, 3]. Сучасні дослідження в галузі освіти доводять, що навчання має бути емоційно насиченим і позитивно вмотивованим.

Література

[1] *Внеурочная работа по физике / О.Ф. Кабардин, Э.М. Браверман, Г.Р. Глущенко и др.; Под ред. О.Ф. Кабардина. - М.: Просвещение, 1983. - 223 с.*

[2] Гнатюк О. *Розвиток пізнавального інтересу учнів у процесі позакласної навчальної діяльності учнів / Оксана Гнатюк, Оксана Орлик // Наукові записки. - Випуск 99 - Серія: Педагогічні науки. Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2012. - С. 25 - 30.*

[3] Ланіна І.Я. *Позакласна робота з фізики: Пер. З рос. - К.: Рад. школа, 1983. - 206 с.*

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 84.

ПІДГОТОВКА ВЧИТЕЛІВ ФІЗИКИ ДО ВИКОРИСТАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ В ОСВІТНЬОМУ ПРОЦЕСІ

І.І.Криворучко
(УДПУ імені Павла Тичини, Умань, Україна)

Одним з найважливіших завдань інформатизації сучасного суспільства є використання інформаційних технологій в освіті. З огляду на сучасні тенденції в розвитку інформаційних комп'ютерних технологій, викладачі повинні ставити перед собою мету підвищити рівень інформатизації занять [1]. З комп'ютеризацією навчання пов'язують перспективи підвищення ефективності освітнього процесу, зменшення розриву між вимогами, які суспільство висуває до підростаючого покоління, і практичною шкільною та університетською підготовкою. Загальновідомо, що фізика є невід'ємною частиною людського життя. Сучасна наука пронизана фізикою, її методами та ідеями, які виконують величезну роль в повсякденному житті мільйонів людей. Сказане знаходить відображення в навчальному предметі "фізика який стає все більш насиченим і застосовується для вирішення проблем в різних областях науки. Тому в процесі викладання фізики виникає ряд протиріч: між необхідністю використання індивідуального підходу та диференціації в навчанні учнів і великою наповнюваністю класів; між необхідністю створення оптимальних умов для самоосвіти учнів і відсутністю потрібних інформаційних засобів; між необхідністю об'єктивної оцінки знань учнів і суб'єктивністю перевірки знань учителем; між жорстко визначених програмою змістом навчального матеріалу і прагненням досвідченого вчителя вийти за межі підручника; між використанням колективної навчальної роботи і урахуванням індивідуальних особливостей навченості школярів. Рішення даних протиріч може бути здійснено шляхом впровадження інформаційних технологій в освітній процес. Одним з них є портал Go-Lab,який надає учням та студентам можливість проводити індивідуальні наукові експерименти в онлайн-лабораторії, а викладачі можуть доповнити свою діяльність у класі демонстраціями та поділитися своїми кращими практиками з педагогічним співтовариством [2]. Бурхливий розвиток інформаційних технологій і комп'ютерної техніки відкриває нові можливості вдосконалення педагогічних технологій і методик навчання.

Література

[1] Медведєва М.О. *Аналіз існуючих хмаро орієнтованих сервісів пропонованих для вищих навчальних закладів / М. О. Медведєва // Науковий вісник Ужгородського національного університету. - 2015. - Вип. 36 - С. 125-127.*

[2] Вембер В.П. *Використання екосистеми Go-Lab для організації дослідницького навчання / В.П. Вембер / Відкрите освітнє е-середовище сучасного університету. - 2018. - №5 - С. 39-48.*

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 85.

ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КЕЙСІВ ТА STEM-ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ ВИВЧЕННІ ЕЛЕМЕНТІВ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ, КОМБІНАТОРИКИ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

І.М. Кручко
(НПУ ім. М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

У доповіді розглядаються деякі аспекти проблеми застосування сучасних методів та технологій навчання в процесі вивчення елементів комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики учнями старшої школи.

Актуальність проблеми обумовлена необхідністю оновлення змісту, форм, методів та прийомів навчання в шкільному курсі математики, створення нового освітнього середовища, яке сприятиме не просто накопиченню знань, умінь і навичок, а й набуттю учнями ключових компетентностей, необхідних в реальному житті для прийняття рішень та розв'язання проблем.

Для розв'язання вказаної проблеми, потрібно організувати роботу учнів таким чином, щоб набуті ними знання та вміння постійно проектувались в площину різноманітних застосувань. При цьому задачі, які вирішуються засобами математики, мають бути цікавими для школярів саме тут і зараз, а не колись у майбутньому. Крім того, одним з ефективних напрямків мотивації та активізації пізнавального інтересу сучасних школярів є реалізація міжпредметних та міждисциплінарних зв'язків математики з природничими або соціально-гуманітарними науками, а також з IT-технологіями, які можуть розглядатись в двох аспектах: як інтрумент, що допомагає вирішенню задачі або як предметна галузь дослідження (тобто галузь, в якій виникла дана задача).

На нашу думку, однією з технологій, яка допомагає реалізувати вказані вище завдання, є STEM-навчання (Science, Technology, Engineering and Mathematics). На сьогодні в Україні впровадженням STEM-освіти займаються Інститут модернізації змісту освіти (ІМЗО), а також Коаліція STEM-освіти, яка об'єднує провідні компанії (Ericsson, Intel, Melexis, OSTCHEM, Syngenta, НАЕК "Енергоатом"), навчальні заклади, асоціації, експертні організації та всіх зацікавлених в підвищення якості освіти в Україні.

При впровадженні STEM-підходів в практику освітнього процесу виникає необхідність змінювати методи та організаційні форми навчання, більше того, змінювати тип взаємодії між вчителем та учнем, використовуючи різні інтерактивні форми. Серед основних форм ми виділили наступні: кейс-навчання та "сторітелінг які розглянемо в доповіді.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 86.

ВІД ПРИНЦИПУ ВІДОБРАЖЕННЯ ЗОБРАЖЕННЯ ДО СУЧАСНОГО ТЕЛЕБАЧЕННЯ

Д. І. Максюта
(УДПУ імені Павла Тичини, Умань, Україна)

Шведський хімік Йёнс Якобу Берцелиус відкривши хімічний елемент селен не передбачав, що буде першою ланкою до відкриття телебачення. Хоча лише через 50 років була досліджена властивість селену і деяких інших речовин змінювати свій електричний опір при попаданні на них світла. Дослідника побачили, що чим падаюче на селенову пластинку світло було яскравішим, тим краще вона проводила струм. Дослідники створили мозаїку, яка була створена з маленьких шматочків, при цьому з'єднали дротами кожен шматочок з маленькою лампочкою, спроектувати на мозаїку зображення і пустити по дротах струм. Лампочки, сполучені з більш освітленими шматочками мозаїки, горіли яскравіше, а сполучені із затемненими ділянками - тьмяніші. Зображення що було отримано не відповідало оригіналу. Першим в 1880 році, такий експеримент запропонував американець Джордж Кері. Така установка була дуже громіздка і вчені вирішити шукати інший підхід.

В 1833 році бельгійський фізик Жозеф Плато здійснив наступний крок до вирішення проблеми він наклеїв на периферію диска малюнки, що відобразили послідовні пози танцюючої балерини, і став обертати диск перед віконцем, в якому поміщалося лише одне зображення. Обертаючись з певною швидкістю диск, дозволяв глядачу бачити у віконці балерину, що плавно виконувала свій танець. Це явище назвали - інерційність зору. Інерційність зору використовували для отримання рухомого зображення і це стало початком розвитку кінематографа а пізніше і телебачення. З незрозумілого "бридкого каченяти"телебачення стало невід'ємною частиною нашого життя. Переросло у величезну індустрію, стало втіленням праці багатьох людей, що вирішили втілити мрії фантастів. Інформаційна павутина охопила всю земну кулю, зробила доступною будь-яку інформацію у будь-якому куточку світу.[1]

Від "електричного ока"до сучасного телевізора величезний шлях, на якому потрібно було вирішити три задачі: перетворити зображення в послідовність електричних сигналів, передати їх на велику відстань і зробити зворотне перетворення в приймальному пристрої. Для передачі сигналів на великі відстані ідеально підійшло радіо, що досягло в 20 столітті високого рівня розвитку, а ось по створенню перетворювальних систем шлях був пройдений довгий і складний. Таким чином, без винайдення телебачення і відповідних технологій передачі інформації на відстань наше життя було б не таким цікавим і різнобарвним.

Література

[1] Білий М. У., Охріменко Б. А. *Атомна фізика,* — К. Знання, — 2009. — 559 С.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 87.

ІНТЕРАКТИВНЕ НАВЧАННЯ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Т.М. Махомета, І.М. Тягай
(УДПУ імені Павла Тичини, Умань, Україна)

Вагому роль у становленні вчителя як професіонала відіграє методична підготовка. Відповідно до Концепції розвитку неперервної педагогічної освіти методична підготовка студентів у педагогічному університеті є наскрізною і здійснюється протягом усього періоду навчання. В сучасних умовах підготовки майбутнього вчителя математики до професійної діяльності важливу роль відіграє інноваційне навчання, що уможливлює докорінні зміни у визначенні місця і ролі студентів в освітньому процесі.Однією із технологій інноваційного навчання, що ефективно використовується в освітньому процесі підготовки майбутнього вчителя математики, є технології інтерактивного навчання. За такого підходу до організації навчання створюються умови для стимулювання самореалізації студентів і посилення мотивації їхньої навчальної діяльності; відбуваються зміни у визначенні ролі студентів у навчальному процесі. Інтерактивне навчання уможливлює підготовку вчителя математики, здатного до самоосвіти, саморозвитку та рефлексії як під час навчання у вищій школі, так і в подальшій професійній діяльності. Розглянемо можливості використання технологій інтерактивного навчання під час консультацій, що є одним із видів індивідуально-групового навчання. Групова форма проведення консультація може в той же час набувати і форми інтерактивного навчання [1]. Прикладом проведення даного виду навчання є консультація із використанням технології ланцюжок взаємоперевірки. Сутність якої полягає в тому, що спочатку викладач пояснює теоретичний матеріал, акцентуючи увагу студентів на тих місцях, на яких найчастіше виникають труднощі, потім з детальним поясненням розглядають приклади. Для того щоб перевірити якість засвоєних знань, викладач пропонує студентам розв'язати завдання (всі студенти отримують одне й те ж завдання). Перший студент, який виконав завдання здає його на перевірку викладачеві, якщо завдання виконано правильно, то роботу другого студента вже перевіряє перший студент. Якщо завдання другого студента виконано правильно, то він перевіряє роботу наступного і так далі. Використання інтерактивного навчання у вищій школі наближує студентів до реальної професійної діяльності.

Література

[1] Тягай І.М. *Використання форм інтерактивного навчання під час проведення консультацій з математичних дисциплін у педагогічному університеті / І.М. Тягай // Метеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики», 11–13 травня 2017 року. 2017. – м. Київ. – С. 226 – 227.*

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 88.

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ОСНОВИ ВИНИКНЕННЯ ПРИРОДНИЧИХ ДИСЦИПЛІН, ЗНАЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ І ФІЗИКИ У ПІЗНАННІ ПРИРОДНИЧИХ НАУК

Р. М. Мельник
(Національний університет "Києво-Могилянська академія", Київ, Україна)

Природничі науки вже давно стали окремими від природознавства, з якого формувалися в XVII–XIX ст. Праці Галілея, Ньютона і їхніх сучасників заклали таку математичну основу фізики, без якої в наш час немислима довільна з природничих наук, вивчення динаміки хімічних біологічних, соціальних процесів. По новому відкривалася алгебра — наука композицій арифметичних операцій. У XIX–XX ст. формування нової алгебри давало базу до виникнення нових напрямів фізики, природничих наук. Сучасні соціальні, ба навіть гуманітарні науки великою мірою ґрунтуються на математичних основах виникнення природничих наук. Історія математичної фізики цікава тим, як формувалося нове математичне мислення, відбувався перехід від вивчення найпростіших явищ і природних об'єктів до виникнення універсальних математичних конструкцій.

Історія науки уже витворила школу фізичного і математичного осмислення природи, дала готовий до вжитку рецепт способу навчання як тонкого налаштування математичного інструментарію дослідження. За короткий термін можна досягнути висот науково пізнання, мислення, навчальних навичок або ж довго "нудити"над безликим абстрагуванням невизначених математичних конструкцій неперевірених на власному досвіді пізнання природи і людини. На жаль, сьогодні освітні сучасні візії все більше схиляються до поєднання абстрактних знань без їх концептуального формування, набуття індивідуального досвіду тими, хто вчиться.

В цій праця автор показує, як незнання історії математичної науки призводить до формування тих нібито новітніх наукових канонів, які були сформовані на зорі природничих наук. Як застосування природного і натуралістичного пошуку рішення завдань у царині пізнання природи, її математичного відображення дає вміння і навички у навчанні зі швидким злетом в освітньо-пошуковій підготовці.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 89.

ВІДКРИТТЯ КОСМІЧНИХ ПРОМЕНІВ

І.Л. Мірошник
(НПУ ім. М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

Космічні промені були відкриті на початку XX століття під час експериментів Кольхерстера, Гоккеля, Гесса. Останній висловив гіпотезу про існування особливого проникаючого йонізуючого випромінення, що йде зверху і послаблюється внаслідок поглинання атмосферою в міру проникнення в нижні шари. Під час експериментів Кольхерстера з використанням повітряної кулі (1913–1914) було вивчено зростання іонізації до висоти 9000 метрів. Експерименти показали позаземне походження цього виду випромінення. В експериментах Міллікена (1922–1925) реєструюча апаратура піднімалась на висоту 15,5 км на кулях-зондах. В результаті експериментів, виконаних за допомогою йонізаційних камер, було встановлено зміну йонізаційного ефекту залежно від глибини рівня спостереження, і визначено коефіцієнт поглинання космічного випромінення в атмосфері [1, с. 658].

Тривалий час космічні промені були основним джерелом частинок високих енергій для вивчення процесів, що відбуваються при їх взаємодіях з атомними ядрами, поки не вступили в дію прискорювачі частинок, що дозволили точніше вивчати ці явища [2, с. 493]. Космічні промені — заряджені частинки високих енергій з космічного простору. Приблизно 90% від загальної кількості частинок складають протони, 9% — ядра гелію та близько 1% — електрони [3, с. 657].

Багаторічні досліди зондування сонячних космічних променів показали, що магнітне поле Сонця на відміну від магнітного поля Землі періодично змінює свій напрям. Причина цього явища поки що не встановлена. Космічні промені — одне з найцікавіших явищ природи, вивчення якого дало значні результати і становить винятковий інтерес в зв'язку з актуальними проблемами ядерної фізики і астрофізики.

Література

[1] *Physics of Particles and Nuclei,* v.34, No. 3, 2003, p.285–347 (ЭЧАЯ, t.34, №3, 2003, С.565–678).

[2] Эйнштейн А. *The european physical journal C. Particles and Fields. Zietschrift fur Pliysik C.* v.15, No.1–4, 2000. — С.496.

[3] Дорман Л. И. *Экспериментальные и теоретические основы астрофизики космических лучей* — М.: Наука, 1975. — 675с.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 90.

ПРОБЛЕМА ПРОСТОРУ – ЧАСУ

О. Морозова
(НПУ ім. М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

Ісаак Ньютон узагальнив принцип відносності Галілея і сформулював три закони, які стали основою класичної механіки. Здавалося, вона пояснює усе, з чим ми зіштовхуємося у повсякденному житті. Але, як виявилося пізніше, для швидкостей, близьких до швидкості світла потрібна нова, нестандартна теорія.

У 1905 році була опублікована стаття, яка складалась з 5 сторінок, але яка докорінно змінила погляди на простір і час. Згодом, Альбертом Ейнштейном, була сформована спеціальна теорія відносності (СТВ). В її основі лежать два постулати – принцип відносності та інваріантності швидкості світла.Після цього Ейнштейн задумався над наступним питанням:якщо швидкість має відносний сенс, тоді чому прискорення, не дивлячись на це, має залишатися абсолютним поняттям? З того моменту вчений почав роботу над ще однією, більш загальною теорією.Основою загальної теорії відносності (ЗТВ) став «принцип еквівалентності».

Математичний апарат теорії будувався так, щоб її рівняння були коваріантними при переході між системами координат. ЗТВ усуває ще один недолік класичної механіки: інерція і тяжіння виглядають як зовсім різні, незалежні один від одного явища, хоча вони обумовлені однією сталою – масою [2, с. 158]. Ця проста, на перший погляд думка і стала основою ЗТВ, яка базується на нових інтерпретаціях простору та часу.

Людство завжди прагнуло знайти відповіді на питання про будову та еволюцію Всесвіту. Зрозумівши суть гравітації, можливо, ми наблизимося до розгадки важливих для науки питань.

Література

[1] Ландау Л. Д., Румер Ю. Б. *Что такое теория относительности* (3-е изд.) М.: Сов. Россия, 1975.
[2] Эйнштейн А. *Собрание научныхтрудов в четырех томах. Том 2. Работы по теорииотносительности 1921-1955* М.: Наука, 1966

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 91.

ПЕРЕСТАНОВКИ ДОДАНКІВ В УМОВНО ЗБІЖНИХ РЯДАХ

А.О. Огородник, В.В. Павленков
(КПІ мені І. Сікорського, Київ, Україна)

Нескінченні суми чисел (ряди) використовували ще давньогрецькі вчені для знаходження площ та об'ємів різних фігур. Саме завдяки нескінченній сумі Архімед розв'язав задачу про площу параболічного серменту. Ряд як самостійне поняття математики почали використовувати в XVII ст.

Теорія рядів містить як очевидні так і дещо несподівані твердження. Так, наприклад, при переході від скінченної суми до нескінченної може порушуватися властивість комутативності додавання. На цей факт вказує теорема Рімана, яка стверджує, що переставляючи місцями доданки умовно збіжного ряду можна отримати довільну суму, або навіть розбіжний ряд.

Розглянемо відомий ряд Лейбніца

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots,$$

який збігається (умовно) до ln2. Переставимо доданки цього ряду наступним чином:

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\dots$$

(після кожного додатного доданку йдуть два від'ємних). Далі спростимо кожен з виразів у дужках,віднімаючи від першого другий член. Отримаємо ряд

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\dots,$$

який зручно записати у вигляді

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots\right).$$

В дужках стоїть той самий ряд Лейбніца, а отже переставляючи місцями доданки ми зменшили його суму в два рази.

В доповіді розглядатимуться інші приклади перестановок доданків в ряді Лейбніца. Метод знаходження сум отриманих рядів базуватиметься на рівності

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=\gamma \quad \text{(стала Ейлера-Маскероні).}$$

Література

[1] Дороговцев А.Я. *Математический анализ. Краткий курс в современном изложении.* — Київ: Факт, 2004. — 560 с.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 92.

АНРІ ЛЕОН ЛЕБЕГ

А.С. Паршукова
(УДПУ імені Павла Тичини, Умань, Україна)

У містечку Бове, поблизу Парижа, 28 червня 1875 року народився Леон Лебег. Його мати була викладачем початкової школи, а батько працював на типографії звичайним робітником. А. Лебег у 1891-1897 роках навчався в Нормальній школі в Парижі отримавши кваліфікацію викладача математики. Працював в бібліотеці Нормальної школи, а в 1899-1902 викладачем математики в Центральному ліцеї міста Нансі.

Протягом часу Лебег працював над дисертацією "Інтеграл, довжина, площа", яку захистив у 1902 році в Сорбоні. За математичні розрахунки у теорії траєкторії снарядів він у 1918 році був нагороджений орденом Почесного Легіону, був також членом Лондонського королівського товариства (з 1930 року), член-кореспондентом Академії наук СРСР (з 1929 року), членом багатьох академій наук і наукових товариств.[1]

Існують такі види діяльності які є характерною рисою Лебега - наукова та педагогічна. Свою викладацьку діяльність він розпочав у 1897 році та продовжував її майже до кінця свого життя. Уже хворим, під час окупації гітлерівцями Парижа,він закінчив свій останній курс лекцій про конічні перетини в Колеж де Франс. Багато уваги, особливо в останні роки, Лебег приділяв шкільній математичній освіті, брав участь у редагуванні франко-швейцарського журналу «Математическое просвещение».Саме в цьому журналі вперше були опубліковані його статті, об'єднані в російських виданнях 1938 та 1960 роках у вигляді книги «Об измерении величин». [3]

Досягнення в математиці

Перші дослідження Лебега стосувалися рядів Фур'є. З часом він зацікавився теорією інтегрування. А.Лебег вважається одним із засновників сучасної теорії функцій дійсної змінної. Створив теорію міри, упровадив поняття вимірної функції, ввів нове визначення інтеграла (інтеграл Лебега). Досліджував можливість аналітичного зображення функцій. Написав роботи по теорії розмірності; довів існування функцій всіх класів класифікації Бера; отримав важливі результати геометричного та топологічного характеру; займався дослідженнями у питаннях теорії функцій, множин і теорії диференціювання. Поняття, які широко відомі у теорії функцій та функціональному аналізі - інтеграл Лебега-Стілтьєсаміра, міра Лебега, Лебегівські множини, інтеграл Лебега. [2]

Література

[1] Чайненко С.О. // Укр. мат. журн. — 2012. — Т. 64, № 9. — С. 50–63.
[2] Кованько А.С. *Интеграл Лебега.* — Львов: 1951г. — 205 с.
[3] Стройк Д.Я. *Краткий курс истории математики.* — Москва: 1964г. — 310 с.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 93.

„КОСМІЧНІ" УКРАЇНЦІ

О.В. Підгорний
(УДПУ імені Павла Тичини, Умань, Україна)

Україна – космічна держава. Так була за часів, коли ми входили до складу СРСР, так залишається і зараз. Українці постійно беруть участь у міжнародних програмах, займаються розробками і виготовляють космічний транспорт. Нам є чим гордитися!

Чимало науковців та космонавтів, які значною мірою вплинули на розвиток вивчення космосу, мають українське коріння. Саме їхні ідеї і дослідження зіграли величезну роль у подальшому розвитку космонавтики.

Костянтин Ціолковський – радянський вчений-теоретик, є одним із засновників ракетобудування та сучасної космонавтики. Він палкий пропагандист ідей освоєння космосу, а також автор науково-фантастичних творів.

Микола Кибальчич – винахідник та автор схеми першого у світі реактивного літального апарату. Окрім дослідницької діяльності, був революціонером-народником. Тож у віці всього 27 років був страчений за замах на імператора Олександра II.

Юрій Кондратюк – український радянський вчений-винахідник. Він був одним із засновників ракетної техніки й теорії космічних польотів.

Сергій Корольов – український радянський вчений у галузі ракетобудування та космонавтики, конструктор. Саме Корольов вважається основоположником практичної космонавтики.

Акад. Михайло Янгель, головний керівник радянської космічної програми та розробник кількох поколінь стратегічних бойових ракет, походив із української родини.

Наступником М.Янгеля на чолі космічної програми СРСР був науковець у галузі розробки ракетних двигунів Володимир Челомей – конструктор відомої ракети-носія „Протон". Він був генеральним конструктором ракетно-космічної техніки, член Міжнародної академії астронавтики.

Павло Попович, радянський „космонавт №4", був першим українцем, який побачив нашу планету з космосу. Перший політ Поповича відбувся в серпні 1962 р. Сучасники згадують, що Попович за всіма параметрами мав бути першим космонавтом, його й готували разом з Ю. Гагаріним.

Георгій Шонін став відомим радянським космонавтом, Героєм Радянського Союзу. У 1969 році він брав участь у космічному польоті як командир корабля „Союз-6" – тоді ж уперше в світі було здійснено експерименти зі зварювальних робіт у космосі.

Перша українська жінка у відкритому Космосі Світлана Савицька. В 1982 році здійснила свій перший політ у космос на борту корабля Союз Т-7. Під час другого польоту, через два роки, першою з жінок здійснила вихід у відкритий космос.

Перший і поки що єдиний космонавт у незалежній Україні – Леонід Каденюк (1997 р.). Протягом 17 днів він перебував у космосі в складі міжнародної – українсько-американської експедиції (Для пробудження після сну на космічних кораблях використовують різні мелодії – по черзі, на вибір космонавтів. За час перебування в космосі експедиція двічі просиналася під музику М.Вербицького до Державного Гімну України).

Отже, космічна ера людства триває. А значить, українські науковці та космонавти й далі робитимуть свій великий внесок у її здобутки.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 95.

ПРОФЕСОР ДУЩЕНКО В.П. – ВИХОВАНЕЦЬ ТЕПЛОФІЗИЧНОЇ ШКОЛИ ПРОФЕСОРА КАЗАНСЬКОГО М.Ф.

С. А. Пудченко
(НПУ ім. М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

Дущенко Віктор Павлович (19.06.1922 м. Кременчук Полтавської області – 05.11.1985 м. Київ), видатний вчений-теплофізик, кандидат фізико-математичних наук (1953), доктор технічних наук (1976), професор (1979), завідувач кафедри загальної фізики Київського державного педагогічного інституту імені О.М. Горького, засновник в інституті власної наукової школи в галузі тепломасопереносу.

Наукова-дослідницька діяльність Віктора Павловича Дущенка почалась, ще з першого класу школи, зі вступу до першої Кременчуцької фабрично-заводської семирічки (ФЗС) у 1928 році, яку він закінчив на «відмінно» у 1935 році. У тому ж році вступає до середньої школи № 16 м. Кременчука, яку закінчує з повальною грамотою у 1938 році. Одразу по закінченню школи він вступає на фізико-математичний факультет Кременчуцького учительського інституту. По закінченню двох курсів Кременчуцького учительського інституту, Дущенка В. П. призивають до лав Радянської Армії, де він служив до грудня 1945 року. Згідно з Указом Президії Верховної Ради СРСР у грудні 1945 року, як такий, що не закінчив навчання, був демобілізований з армії. У лютому 1946 року він вступає на 2 курс (4 семестр) фізико-математичного факультету Київського державного педагогічного інституту імені О.М. Горького. Обравши фізико-математичний факультет він опинився на факультеті Української школи фізиків-експериментаторів, який починає історичну спадщину ще з Університету св. Володимира і продовжувачів традицій започаткованих видатними фізиками-експериментаторами М.П. Авенаріусом, Г.Г. Де-Метцом, О.К. Бабенко.

У той час на кафедрі загальної фізики на посаді доцента працював кандидат фізико-математичних наук Михайло Федорович Казанський, майбутній науковий керівник В. П. Дущенка, під час навчання в аспірантурі та захисті дисертації на тему "Дослідження фізичного змісту критичних точок кривих швидкості сушіння колоїдних капілярно- пористих речовин яку захищає у 1953 році. Михайло Федорович Казанський доктор технічних (1961), професор (1962), народився у 1905 році у м. Чернігів в сім'ї вчителя початкових класів. У 1924 році він вступив до Київського інституту народної освіти, який закінчив у 1928 році і отримав кваліфікацію викладач фізико-математичних дисциплін. З 1928 по 1930 роки він працював вчителем фізики та математики у школах м. Києва та с. Бровари Київської області. З 1930 по 1936 роки працював у Технологічному інституті легкої промисловості м. Києві. У 1934 році був затверджений у званні доцента по кафедрі «Фізика». З 1936 році штатний доцент кафедри загальної фізики Київського державного педагогічного інститут імені О.М. Горького. На фізико-математичному факультеті викладав курс експериментальної фізики та електро-радіотехніки. З початку роботи у рідному інституті він створив лабораторії електроніки та спеціального фізичного практикуму для студентів фізичної спеціальності. При кафедрі загальної фізики ним була створена теплофізична лабораторія на базі якої у період 1936 по 1945 роки виконав ряд наукових праць згідно спеціальної угоди ДНО управління шосейних доріг НКВС УРСР, які знайшли практичне застосування у зимовому бетонування на морозі.

Література

[1] Державний архів м. Києва *Р-346.* // Пластические массы. — 1972. — оп 5. — 225 С. — 31 арк.
[2] Державний архів м. Києва *Р-346.* // Пластические массы. — 1972. — оп 5. — 105 С. — 30 арк.
[3] наук. ред.: Горбачук І.Т., упоряд.: Пудченко С.А., бібліогр. ред. Тарасова Н.І., відповідальна за випуск: Савенкова Л.В. *Віктор Павлович Дущенко: біобібліографічний покажчик.* // Київ. НПУ імені М.П. Драгоманова — 2018. — 178 С.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 97.

КОРИСТЬ ПСЕВДОНАУКОВИХ ТЕОРІЙ У СТВОРЕННІ ЯКІСНОГО НАУКОВО-ОСВІТНЬОГО КОНТЕНТУ

С. О. Пустова
(НПУ ім. М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

Псевдонаука не інертна, вона не регулюється і весь час змінюється. Під час теоретичного аналізу більшості статей псевдонаукового характеру, стає зрозумілим, що перша складає велику конкуренцію науці офіційній. Причиною є те, що лженаука має більший попит, коли справа стосується запитів широкої аудиторії. У своїх роботах такі відомі дослідники як Аріелі Д., Сапольскі Р., Докінз Р., Деннет Д. детально обґрунтовують теорії щодо цього феномену. До того ж різноманіття проявів псевдонауки ускладнює можливість збору її в певну єдину концепцію для абстрагування. Ця проблема має як конкретно науковий характер, так і загальний. В минулому великою проблемою стала недоступність освіти. Сьогодні ж, ця проблема полягає у відсутності контролю над даними, в масивному потоці яких складно знайти «потрібне» і відкинути «зайве». Тому складність навчання і учіння виникає не тому, що наука не цікава, а тому, що досить часто отримані студентами (учнями) раніше знання є неправильними.

Як виявилося, коли ми намагаємося навчити студента (учня) чомусь новому, йому може здатися, що він це все вже знає, тому не приділяє новому матеріалу достатньої уваги. В подібних ситуаціях будь-яка людина просто не усвідомлює того, що інформація, якою з нею діляться відрізняється від тієї, яку вона засвоїла раніше. Слід наголосити, що часто має місце і ефект Даннінга-Крюгера. Це, навіть може викликати відмінну від очікуваної реакцію. Зокрема, студент (учень) може стати впевненішим у істинності своїх помилкових суджень. Як висновок можна сказати, що без сумніву, зрозумілість і відсутність сухих та нудних експозицій, доступний і добре структурований матеріал – це важливо, однак для кращого результату необхідно враховувати попередній досвід студента (учня) з даної теми. Дослідження таких практиків як Мюллера Д.А. показують, що для того, щоб людина засвоїла певну інформацію, необхідно зруйнувати ті хибні твердження, які заважають їй це зробити. Це потрібно враховувати і при створенні науково-освітнього продукту (урок, лекція, семінар, науковий фільм тощо). Зауважимо, що подібний прийом досить часто використовує лженаукова пропаганда замість конструктивних пояснень і доведень. Очевидно, що цей прийом є досить дієвим, тому є доцільним його використання у популяризації науки. Зокрема, показові спростування псевдонаукових теорій можуть виконувати відразу два важливих завдання. Одне стосується науки – боротьба з лженауковою пропагандою. Інше стосується освіти – ефективне навчання і учіння.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 98.

ФОРМУВАННЯ ЕКОЛОГІЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Джаркин Рахматуллаєва
(УДПУ імені Павла Тичини, Умань, Україна)

Однією з найактуальніших проблем сучасності є взаємодія людини з природою. Важливим аспектом вирішенні проблеми збереження природних ресурсів є освіта людей в області навколишнього середовища, екологічне виховання всього населення, а особливо підростаючого покоління. Екологічна освіта, як цілісне культурологічне явище, що включає процеси навчання, виховання, розвитку особистості, повинна спрямовуватися на формування екологічної культури, як складової системи національного і громадського виховання всіх верств населення України, екологізацію навчальних дисциплін та програм підготовки, а також на професійну екологічну підготовку через базову екологічну освіту [1]. Розв'язування математичних задач екологічного змісту змусить учнів перейнятися проблемами екології та не допускати в майбутньому помилок, пов'язаних з непродуманим натиском на природу. Математика створює умови для розвитку вміння давати кількісну оцінку стану природних об'єктів і явищ, позитивних і негативних наслідків діяльності людини в природному і соціальному оточенні. З метою формування екологічних знань на уроках математики слід добирати систему задач, яка розкриває питання: споживання води в Україні, значення рослин у житті людини, скорочення лісових ресурсів та його наслідки, значення тварин у природі та в житті людини тощо. Екологічне виховання учнів на уроках математики слід здійснювати в таких напрямах : розкриття математичних закономірностей природи через вступні бесіди вчителя відповідно до теми уроку; з'ясування ролі математики в розв'язуванні екологічних проблем; складання графіків і діаграм, які ілюструють функціональні залежності результатів впливу людської діяльності на природу; аналізу прикладів економного та ефективного використання природних ресурсів; розкриття математичних закономірностей певних явищ природи; виховання екологічного розуміння та екологічної культури, відповідальності за стан навколишнього середовища; розв'язання задач з метою розуміння окремих екологічних понять, обробка статистичного матеріалу. *Наприклад,* в 5 класі при вивченні теми "Натуральні числа і дії з ними"учням можна запропонувати розв'язати наступну задачу. Задача: Одне дерево виробляє приблизно 120 кілограмів кисню на рік, що вистачить на сім'ю з трьох чоловік протягом того самого року. Скільки кілограмів кисню виробить сад, у якому росте 25 дерев? Відповідь: 3000 кілограмів.

Література

[1] Федоренко О.І., Тимочко Т.В., Ткач В.Н. *"Питання екологічного виховання та освіти населення"* Екологічний вісник 2005, № 3. С. 16–19.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 99.

ІННОВАЦІЙННІ ПІДХОДИ ПІД ЧАС ВИКЛАДАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Ю.В. Решітник
(УДПУ імені Павла Тичини, Умань, Україна)

Входження світу у науково-інформаційний тип прогресу зумовлює необхідність формування людини з інноваційним мисленням, інноваційною культурою, здатністю до інноваційної діяльності [1]. У зв'язку з цим підвищуються вимоги до професійної діяльності викладачів вищої школи, зокрема і щодо готовності введення інновацій.

Одним з аспектів інноваційної діяльності у викладанні теоретичної фізики є удосконалення проведення практичних занять. Класична методика розв'язання задач викладачем або одним зі студентів біля дошки є малоефективною, тому що абсолютна більшість студентів не вникає в хід розв'язання, а просто конспектує розв'язок задачі. Тому можна використовувати наступний підхід: не відмовляючись від розв'язання типових задач за традиційною методикою, основний акцент робити на самостійність розв'язку завдань під постійним контролем викладача процесу розв'язання, роботи з кожним студентом окремо і оцінкою кінцевого результату з подальшим спільним аналізом всього процесу розв'язання задачі. Для самостійного розв'язку студентам пропонуються або короткі завдання, наприклад, з теоретичної механіки з [2], або заздалегідь підготовлені завдання.

Сучасний розвиток засобів обчислювальної техніки і її програмного забезпечення привело до появи досить великої кількості спеціалізованих пакетів прикладних програм, таких, як Mathematica, MathCAD, MathLab та ін. Всі вони дозволяють здійснювати складні обчислення, мають широкі графічні можливості, що може бути успішно застосовано при виконанні ІНДЗ. Ще однією важливою складовою інноваційних технологій є використання комп'ютерних програм, що полегшують трудомісткі математичні обчислення, зберігаючи при цьому фізичну суть методів розрахунку.

Використання розглянутих аспектів інноваційної діяльності спрямовано як на розв'язок навчальних завдань, так і на ефективну організацію роботи студентів, формування активної освітньої позиції студента, спрямованої на підвищення мотивації до вивчення теоретичної фізики, вміння правильно і обґрунтовано з наукових позицій формулювати свою думку, на розвиток критичного і аналітичного підходів в навчальній і майбутній професійній діяльності.

Література

[1] Біла книга національної освіти України / Акад. пед. н. України; за ред. В.Г. Кременя. К., 2009. 185 с.
[2] Сборник коротких задач по теоретической механике / О.Э. Кепе [и др.]; под ред. О.Э. Кепе. М., 1989. 368 с.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 100.

ЕЛЕКТРОННА ВЕРСІЯ ПІДРУЧНИКА ЯК ЗАСІБ НАВЧАННЯ ФІЗИКИ

Д. В. Романенко
(УДПУ імені Павла Тичини, Умань, Україна)

Про історію створення першого мікроскопа стали говорити тоді коли археологи під час розкопок давнього Вавилону знайшли перші його прототипи. Таким чином вчені зробили висновок, про те, що оптичні прилади з'явилися ще в Середньовіччі. Цікавим залишається і той факт в історії фізики, що немає єдиної думки з приводу того, хто першим винайшов мікроскоп. Кандидатами на історичний винахід є відомі вчені і винахідники: Галілео Галілей, Християн Гюйгенс, Роберт Гук та Антоні ван Левенгук, такж в деяких літературних джерелах згадують і про італійського лікаря Г. Фракосторо. який першим запропонував поєднати кілька лінз, щоб отримати більший збільшувальний ефект.[2] В 1590 році Ханс Ясен, голландський майстер зі створення окулярів виступив із заявою, що його син – Захарій Ясен – винайшов мікроскоп. Однак, ряд історичних фактів не дозволяють точно стверджувати чи був Захарій Ясен винахідником мікроскопа чи ні. Галілео Галілея відкрив перший телескоп, за допомогою якого вчений зміг досліджувати космічні об'єкти. Але межі його досліджень не обмежувалася лише астрономією, бо мікроскоп, це фактично той же телескоп, тільки навпаки. Галілей у 1609 році представив в Академії деї Лічеї свій перший складовий мікроскоп, який складався з опуклої та увігнутої збільшувальних лінз. Наступником Галілея став голландський винахідник Корнеліус Дреббель. Він вдосконалив мікроскоп Галілея, додавши в нього ще одну опуклу лінзу.[1]

Роберт Гук, увійшов в історію науки, як творець власного мікроскопа за допомогою якого було здійснено велике наукове відкриття. Саме при допомозі його мікроскопа було отримано зображення органічної клітини це дозволило в подальшому зробити висновок, що всі живі організми складаються з клітин.

Голландець Антоні ван Левенгук, прочитавши працю Роберта Гука, «Мікрографією» став останнім вченим, який зробив свій внесок у розвиток мікроскопів. Левенгук створив свій власний мікроскоп. Він складався лише з однієї лінзи, але вона була сильною, таким чином, збільшення зображення у цього мікроскопа був найкращим на той час. Роботи Левенгука дали величезний поштовх до розвитку біології, і допомогли привернути увагу біологів до мікроскопу, зробили його невід'ємною частиною біологічних досліджень, аж по цей день. Така цікава історія відкриття мікроскопа.

Література

[1] Давидов П.С. *Технічна діагностика радіоелектронних пристроїв і систем.* — М.: Радіо і зв'язок, 2005. — 256 с.

[2] Технічні засоби діагностування: Довідник / За заг. ред. В.В. Клюєва. - М.: Машинобудування, 2005. - 672 с.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. ??.

КВАНТОВА ФІЗИКА – ОСНОВА НОВИХ ТЕХНОЛОГІЧНИХ МОЖЛИВОСТЕЙ

А. О. Ротозєй
(НПУ ім. М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

Дуже часто люди вважають, що квантові технології — це щось із світу «неможливого», що вони доступні лише великим науковим центрам. Насправді, квантові технології одного разу вже перевернули звичну реальність: саме вони подарували нам смартфони, плоскі телевізори і взагалі всю сучасну електроніку. Це була перша квантова революція — з нею світ отримав транзистори, лазери, інтегральні мікросхеми та нові види зв'язку (наприклад, мобільний). Що принесе людству друга квантова революція – ще потрібно з'ясувати, але вже зрозуміло, що вона вплине на світоустрій не менше, ніж перша. Які ж зараз існують квантові розробки, здатні замінити всі наші нині невід'ємні технології? Розглянемо деякі із них:

(1) Квантовий комп'ютер, здатний відкрити нові ліки, або влаштувати революцію в області безпеки.
(2) Лічильник фотонів – незамінний пристрій для квантового шифрування і обчислення.
(3) Квантова телепортація – майбутнє квантового Інтернету
(4) Сенсори, які виявляють секретні об'єкти.

Всі ці явища пропонують людству квантові технології. Перераховані вище відкриття можливі завдяки спостереженню і дослідженню окремих атомів і фотонів — маленьких часточок світла [1].

Саме квантові технології відкривають Всесвіту великі можливості у кожній сфері життя, а також можуть спричинити появу абсолютно нових індустрій. Ситуація з новими технологічними можливостями нагадує період зародження Інтернету. Тоді великі корпорації виявили комерційний потенціал у великих лабораторних дослідженнях, якими вчені займалися не одне десятиліття. Підприємливі компанії купували собі доступ до розробок або ж організовують власні дослідження. Для квантових технологій лишилося подолати тільки інженерні виклики, а не наукові. І сучасні пристрої, засновані на них, – це лише початок. Найбільш неймовірним у квантових технологіях є те, що край їхнього потенціалу досі не видно. Для багатьох вчених двадцятого століття слово „квантовий" означало „дивний". А вже у двадцять першому столітті воно набуває нового значення – „найкращий" [1].

Література

[1] *https : //dt.ua/TECHNOLOGIES/kvantoviy − stribok − divni − doslidzhennya − vidkrivayut − neymovirni − tehnichni − mozhlivosti − the − economist −* 235896*.html/*

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 102.

ФЕЛІКС ХАУСДОРФ

С.О. Рудницький
(УДПУ імені Павла Тичини, Умань, Україна)

Фелікс Хаусдорф народився в місті Бреслау в єврейській сім'ї купців 1868 року. Ще дитиною переїхав з батьками до Лейпцига. Закінчив Лейпцигзький університет 1891 року зі ступенем доктора математики в астрономії. Протягом наступних п'яти років опублікував чотири праці з оптики, де дослідження стосувалися рефракції та згасання світла в атмосфері.

Після 1904 року Хаусдорф почав працювати в областях математики, які прославили його найбільше, а саме: топологія і теорія множин. Він ввів поняття частково впорядкованої множини і з 1901 по 1909 роки довів ряд результатів щодо впорядкованих множин. У 1907 році він запровадив особливі типи ординалів у спробі довести континуум-гіпотезу Кантора. Він також поставив узагальнення континуум-гіпотези, запитавши, чи 2 в степені $\aleph_a$ дорівнює $\aleph_{a+1}$. Хаусдорф довів подальші результати щодо потужності борелівських множин в 1916 році.

Хаусдорф викладав у Лейпцигу до 1910 року, потім в місті Бонн та Грейфсвальді. У 1914 році, він опублікував свій знаменитий текст Grundzuge der Mengenlehre build, який спирається на роботу Фреше та інших, щоб створити теорію топологічних і метричних просторів, в яку добре поєдналися попередні результати, та збагатив її багатьма новими поняттями та теоремами. З сучасної точки зору, Grundzuge містив, на додаток до інших спеціальних тем, початок теорій топологічних і метричних просторів, які тепер включені в усі підручники з функціонального аналізу. Додамо, що в цій роботі [2] міститься один відомий парадоксальний результат, а саме: половина сфери і одна третина сфери можуть бути конгруентними одна одній. У 1919 році ввів поняття розмірності Хаусдорфа, узагальнивши конструкцію Каратеодорі для означення фрактальної розмірності. Його робота [1] містить доведення, що розмірність класичної множини Кантора становить $\frac{log2}{log3}$.

Hausdorff повернувся в Бонн в 1921 році, вже видатним математиком, і він працював там до 1935 року, коли був змушений піти у відставку через нацистський режим. Він продовжував проводити дослідження з топології та теорії множин, але результати не могли бути опубліковані в Німеччині. В 1942 році, перед відправкою в нацистський концтабір, вчинив самогубство, прийнявши смертельну дозу барбітала.

Література

[1] Hausdorff F. *Dimension und auberes Mab* // Mathematische Annalen. — 1918. — vol. 79, № 1. — pp. 157–179.
[2] Schreiber P. *Felix Hausdorffs paradoxe Kugelzerlegung im Kontext der Entwicklung von Mengenlehre, Masstheorie und Grundlagen der Mathematik.* — Braunschweig, 1996. — pp. 135–148.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 103.

ЦІКАВЕ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

І.М. Савич
(КПІ імені І. Сікорського, Київ, Україна)

Математична статистика — це важливий розділ математики, що тісно пов'язаний з теорією ймовірностей за допомогою граничних теорем. Обидві ці науки вивчають масові випадкові явища. Відмінність в тому, що математична статистика за допомогою даних спостережень встановлює властивості математичної моделі, які в подальшому використовуються для прийняття наукових та практичних рішень в задачах планування, управління, прогнозування і т.д. За словами А.Вальда, «математична статистика — це теорія прийняття рішень в умовах невизначеності». Тобто вивчення математичної статистики є безсумнівним. Постає питання: «Як зацікавити в цьому студентів? Що використати, щоб практичне заняття було жвавим і захоплюючим?»

Одним із методів, який дозволяє встановити контакт з кожним студентом та залучити його до навчального процесу є використання статистичних задач, що містять тестування. В цих задачах вибіркою є вся група студентів, яка досліджується відносно певної випадкової ознаки, наприклад, коефіцієнт інтелекту, рівень хвилювання перед складанням важливого іспиту. За допомагою таких задач можна вивчити всі поняття описової статистики, навчитися отримані результати представляти в зручному для огляду та аналізу вигляді, будувати оцінки та висувати гіпотези відносно досліджуваної випадкової ознаки.

Для зацікавлення студентів практичне заняття можна урізноманітнити, використавши парадокси математичної статистики. Таких задач-парадосів багато, а їх аналіз призводить до більш глибокого розуміння предмета. В книзі Г. Секей [1] є приклад парадоксу методу максимальної вірогідності. Нехай $X_1, X_2, ..., X_n$ — незалежні випадкові величини, рівномірно розподілені на $(\theta, 2\theta)$. Оцінкою максимальної вірогідності невідомого параметра θ є $\max(X_i/2)$. Дещо змінивши її, розглянемо

$$\hat{\theta} = \frac{2n+2}{2n+1}\max(X_i/2)$$

— незміщену оцінку для θ з дисперсією $D\hat{\theta} = 1/4n^2$. З іншого боку, дисперсія оцінки $\frac{n+1}{5n+4}(\min X_i + 2\max X_i)$ асимптотично еквівалентна $1/5n^2$, отже, ця оцінка є більш ефективною, ніж оцінка максимальної вірогідності, яка теоретично володіє найбільшою асимптотичною ефективністю.

Література

[1] Секей Г. *Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике.* — М.: Мир, 1990. — 240 с.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 104.

ДО ПИТАННЯ МОТИВАЦІЇ УЧНІВ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ЛОГАРИФМІВ

Н. В.Святецька , Л. Й. Наконечна
(ВДПУ імені Михайла Коцюбинського, Вінниця, Україна)

Існує прямий зв'язок між ставленням до навчання та рівнем сприйняття матеріалу. При активно-позитивному ставленні спостерігають надійність засвоєння матеріалу, при байдужому ставленні - ненадійність сприйняття. Негативне ставлення спричиняє середні результати відтворення. Чим вища мотивація навчальної діяльності, тим ця діяльність є результативнішою[4]. Існує багато способів та прийомів підвищення пізнавального інтересу учнів у процесі навчання математики. У процесі вивчення логарифмів вважаємо за доцільне використання історичної довідки та інформації про прикладне застосування логарифмів.

За словами французького математика та філософа Ж.А. Пуанкаре, будь-яке навчання стає яскравішим, багатшим від кожного дотику з історією досліджуваного предмета. Застосування додаткової інформації покращить інтерес до математики, дасть можливість школярам зрозуміти важливість математики, що дозволить вчителю мотивувати учнів до її вивчення. Найефективніше застосовувати такі прийоми на початку вивчення даної теми, або на мотиваційному етапі будь-якого з уроків [1].

З логарифмом людство знайоме вже дуже давно та використовує його у різних сферах своєї діяльності, тому існує велика кількість інформації про історію відкриття логарифмів та про їх практичне застосування у житті. Наприклад, для історичної довідки вчитель математики може використовувати наступний фрагмент: *Протягом всього XVI століття швидкими темпами зростала кількість наближених обчислень, насамперед в астрономічних обрахунках. Головну складність представляло множення і ділення багатозначних чисел, особливо тригонометричних величин. З метою привести множення до більш легшого додавання та віднімання використовувалися таблиці косинусів та синусів, а також була створена таблиця квадратів до 100000, з допомогою якої множення можна було здійснювати за складними формулами. Жоден із прийомів не давав цілком правильне розв'язання проблеми. Але його принесли із собою логарифми, які були винайдені незалежно одним від одного Непером, та на 10 років пізніше Бюргі. Кожен із них хотів створити більш зручніші способи арифметичних обрахунків, але підійшли до свого завдання по-різному. Непер кінематично виражав логарифмічну функцію і досяг майже не досліджувану область теорії функцій. Бюргі розглядав дискретні прогресії. Але жодне із означень логарифма не схоже на сучасне* [2].

Щодо прикладного застосування, досить цікавою є інформацію про застосування логарифмів у музиці: "*Граючи по клавішах сучасного рояля, ми граємо, власне кажучи, на логарифмах… І дійсно, так звані «ступені» хроматичної гами не розставлено на рівних відстанях ні по відношенню до чисел коливань, ні по відношенню до довжин хвиль відповідних звуків, а являють собою логарифми цих величин. Тільки основою цих логарифмів є 2, в не 10, як прийнято в інших випадках*" [3].

Дуже часто у процесі навчання математики учні запитують навіщо вивчати математику. Розповіді учням про прикладне застосування математики, зокрема логарифмів, та про історію їх виникнення дають можливість переконати учнів у тому, що математика виникла та розвивалася із потреб людини, є важливою наукою.

Література

[1] Шестопал О.В. *Історичні хвилинки як дієвий засіб мотивації до вивчення математики* / О.В. Шестопал // Інтернет-методрада як інструмент відкритого ефективного співробітництва з проблем методики викладання у ВНЗ I-II рівнів акредитації. / О.В. Шестопал., 2015.

[2] *История математики с древнейших времен до начала XIX столетия.* — Москва: Наука, 1970. — 303 с.

[3] Кузьменко В.М. *Застосування логарифмів в музиці [Електронний ресурс] / В.М. Кузьменко.* — Режим доступу до ресурсу: https://ppt-online.org/72201.

[4] Наконечна Л.Й. *Розвиток пізнавальної самостійності майбутніх учителів математики у процесі вивчення фахових дисциплін : дис. на здобуття наук. ступ. канд. пед. наук : [спец.] 13.00.04 "Теорія та методика проф. освіти" / Л.Й. Наконечна; ВДПУ імені Михайла Коцюбинського.* — Вінниця, 2010. — 262 с.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 106.

ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ АЛГЕБРИ ТА ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ ПРИ ПІДГОТОВЦІ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Л. В. Скасків , О. А. Ярова
(Університет державної фіскальної служби Україн)

Алгебра належить до основних розділів математики і разом теорією чисел складає базу, на якій базуються всі інші розділи математики. Історично ці галузі математики розвивалися разом, збагачуючи один одного в процесі становлення. Цікаво відзначити, що такі новостворені галузі математики, як теорія кодування, використовують ідеї і результати як з лінійної алгебри, так і з теорії чисел.

В університетських програмах підготовки майбутніх вчителів математики серед багатьох інших є три обов'язкових дисципліни: лінійна алгебра, абстрактна алгебра і теорія чисел. У більшості випадків ці дисципліни є предметами різних і окремих лекційних курсів, які використовують різні книги, присвячені кожному предмету окремо. Корисним було б викладати один курс, що об'єднує всі ці три дисципліни і містить відповідну книгу, що сприяє більш ефективному використанню навчального часу [3]. Однією з найважливіших причин тут є ознайомлення студента з систематичним, інтегрованим і повним описом алгебраїчної теорії основних систем числення, які є основою для структур, які відіграють центральну роль у різних галузях математики [2]. Крім того, багато теорем теорії чисел мають дуже прості і елегантні доведення з використанням алгебраїчних інструментів.

Цей комплексний підхід вже частково впроваджений, а в праці [1] цей метод був повністю реалізований. Книга є своєрідним довідником, який дає можливість отримати інформацію про основні поняття та результати деяких важливих розділів алгебри та теорії чисел, таких як: "Множини, операції над множинами. Відображення множин "Матриці. Визначники. Властивості операції множення матриць "Групи. Кільця. Поля". Посібник охоплює базові поняття, результати та методи курсу алгебри та теорії чисел, що дає право стверджувати, що ця книга закладає фундамент для подальшого більш глибокого вивчення курсу алгебри та теорії чисел.

Література

[1] Курдаченко Л.А., Кириченко В.В., Семко М.М. *Вибрані розділи алгебри та теорії чисел: Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів* // К: Інститут математики НАН України. — 2005.

[2] Скасків Л.В. *Особливості викладання дисципліни "Алгебра та теорія чмсел"* // Всеукраїнська науково-методична конференція "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі". - Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова. — 2016.

[3] Скасків Л.В. *Теорія груп як складова курсу "Алгебра та теорія чисел".* // Міжнародна наукова конференція "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь". - Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова. — Київ. 2017.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 107.

ВІДКРИТТЯ ГРАВІТАЦІЙНИХ ХВИЛЬ

Г.Г. Солтусенко
(УДПУ імені Павла Тичини, Умань, Україна)

Гравітаційні хвилі – прямий наслідок рівнянь загальної теорії відносності, запропонованих Альбертом Ейнштейном у 1915 році. Вони описуються рівняннями хвильового типу, їхні розв'язки відповідають збуренням простору-часу, що рухаються зі швидкістю світла. На відміну від електромагнітних хвиль інтенсивність гравітаційних хвиль на багато порядків менша, тому виявити їх вдалося лише через 100 років з моменту передбачення Ейнштейном.

Наші уявлення про створення Всесвіту базуються багато в чому на геніальних передбаченнях великого фізика, тому відкриття гравітаційних хвиль було лише питанням часу. Однак, на відміну від Спеціальної, спроби пояснення з точки зору Загальної теорії відносності в поєднанні з квантовою механікою та як наслідку побудови теорії квантової гравітації не мала успіху.

Вперше аргументи на користь існування гравітаційних хвиль були отримані Расселлом Галсом та Джозефом Тейлором при вивченні пульсара PSRB1913+16. За відкриттям втрати пульсаром енергії, гіпотетично витраченої на випромінювання гравітаційних хвиль, вчені були нагороджені Нобелівською премією з фізики у 1993 році.

11 лютого 2016 року було оголошено про експериментальне відкриття гравітаційних хвиль за допомогою надчутливих детекторів. Сигнал злиття двох чорних дір GW150914 був зареєстрований 14 вересня 2015 року двома інтерферометрами LIGO. У результаті гравітаційного колапсу утворилась єдина чорна діра, а колосальна залишкова енергія, якої б вистарчило на 5000 наднових зірок, поширилась космічними просторами у вигляді гравітаційних хвиль. Отриманий на Землі сигнал виявився настільки чітким, що комбіноване відношення сигналу-шум склало 24:1, хоч відстань до джерела становить близько 1,3 мільярда світлових років.

Наступним питанням, яке мають вирішити дослідники, є порівняння даних LIGO з іншими обсерваторіями. Так вони зможуть встановити, чи надійшов до них сигнал одночасно, тобто з однаковою швидкістю. Фізики вважають, що гравітація поширюється за допомогою гравітонів – квантових часток, які є гравітаційним аналогом фотонів. Якщо гравітони не мають маси так само, як фотони, тоді вони можуть мандрувати простором-часом зі швидкістю світла, що відповідає умовам загальної теорії відносності. Існує також ймовірність, що гравітони все ж мають деяку масу. У такому випадку вони будуть розповсюджуватись зі швидкістю, меншою за швидкість світла. Тому, якщо у LIGO (США) та VIRGO (Європа) помітять, що гравітаційні хвилі дійшли до них з певною затримкою у порівнянні з гамма-спалахом від того ж джерела, тоді фундаментальна фізика буде одразу ж переглянута.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 108.

МОДИФІКУЮЧИЙ ВПЛИВ НАПОВНЮВАЧІВ НА ЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ПЕНТАПЛАСТУ

С. С. Столярова
(НПУ ім. М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

Стрімкий розвиток науки та техніки вимагає створення принципово нових матеріалів з комплексом унікальних властивостей. Однією із характеристик, до якої ставляться підвищені вимоги є теплопровідність.

Одним з перспективних напрямків модифікації полімерів є введення в них різних твердих дисперсних і волокнистих наповнювачів неорганічної та органічної природи.

В якості об'єкту дослідження нами було обрано високомолекулярний поліефір – пентапласт, який одержується полімеризацією мономера 3,3-біс(хлорметил) оксациклобутану. Завдяки симетричному розташуванню у просторі хлорметильних груп вздовж основного ланцюга (вміст хлору 45.5 %) пентапласт стійкий до дії розчинників, а також характеризується високою теплостійкістю. В якості дисперсного наповнювача було обрано йодид срібла (AgI) марки "Ч".

Зразки системи пентапласт – дисперсний AgI готували у наступному (p-T-t) режимі: нагрівання зі швидкістю 3,5 К/хв, витримка при 483 К протягом 15 хв. під тиском 20 МПа, охолодження з розплаву з швидкістю 0,5 К/хв, що відповідає оптимальним технологічним умовам переробки композиту з урахуванням властивостей як наповнювача, так і полімерної матриці.

За результатами досліджень було виявлено, що при малому вмісті дисперсного наповнювача теплопровідність ПКМ низька і близька до теплопровідності полімера. При вищих концентраціях ($\varphi > 42$ %) значення λ композитів наближається до відповідних значень коефіцієнтів теплопровідності наповнювача за рахунок збільшення вмісту більш теплопровідного наповнювача. Так при T = 103 K

$$\frac{\lambda_{AgI}}{\lambda_{penton}} > 1,5, \tag{1}$$

а при $\varphi = 69$ % навіть перевищує її за рахунок сумарного внеску механізмів провідності полімерної матриці та дисперсного наповнювача.

Підвищення значення теплопровідності композитів системи пентапласт - AgI лежить в допустимих межах, що дає можливість широкого практичного застосування.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 109.

ГІДРОДИНАМІЧНІ РАДІУСИ МАКРОМОЛЕКУЛ СИРОВАТКОВОГО АЛЬБУМІНУ ЛЮДИНИ, ОТРИМАНІ З ДАНИХ ПО ЗСУВНІЙ В'ЯЗКОСТІ ЙОГО ВОДНИХ РОЗЧИНІВ

О.В. Хорольський
(ПНПУ імені В. Г. Короленка, Полтава, Україна)

Питанню структури сироваткового альбуміну людини у водних розчинах присвячено значна кількість як теоретичних, так і експериментальних робіт, проте єдина картина зв'язку структури макромолекули альбуміну із pH, концентрацією, температурою, наявністю домішок у водних розчинах на разі відсутня. Структура макромолекули альбуміну у водному розчині зазнає значних змін внаслідок теплового руху молекул води та конформаційних змін ланок макромолекули.

Експериментальні дані зсувної в'язкості водних розчинів сироваткового альбуміну людини у температурному інтервалі $(278 \div 318)$ K та інтервалі концентрацій $(0.82 \div 36.9)$ мас.% для сталого значення pH=7.0 взято з роботи [1].

Для обробки експериментальних даних із температурних і концентраційних залежностей в'язкості водних розчинів сироваткового альбуміну людини використано формулу Маломужа–Орлова, яка дозволяє моделювати зсувну в'язкість розчинів макромолекулярних клубків аж до об'ємних концентрацій 0.45 об.% та розрахувати ефективні радіуси макромолекул [2]. Побудована поверхня ефективних радіусів макромолекул сироваткового альбуміну людини як функція температури та концентрації для сталого значення pH.

Показано, що у всьому температурному інтервалі можна виділити три області концентрацій, де поведінка ефективного радіусу сироваткового альбуміну людини змінюється: 1) при концентраціях $(0.82 \div 3.65)$ мас.% ефективні радіуси сироваткового альбуміну людини залишаються незмінними; 2) при концентраціях $(4.67 \div 9.45)$ мас.% ефективні радіуси альбуміну у водному розчині нелінійно зменшуються; 3) при концентраціях $(10.2 \div 23.8)$ мас.% ефективні радіуси макромолекул альбуміну з ростом концентрації лінійно зменшуються, причому кут нахилу спадних залежностей слабко залежить від температури.

Література

[1] Monkos K. *On the Hydrodynamics and Temperature Dependence of the Solution Conformation of Human Serum Albumin from Viscometry Approach* // Biochimica et Biophysica Acta – Proteins and Proteomics. — 2004. — Vol. 1700(1). — pp. 27-34.

[2] Khorolskyi O.V. *Effective Radii of Macromolecules in Dilute Polyvinyl Alcohol Solutions* // Ukr. J. Phys. — 2018. — Vol. 63, Iss. 2. — pp. 144-149.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 110.

КРИСТАЛОФІЗИКА. ФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ КРИСТАЛІВ

С. Челнокова
(НПУ ім. М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

Кристалофізика – розділ кристалографії, в якому вивчаються фізичні властивості кристалів, їхня залежність від атомно-кристалічної структури, зміни цих властивостей від зовнішніх впливів. Кристалофізика пояснює анізотропію, дефекти в кристалах тощо [2, с. 249].

Серед усіх фізичних властивостей кристалів розглянемо наступні: п'єзоелектричний ефект, п'єзооптичний ефект, сегнетоелектричні властивості.

Під дією механічної напруги або деформації в кристалі виникає електрична поляризація. Це явище називають п'єзоелектричним ефектом. Зворотній п'єзоелектричний ефект – це механічна деформація кристалу, що виникає внаслідок прикладеного електричного поля до нього. До того ж величина та тип деформації залежать від величини та знаку поля. Кристали, що наділені п'єзоелектричним ефектом, застосовують в якості перетворювачів електричної енергії в механічну і навпаки [1, с. 97].

Зміна оптичних властивостей матеріалу під дією механічного навантаження називають п'єзооптичним ефектом [2, с. 490]. Сегнетоелектричні кристали – це такі піроелектрики, які в деякому діапазоні температур електризуються спонтанно, без накладання електричного поля [2, с. 589].

Фізичні властивості кристалів часто ізолюють один від одного, насправді, вони взаємопов'язані один з одним, під впливом зовнішніх сил виникає не одна, а декілька властивостей. Так, нагрівання кристалу може викликати не тільки зміну його ентропії та теплове розширення, а й електричну поляризацію внаслідок піроелектричного ефекту.

Література

[1] Білецький В. С. *Мала гірнича енциклопедія* Д.: Східний видавничий дім, 2004 – 2013.
[2] Вакуленко М. О., Вакуленко О. В. *Тлумачний словник із фізики.* К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет». — 2008. – 767 с.

Восьма Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання». Секція 4. — С. 111.

ЕЛЕКТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ НАПОВНЕНОГО ПОЛІХЛОРТРИФТОРЕТИЛЕНУ

А. Л. Ярошко
(НПУ ім. М.П. Драгоманова, Київ, Україна)

У наш час науково-технічного прогресу вчені розробляють і застосовують нові матеріали з особливими властивостями, що є ефективними в різних галузях діяльності людини. До таких матеріалів відносяться полімери. Полімери мають високі фізико-механічні, адгезійні та теплофізичні властивості, являються діелектриками. Для того, щоб полімерний діелектрик став провідником, потрібно в нього ввести провідний наповнювач.

З літератури відомо, що для мікронаповнювача поріг перколяції становить 18% (об'ємних). Ситуація докорінно змінюється у разі використання нанонаповнювача (умовно розмір частинок – до 100 нм). В цьому випадку поріг перколяції може становити менше 1%.

Поліхлортрифторетилен (ПХТФЕ, торгова марка – фторопласт-3) – типовий представник класу кристалоаморфних полімерів. Він зручний для дослідження фізико-механічних властивостей, тепло- і електропереносу та молекулярної рухливості.

Діелектричні властивості ПХТФЕ в умовах підвищеної вологості внаслідок виключної вологостійкості і немочуваності поверхні водою досить стабільні. Несиметричність основної ланки в молекулі ПХТФЕ призводить до погіршення деяких діелектричних властивостей, зокрема до великих діелектричних втрат, що, як зазначається в літературі [4], обмежує його використання при високих частотах, але, як досліджено, має велику перспективу його застосування в складі ПКМ як поглинача електромагнітного випромінювання в НВЧ діапазоні.

Для одержання полімерного композиту з певним вмістом наповнювача (після проведення необхідних розрахунків) у розчин (етиловий спирт – нанодисперсний графіт) додавали порошкоподібний (агрегати сферичної форми діаметром $d \approx 200$ нм) поліхлортрифторетилен (фторопласт-3) різного вмісту. Суміш, періодично перемішуючи, нагрівали ($t < 363K$) до повного видалення спирту. З порошкоподібних полімерних композитів готували зразки для дослідження методом термічного пресування.

В результаті пошукових досліджень встановлено, що ефективними методом підвищення фізико-хімічних властивостей нанокарбон-полімер композитів (НКПК) на основі поліхлортрифторетилену (ПХТФЕ) наповненого нанокарбоном є спосіб хімічного модифікування нанокарбонових нанопластинок нанодисперсним кремнеземом (SiO2). Метод електронної мікроскопії може дозволити оцінити форму і топологію розміщення SiO2 на поверхні карбону. Крім того перспективним може виявитись спосіб функціоналізації (гідрофілізації) нанокарбонових нанопластинок обробкою поверхні частинок карбону активним розчином хлорсилану в органічному розчиннику.

Наукове видання

ВОСЬМА ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ МОЛОДИХ ВЧЕНИХ З МАТЕМАТИКИ ТА ФІЗИКИ «АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ СУЧАСНОЇ МАТЕМАТИКИ І ФІЗИКИ ТА МЕТОДИКИ ЇХ НАВЧАННЯ»

ВИДАВНИЦТВО
НАЦІОНАЛЬНОГО ПЕДАГОГІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ М. П. ДРАГОМАНОВА

Підписано до друку 22.05.2019 р. Формат 60х84/16.
Папір офісний. Гарнітура Times New Roman.
Ум. др. арк. 6,51. Зам. № 164.
Віддруковано з оригіналів.

Видавництво Національного педагогічного університету
імені М.П. Драгоманова. 01601, м. Київ-30, вул. Пирогова, 9
Свідоцтво про реєстрацію ДК № 1101 від 29.10.2002. (044) 234-75-87
Віддруковано в друкарні Національного педагогічного університету
імені М.П. Драгоманова (044) 239-30-26