

## Комп'ютеризована підтримка факультативних та позакласних занять з математики в старшій школі

Найбільш повної і довершеної спрямованості процес розвитку творчих задатків школярів може набути під час позакласних, факультативних та самостійних занять, зорієнтованих на активну пізнавальну діяльність.

Такі заняття, не обмежені рамками класно-урочної системи і покликані слугувати навчальній меті, за умови раціональної організації проведення закладатимуть підвалини стійкого інтересу до навчальної тематики, до предмету, до науки в цілому.

Доцільною вбачається тенденція організації проблемно-пошукової (дослідницької) діяльності учнів на позакласних і факультативних заняттях з математики в старших класах. При цьому педагог повинен акцентувати увагу на вихованні в учнів уміння логічно мислити, бездоганно проводити аналітичні міркування; на формуванні в них навичок проведення раціональної системи пошуку, прогнозування. Неодмінно повинні схвалюватись інтуїтивні міркування учнів з подальшою їхньою перевіркою за допомогою програмних комп'ютерних засобів.

На подібних заняттях слід ілюструвати більш швидкі методи розв'язування вже розглянутих на уроках задач, узагальнювати ці методи, порівнювати знайдені учнями способи розв'язування, стимулювати пошук гарних, дотепних рішень. Схвальною вважається також навчально-пізнавальна діяльність учнів на факультативних заняттях, яка межує з прикладними галузями математики, що сприятиме кращому засвоєнню фундаментальної теорії науки, розкриттю її прикладних можливостей, всебічному розвитку конструкторських і раціоналізаторських здібностей школярів.

Наприклад, з метою розвитку творчих моментів у мисленні учнів можна застосувати "метод несподіваних заперечень" при розв'язуванні таких задач.

**Задача 1.** Визначте об'єм піраміди Хеопса, коли відомо, що в її основі лежить квадрат із стороною 227 м, а висота дорівнює близько 146,6 м.

**Задача 2.** Сторона ромба 48 см, менша діагональ дорівнює 20 см. Знайдіть кути ромба.

**Задача 3.** На змаганнях з фрістайлу траєкторія руху спортсмена описується функцією  $Y = \cos X$ ,

а траєкторія руху знімальної камери – рівнянням  $X = \frac{\pi}{4}$ . Чи перетне оператор лижню спортсмена? Якщо так, то скільки разів.

При цьому після аналізу умови задачі №1 слід рекомендувати старшокласникам не використовувати відому з курсу геометрії формулу визначення об'єму піраміди; при розв'язуванні задачі №2 – не використовувати калькулятор і таблиці Брадіса; при розв'язуванні задачі №3 – не зображати на папері ескізи траєкторій руху. Тут для успішного розв'язування задач винахідливі школярі застосують відомі прикладні програмні продукти, що допоможуть здійснювати необхідні побудови та обчислення.

Дослідницька діяльність учнів отримує новий рівень розвитку при її супроводі програмною підтримкою, що надає можливість здійснення комп'ютерного моделювання геометричних об'єктів, їх комбінацій, проекцій, траєкторій переміщення фігур, забезпечення графічного контролю, чисельних підрахунків, оцінювання лінійних, кутових, числових величин, маніпулювання віртуальними об'єктами, проведення з ними регламентованих імпровізацій. Тому корисно під час позаурочних занять школярам запропонувати такі задачі.

**Задача 4.** Дослідити, чи об'єми, утворені обертанням паралелограма послідовно навколо двох його суміжних сторін, обернено пропорційні цим сторонам [9, с. 47].

**Розв'язання.** За допомогою програми *Gran-2D* створюємо модель паралелограма, користуючись послугою побудови ламаної за точками. Для здійснення повороту зручно розмістити одну зі сторін паралелограма на координатній осі. Нехай довжина більшої сторони  $AB = 5$  лін. од., тоді об'єм фігури, утвореної внаслідок обертання навколо осі  $OX$  побудованого паралелограма,  $V_{AB} = 251,3274$  куб. од. (рис. 1).

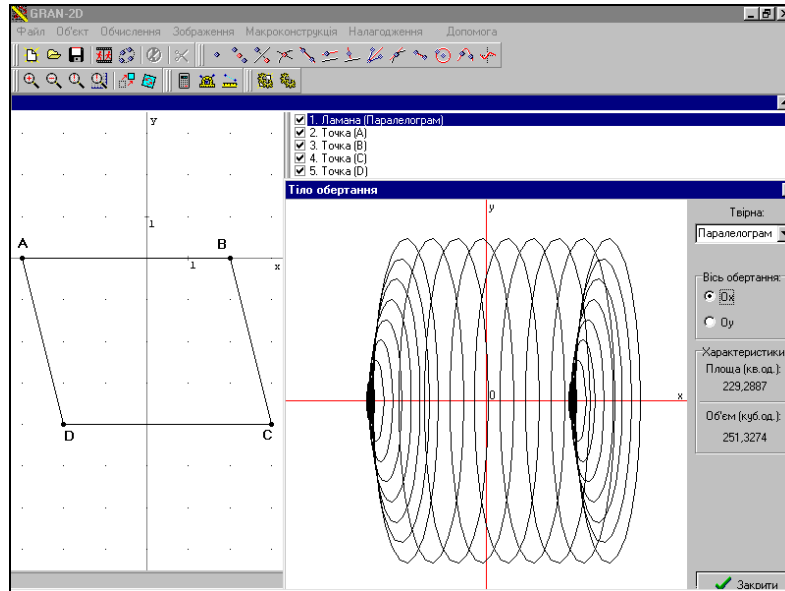


Рис. 1.

Далі за допомогою відповідних послуг програми вимірюємо довжину іншої (меншої) сторони паралелограма ( $BC = 4,1231$  лін. од.) і кути фігури, щоб коректно здійснити паралельне переміщення і поворот об'єкта, та аналогічним чином обчислюємо величину  $V_{BC} = 304,7797$  куб. од. Залишається лише перевірити рівність:  $\frac{AB}{BC} = \frac{V_{BC}}{V_{AB}}$ . Нескладні підрахунки за допомогою вбудованого в програму калькулятора дозволяють пересвідчитись у справедливості твердження. Для підтвердження висновку задачі перевіряємо правильність судження на прикладі ще кількох паралелограмів та робимо узагальнення.

**Задача 5.** Нехай  $V$ ,  $V_1$  і  $V_2$  – об'єми тіл, отриманих обертанням прямокутного трикутника навколо гіпотенузи і катетів. Перевірити, чи справедлива рівність:  $\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}$  [9, с. 47].

**Розв'язання.** Побудувавши прямокутний трикутник з вершиною прямого кута в початку координат (рис. 2) та послідовно виконуючи послугу програми Gran-2D, призначену для відображення ескізу тіла обертання та обчислення його характеристик, знаходимо значення суми з правої частини рівності.

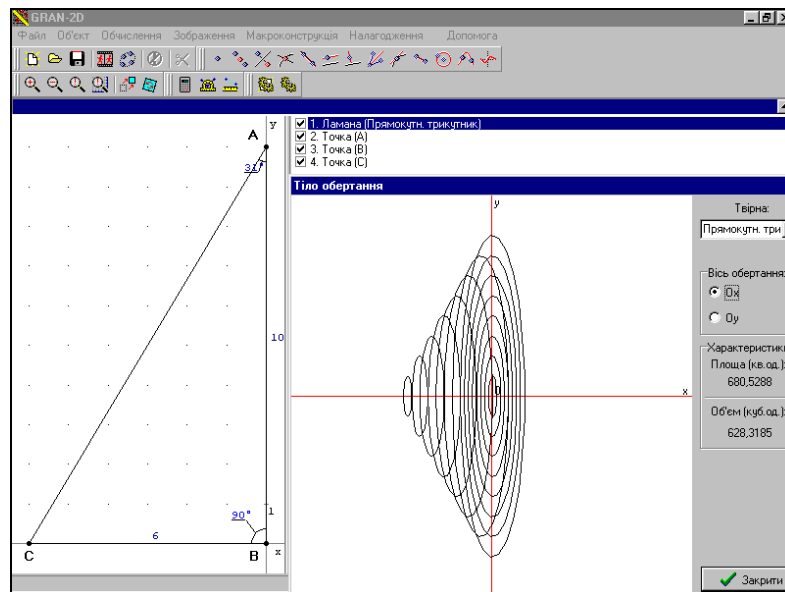


Рис. 2.

Повернувши в полі побудов трикутник проти годинникової стрілки навколо центру  $A$  на кут в  $31^\circ$  та виконавши аналогічні дії, переконуємося в істинності рівності для даного трикутника.

Далі пропонуємо учням провести аналогічні побудови і обчислення для інших прямокутних трикутників. Робимо висновок.

Таким же чином можуть бути розв'язані і такі задачі.

**Задача 6.** У трикутнику  $ABD$  дано основу  $AB = 4$  од. та прилеглі до неї кути  $\angle DAB = 30^\circ$ ,  $\angle ABD = 120^\circ$ . Знайти об'єм і площу поверхні тіла, отриманого при обертанні цього трикутника навколо його висоти, що не перетинає трикутника [1, с. 108].

**Розв'язання.** Відміtimo в полі побудов програми GRAN-2D на осі  $OX$  відрізок  $AB = 4$  лін. од., візьмемо на осі  $OY$  точку  $D$ , виміряємо кути трикутника при основі  $AB$  та будемо рухати точку  $D$  вздовж осі  $OY$  доки не утвориться необхідна за умовою задачі модель трикутника (рис. 3). Обернемо модель утвореного трикутника навколо осі  $OY$  та за допомогою вмонтованих в програму GRAN-2D процедур дізнаємось про значення, що необхідно було обчислити.

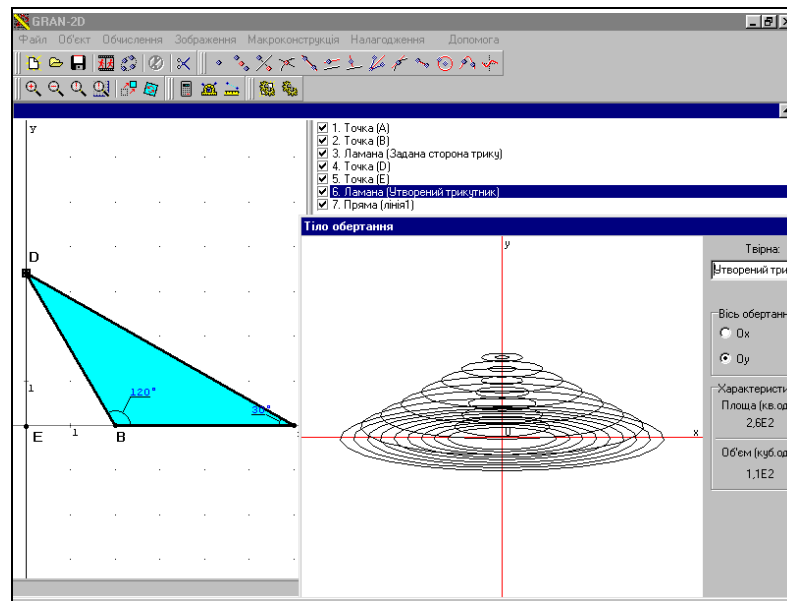


Рис. 3

**Задача 7.** Квадрат зі стороною 4 лін.од. обертається навколо осі, що проходить через цю вершину і середину сторони, що не проходить через цю вершину. Знайти об'єм отриманого тіла обертання [9, с. 47].

**Розв'язання.** Побудувавши в прямокутній системі координат квадрат зі сторонами на осях та знайшовши за відповідною послугою програми середину сторони  $AD$  – точку  $E$ , здійснимо поворот моделі до накладання точки  $E$  на вісь ординат. При цьому необхідно слідкувати, щоб чотирикутник весь час мав властивості квадрата (рис. 4). Вісь, про яку йдеться в умові задачі, внаслідок повороту співпадає з віссю  $OY$ . Далі, скориставшись послугою програми, призначеною для визначення об'ємів та площ обертання тіл, утворених внаслідок обертання моделей навколо осей координат, дістанемо необхідні значення.

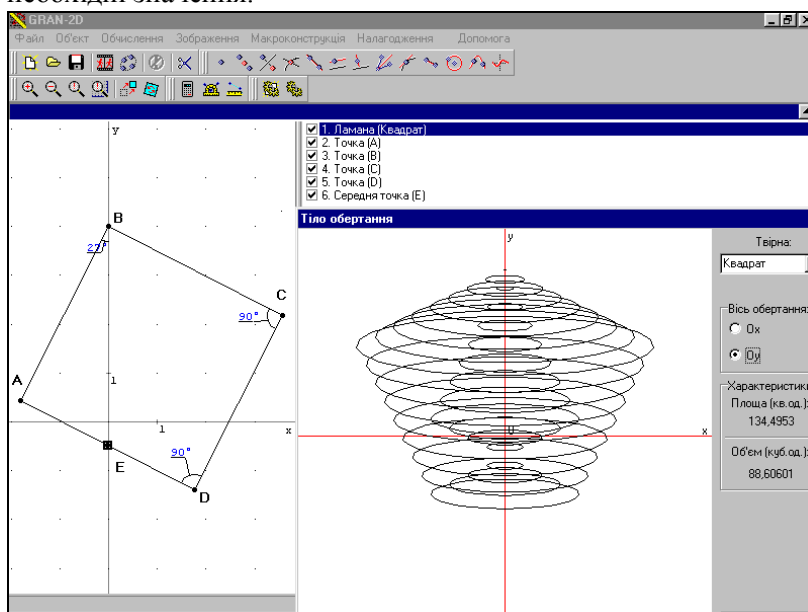


Рис. 4.

Умови подібних задач можна пропонувати учням з наперед виконаними за допомогою програми побудовами тіл обертання. Демонструючи таку наочність та закриваючи підраховані числові характеристики тіл, вчитель може значно пришвидшити процес усвідомлення учнями умови задач, підживить їхню уяву візуалізацією контурів та заінтригує дітей з метою мобілізації їхніх інтелектуальних зусиль, уваги, досвіду, пам'яті. Після закінчення процесу колективного розв'язування задач лідери таких інтелектуальних тренінгів, отриманий результат яких найкращим

чином наближений до справжнього, повинні заохочуватись.

**Задача 8.** Дослідити, які фігури утворюються внаслідок перерізу куба площиною, що проходить через середини двох суміжних ребер однієї з його граней і через вершину кута, яка належить протилежній грані. Скільки площин можуть утворити такий перетин? В якому відношенні ділиться об'єм куба кожною з цих площин?

Користуючись реалізованими в програмі Gran-3D можливостями відображення моделей фігур, що утворюються внаслідок перерізу площинами побудованих многогранників (рис. 5), учні матимуть змогу простежити будову кожного з тіл, що утворилися внаслідок перерізів, дослідити форми та взаємне розташування граней, а отримавши значення об'ємів, проаналізувати їх відношення.

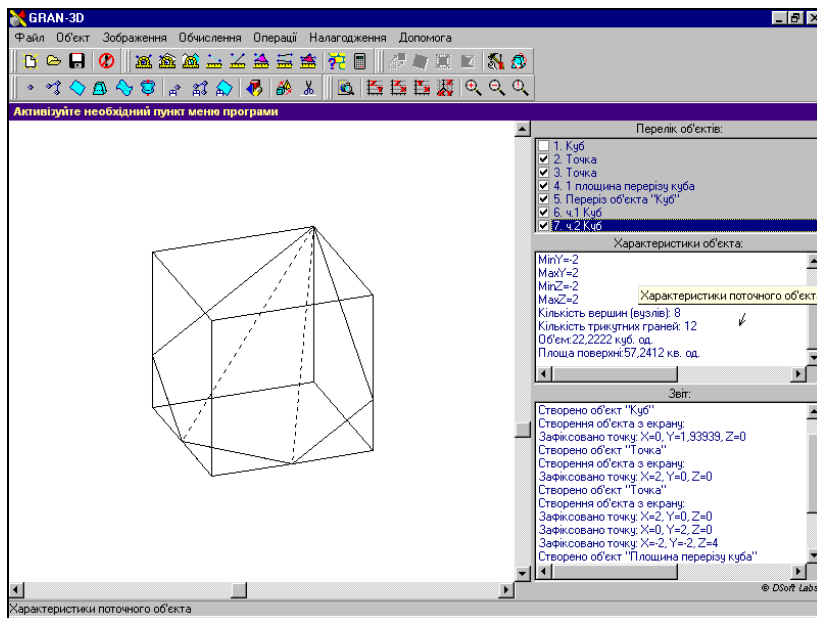


Рис. 5.

Взагалі під час розв'язування подібних задач використання таких програмних засобів значно прискорює процес розуміння і усвідомлення задач учнями, а зекономленим часом вчителі можуть розпорядитись на свій розсуд. Зокрема, для розвитку творчих здібностей учнів корисно запропонувати старшокласникам відтворити ситуації, в яких застосовуються дії, описані в умовах задач.

В якості допоміжного інструментального засобу програми з серії "Gran" з користю використовуються старшокласниками для перевірки умов задач на доведення.

**Задача 9.** Показати, що якщо чотирикутник вписано в круг, то сума добутків довжин його протилежних сторін дорівнює добутку довжин його діагоналей [7, с. 41].

**Розв'язання.** Побудувавши за допомогою програми Gran-2D коло та вписавши в нього чотирикутник, маємо змогу визначити довжини потрібних відрізків. Користуючись вбудованим в програму калькулятором, можемо на конкретних прикладах пересвідчитись у справедливості твердження, що пропонується в умові теореми (рис. 6).

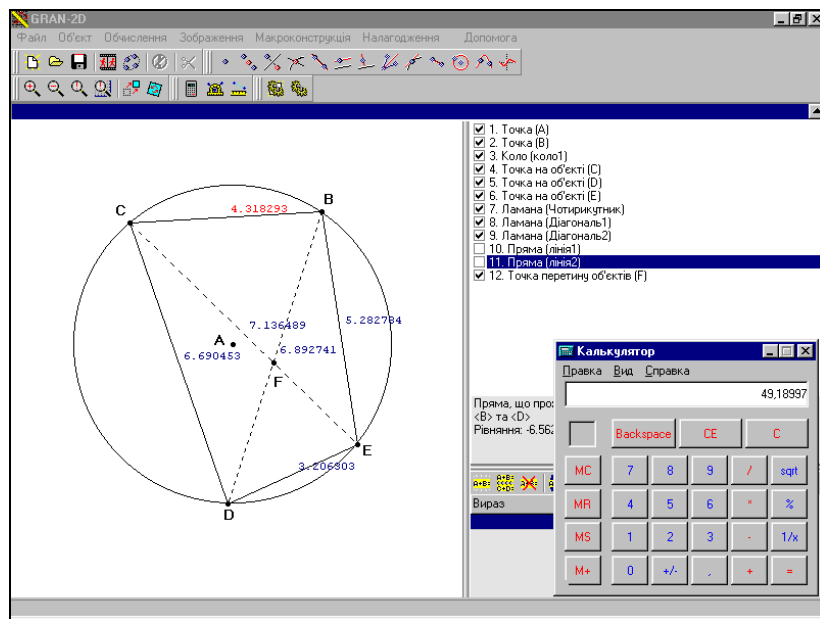


Рис. 6

Учням корисно запропонувати дослідити, чи вони не випадково отримали рівність. Для цього

по-різному розташовуючи чотирикутник в колі знову перевіряємо істинність твердження теореми. Аналогічним чином послуги програми GRAN-2D, призначені для здійснення кутових вимірювань, допомогатимуть у перевірці істинності наступних тверджень.

**Задача 10.** З довільної точки кола проведемо перпендикуляри на сторони вписаного в нього трикутника (рис. 7). Перевірити, що основи перпендикулярів лежать на одній прямій (пряма Сімпсона) [7, с. 50].

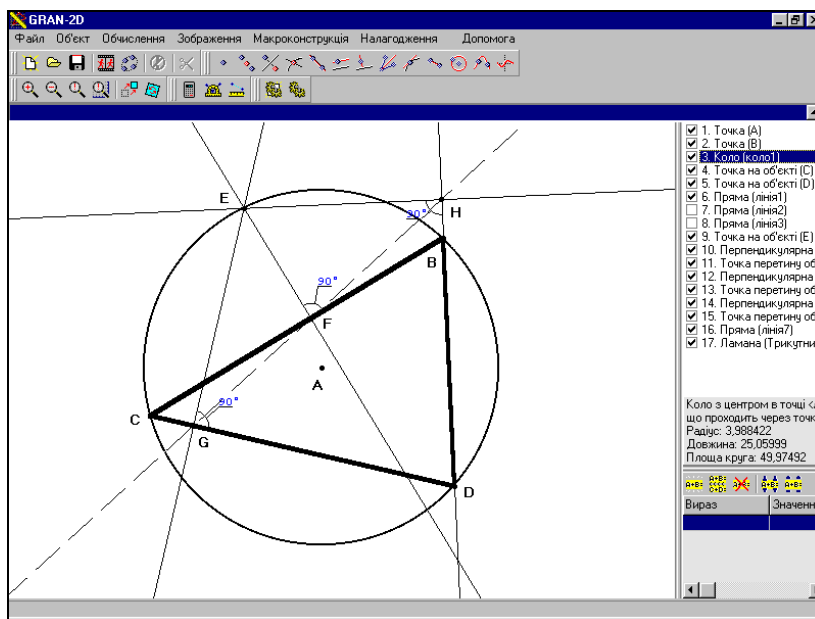


Рис. 7.

**Задача 11.** Точка E, що належить бічній стороні BC трапеції ABCD, з'єднана з вершинами A і D. Через вершину B проведемо пряму, паралельну до ED, а через вершину C – пряму, паралельну до AE (рис. 8). Перевірити, чи останні дві прямі перетинаються в точці, що належить стороні AD [7, с. 380].

Після побудови моделей до задач та багаторазової зміни форм і розташування вихідних об'єктів учні переконуються у справедливості тверджень, що записані в умовах задач, і матимуть перед очима досконалу динамічну наочність, необхідну для проведення подальших доведень.

Дослідження старшокласниками можуть проводитись і під час розв'язування задач з курсу алгебри та початків аналізу. Тут в нагоді може стати реалізована в програмі GRAN-2D можливість відтворення на екрані комп'ютера моделей тіл, утворених внаслідок обертання навколо осей координат окремих частин графіків різноманітних функцій [3, с. 148].

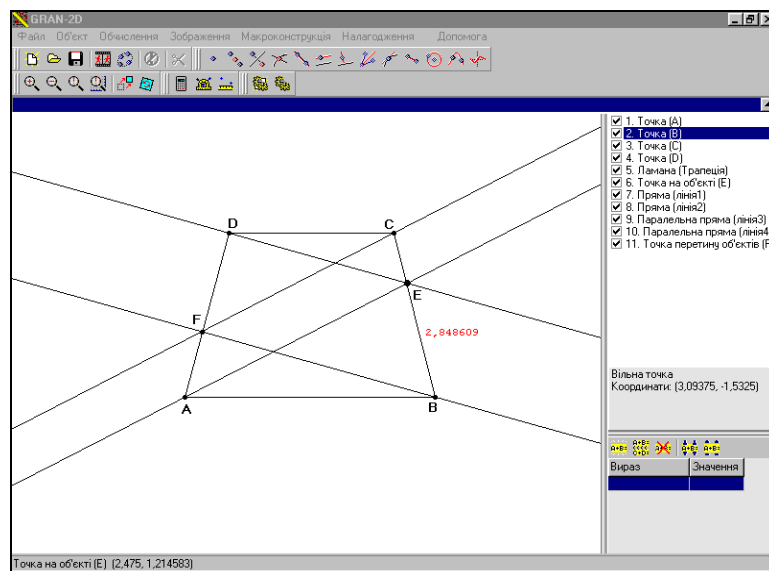


Рис. 8.

Наприклад, розв'язуючи задачу 12 та виконуючи велику кількість перетворень і обчислень, учні можуть переконатись в істинності своїх міркувань і здійснених підрахунків (рис. 9).

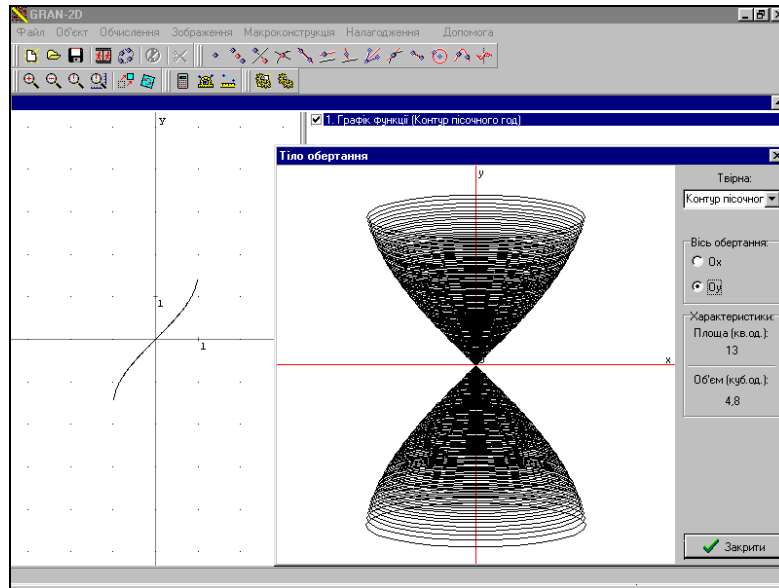


Рис. 9.

**Задача 12.** Обчисліть об'єм пісочного годинника, бічна поверхня якого утворена обертанням навколо осі ординат лінії  $y = \arcsin x$ . Схематично зобразіть годинник [5, с. 114].

**Задача 13.** Обертанням навколо осі абсцис дуг гіпербол  $y = \frac{1}{2x}$  та  $y = \frac{2}{x}$  на відрізку  $[0,5; 2]$  отримано дві воронки. Зобразіть воронки схематично в системі координат. У скільки разів площа виливного отвору другої воронки більша за площу виливного отвору першої. У скільки разів об'єм однієї воронки більший, ніж об'єм другої? [5, с. 112]

Спостерігаючи за результатами, отриманими за допомогою програм із серії "Gran", старшокласники плідно розвивають свою творчу уяву. Педагог при цьому повинен намагатися задіяти якомога більше механізмів такого розвитку. Для цього можна запропонувати учням створити комп'ютерні моделі якихось цікавих тіл, утворених внаслідок обертання різноманітних ліній (рис. 10), попередньо уявивши їх форму, а також включити їх до умов задач, присвячених певній темі шкільного курсу математики.

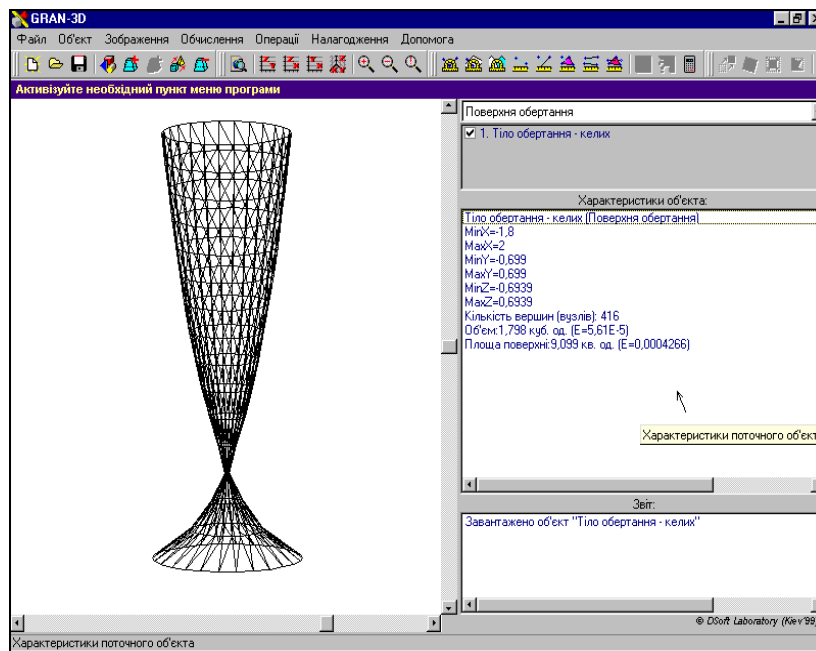


Рис. 10

Цікавими для старшокласників виявляються задачі, пов'язані з виконанням експериментальних побудов, що проводяться за допомогою різноманітних комп'ютерних програм. Наприклад, послуги програми Gran 1, призначені для відображення в полі побудов дотичної до графіка функції в певній точці, можуть використовуватись для проведення експериментальних досліджень школярами при розв'язуванні таких задач.

**Задача 14.** Показати, що дотична до кривої  $y = x^5 + 6x + 7$  в кожній її точці нахилена до осі  $Ox$  під гострим кутом (рис. 11).

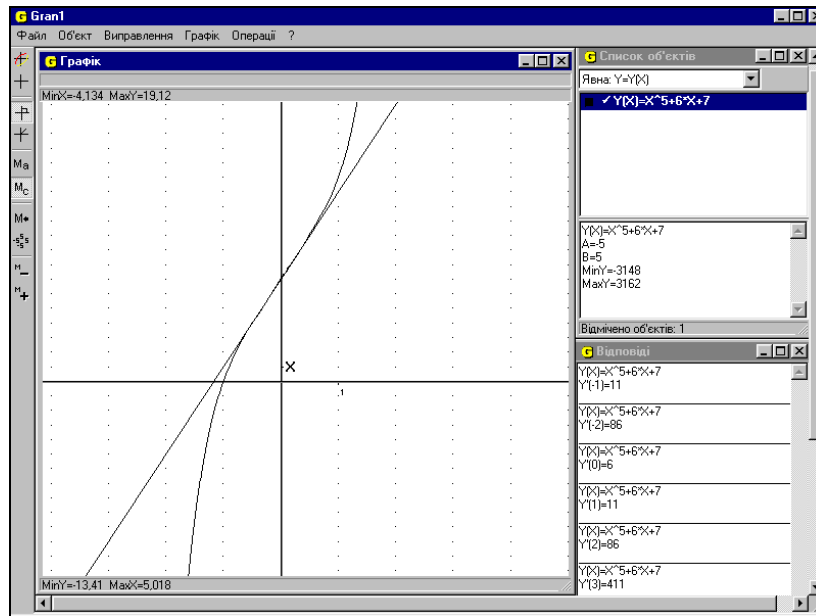


Рис. 11.

**Задача 15.** Переконайтеся, що дотична до параболи  $y = x^2$  в будь-якій її точці (крім точки  $O(0;0)$ ) перетинає вісь  $OX$  в точці, абсциса якої дорівнює половині абсциси точки дотику [6, с. 46–47] (рис. 12).

**Задача 16.** Гармата розташована в точці з координатами  $(0, 0)$ , мішень в точці з координатами  $(7, 0)$ . Визначити кут нахилу кидання снаряду і його початкову швидкість так, щоб траєкторія снаряду пройшла через точку (над вершиною укриття)  $(5, 3.01)$  і при цьому снаряд влучив у мішень [2, с. 65].

**Розв'язання.** Задавши таблично координати трьох точок, через які повинен проходити графік функції та вказавши степінь полінома – 2 (для параболи), отримаємо на екрані зображення траєкторії польоту снаряду, а також формулу функції, що описує цей політ (рис. 13).

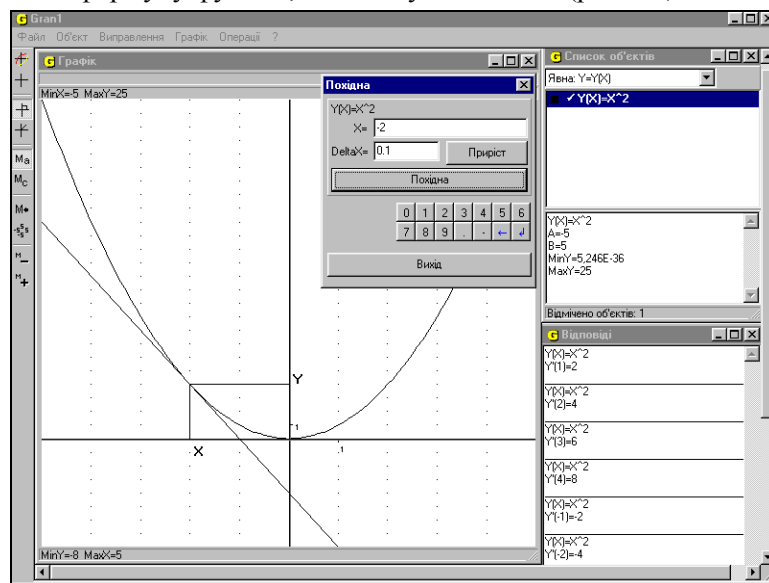


Рис. 12.

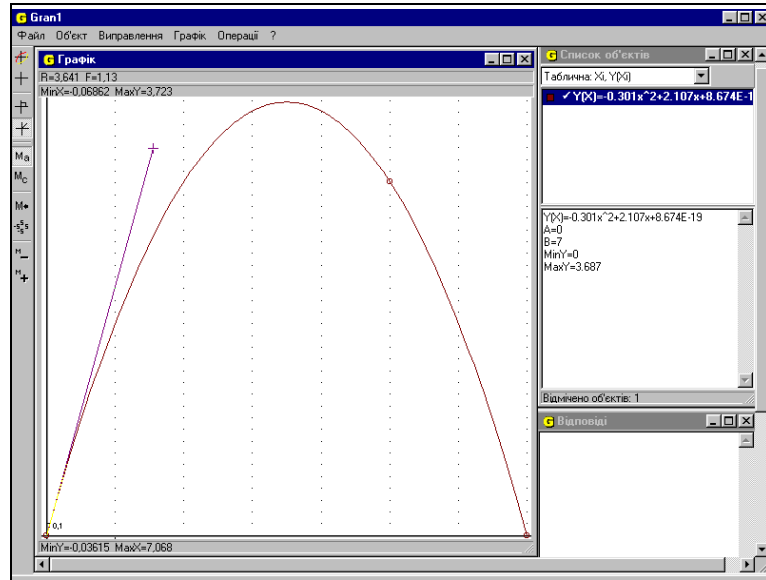


Рис. 13.

Кут нахилу кидання снаряду можна встановити, перейшовши до полярних координат, а початкову швидкість – виконавши деякі підрахунки [2, с. 68].

З метою виховання в учнів навичок прогнозування та проведення кваліфікованого опрацювання експериментальних даних в старших класах корисною є практика розв’язування задач з теорії ймовірностей та математичної статистики [4], [8].

**Задача 17.** Навмання перевірено 50 телеприймачів і дані цієї перевірки зведено в таблицю. Побудувати функцію розподілу частот  $F_{50}^*(x)$  та її наближений графік [2, с. 161].

Час безвідмовної роботи в роках	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
Кількість телеприймачів	1	1	2	4	4	7	10	10	6	3	1	1

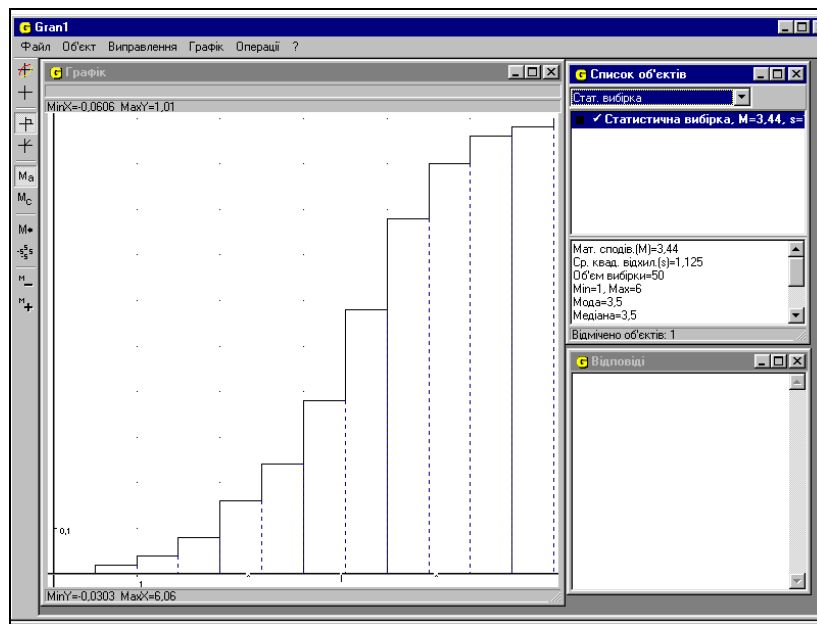


Рис. 14.

**Розв’язання.** Для розв’язування цієї задачі корисно скористатися відповідними послугами програми "Gran 1", попередньо задавши тип функції "Статистична вибірка" та увівши з клавіатури таблицю частот (рис. 14, 15).



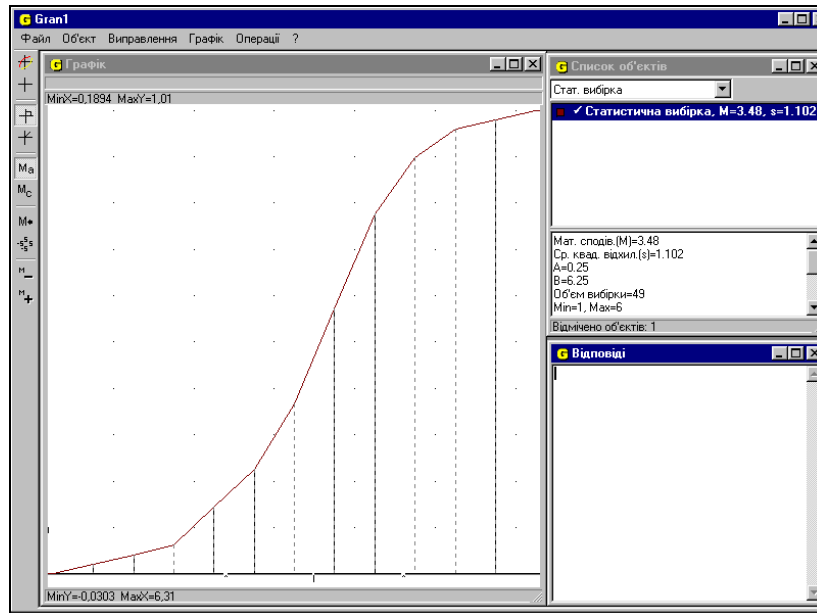


Рис. 15

Досвід показує, що в позаурочні години старшокласники з особливим ентузіазмом розв'язують різноманітні задачі–проблеми, задачі–загадки, задачі–фантазії. Інтерес до задачного практикуму підвищується і в тому разі, якщо у фонд задачного матеріалу включаються придумані учнями або відібрані ними за якоюсь суттєвою ознакою завдання; задачі, розв'язок яких дуже цікавий чи несподіваний або ж який можна естетично і вигідно подати у відомому програмному продукті.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Гольдберг Я.Е. С чего начинается решение стереометрической задачи: Пособие для учителя. – К.: Радянська школа, 1990. – 118 с.
2. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики.: Посібник для вчителів. – К.: Техніка, 1997. – 304 с.
3. Жалдак М.І., Вітюк О.В. Комп'ютер на уроках геометрії. Посібник для вчителів. – К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2000. – 168 с.
4. Жалдак М.І., Михалін Г.О. Елементи стохастики з комп'ютерною підтримкою: Посібник для вчителів. – К.: Шкільний світ, 2001. – 104 с.
5. Канин Е.С., Канина Е.М., Чернявский М.Д. Упражнения по началам математического анализа в 9–10 классах: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 1986. – 160 с.
6. Сборник задач по математике (для факультативных занятий в 9–10 классах) / Доброхотова М.А., Котий О.А., Потапов В.Г. и др. / Под ред. З.А. Скопеца. – М.: Просвещение, 1971. – 208 с.
7. Сивашинский И.Х. Задачи по математике для внеклассных занятий (9–10 классы). – М.: Просвещение, 1968. – 311 с.
8. Хмара Т.М. До включення змістовної лінії "Елементи комбінаторики, статистики та теорії імовірностей" в зміст загальної середньої освіти // Педагогічна Сумщина. – 1999. – №1. – С. 8–9.
9. Черкасов Р.С. Сборник задач по стереометрии: Пособие для учителей средней школы. – М.: Учпедгиз, 1956. – 88 с.