М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, І.М. Біляй

ВСТУП ДО СТОХАСТИКИ

Посібник
для учнів старшої школи

Київ 2014

Вступ до стохастики.
Посібник для учнів старшої школи. М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, І.М. Біляй.

В посібнику подано основні поняття стохастики. Введення основних понять стохастики базується на використанні однієї з ймовірнісних мір – статистичної ймовірності (відносної частоти) $P_n^*(A)$ відбування події A в серії із n проведених випробувань. Це дає можливість вивчати одночасно і теоретичні основи стохастики, і елементи математичної статистики.

Посібник призначено для учнів старшої школи. Посібник може бути корисним також студентам коледжів, вищих навчальних закладів I-II рівнів акредитації, де вивчають математику, студентам фізико-математичних та інформатичних факультетів педагогічних університетів, вчителям математики.

Рецензенти:
доктор педагогічних наук, професор Семеріков С.О.
доктор фізико-математичних наук, професор Торбін Г.М.
доктор педагогічних наук, професор Триус Ю.В.

РОЗДІЛ 1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ. ЙМОВІРНІСНІ МІРИ

1.1. Стохастичні випробування. Простір елементарних подій

Для дослідження всеможливих процесів і явищ люди часто вдаються до спеціальним чином організованих спостережень чи випробувань. Результати таких випробувань іноді є непередбачуваними. *Випробування,* точні результати яких передбачити неможливо, називають *стохастичними* або *випадковими.* Разом з тим кожному стохастичному випробуванню відповідає певна *множина* Ω *його можливих наслідків*. Ця множина Ω називається *множиною* або *простором елементарних подій*, а її елементи називаються *елементарними подіями*. При цьому результатом проведення кожного випробування є один єдиний наслідок – відбувається одна єдина елементарна подія із множини Ω всіх елементарних подій. Іншими словами, *в результаті кожного проведення випробування із множини* Ω *немов би вибирається один єдиний елемент E – відбувається елементарна подія E.*

Приклад 1.1.1. Грані кубика пофарбовано різними кольорами: одна грань біла, ще одна грань червона, інші чотири грані зелені. При підкиданні кубика фіксується колір грані, якою кубик впаде догори. Тоді множина $\Omega = \{$”біла”, “червона”, “зелена”$\}$ є множиною можливих наслідків випробування, тобто простором із трьох елементарних подій.

Приклад 1.1.2. Всі грані кубика пофарбовано в білий колір. При підкиданні кубика фіксується колір грані, якою кубик впаде догори. Тоді множина $\Omega = \{$”біла”$\}$ містить один єдиний елемент, а тому в даному випробуванні можливий один єдиний наслідок – верхня грань біла.

Якщо грані кубика пофарбовані в два кольори – тоді наслідків у випробуванні наведеного типу буде два, якщо в три кольори – наслідків буде три, і т.д., якщо шість кольорів – наслідків буде шість (при цьому мається на увазі, що на кожній грані є лише один колір).

Приклад 1.1.3. Підкидаються два кубики і фіксується пара кольорів: колір грані, якою догори впав перший кубик, і колір грані, якою догори впав другий кубик. При цьому кожну грань першого кубика пофарбовано одним із трьох кольорів – білий, зелений, червоний, так само як і кожну грань другого кубика пофарбовано одним із тих самих трьох кольорів. Тоді простором елементарних подій є множина

$$\Omega = \{(k_1, k_2) : k_1 \in \{\text{білий}, \text{зелений}, \text{червоний}\};$$
$$k_2 \in \{\text{білий}, \text{зелений}, \text{червоний}\}\}.$$

У цьому разі елементарні події можна інтерпретувати як усі можливі впорядковані пари кольорів (k_1, k_2), де $k_1 \in \{$білий, зелений, червоний$\}$, тобто один з кольорів, якими пофарбовано грані першого кубика, $k_2 \in \{$білий, зелений, червоний$\}$, тобто один з кольорів, якими пофарбовано грані другого кубика. Так, елементарна подія $(б, ч)$ полягає в тому, що перший кубик падає догори білою гранню, а другий – червоною.

Множину всеможливих впорядкованих пар (k_1, k_2) таких, що $k_1 \in A$, $k_2 \in B$, де змінна k_1 набуває всіх можливих значень із множини A, і при кожному значенні k_1 змінна k_2 набуває всіх можливих значень із множини B, називають *декартовим добутком множин A і B* і позначають $A \times B$.

Очевидно, з підкиданням кубика можна пов'язати простори елементарних подій з одним, двома, трьома, чотирма, п'ятьма, шістьма можливими наслідками випробовування. Якщо на гранях кубика нанесені цифри від 1 до 6 і якщо поділити множину $\{"1","2","3","4","5","6"\}$ на деяку кількість підмножин $H_1, H_2, ..., H_k$, $1 \le k \le 6$, таких, що $H_i H_j = \varnothing$ при $i \ne j$, тобто дві різні множини H_i та H_j не містять спільних елементів, а об'єднанням усіх множин H_i, $i \in \overline{1, k}$, є дана множина $\{"1","2","3","4","5","6"\}$, та вважати єдино можливими наслідками випробування попадання в такі підмножини H_i, $i \in \overline{1, k}$, тоді простір Ω елементарних подій міститиме k можливих наслідків випробовування, $1 \le k \le 6$.

Приклад 1.1.4. Підкидаються два кубики, на гранях яких нанесені цифри від 1 до 6, і як результат випробування фіксують сумарну кількість очок на двох кубиках. Тоді простором елементарних подій буде множина $\Omega = \{2, 3, 4, ..., 11, 12\}$.

У розглянутих прикладах простір елементарних подій був скінченним. Проте можливі випадки, коли множина Ω нескінченна.

Приклад 1.1.5. В круглу мішень радіуса 1, яку можна вважати множиною точок (x, y) таких, що $x^2+y^2 \le 1$, виконується один постріл. При цьому попадання кулі за межі мішені неможливе. Тоді множина $\Omega = \{(x, y): x^2+y^2 \le 1\}$ є множиною можливих наслідків випробування: через точки (x, y), в які може влучити куля, визначаються відповідні елементарні події в даному випробуванні.

Можна навести багато інших прикладів стохастичних явищ у фізиці, біології, метеорології, масовому виробництві, в системах автоматичного управління, медицині тощо.

Якщо проводити велику серію спостережень за випадковим явищем, перебіг якого при кожному спостереженні відбувається за одних і тих самих умов, можна помітити деякі закономірності стосовно частот відбування певних випадкових подій, пов'язаних із спостережуваним явищем. В стохастиці вивчаються саме такі закономірності.

У подальшому вважатимемо, що *випробування полягає в тому, що з деякої множини елементів навмання, незалежно від спостерігача, вибирається один окремий елемент. Поява того чи іншого елемента ототожнюється з відбуванням відповідної елементарної події, яка полягає в тому, що вибрано саме цей елемент.*

Поняття елементарної події та простору елементарних подій належать до основних понять стохастики і не означаються через простіші поняття.

Задачі

1.1.1. Перевірити чи правильні твердження:

1. Кожному випробуванню відповідає певний простір елементарних подій.
2. Кожна множина Ω є простором елементарних подій для деякого випробування.
3. Елементи кожної множини Ω повинні бути точками деякого координатного простору з координатами, якими характеризується місце розташування точок в такому просторі.
4. Поняття елементарної події і простору елементарних подій є означуваними поняттями.

1.1.2. Для даного випробування вказати можливі множини Ω елементарних подій (можливих наслідків випробування):

1. Підкидання монети двічі.
2. Підкидання монети тричі.
3. Підкидання кубика двічі.
4. Підкидання кубика тричі.
5. Фіксація часу зустрічі двох осіб, які домовилися зустрітися на

проміжку часу $[t_1;t_2]$.

6. Фіксація типу погоди (сонячно, хмарно, дощ) у першу суботу вересня о 9-й годині ранку.

1.1.3. Визначити, скільки різних просторів елементарних подій можна пов'язати з підкиданням кубика.

1.2. Поняття випадкової події

Нехай Ω – множина елементарних подій, що відповідає певному випробуванню.

Деяку (не будь-яку) *підмножину A множини* Ω називають *подією* (або *випадковою подією*).

Кажуть, що в результаті проведення *випробування подія A відбулася*, якщо при цьому проведенні випробування відбулася елементарна подія E така (із множини Ω навмання вибрано елемент E такий), що $E \in A$. Множини $A = \Omega$ та $B = \varnothing$ завжди вважаються подіями (на відміну від інших підмножин множини Ω).

Оскільки Ω – множина усіх можливих наслідків випробування, то в результаті кожного випробування подія Ω обов’язково відбувається, бо завжди $E \in \Omega$. Тому подію Ω називають *вірогідною.*

Подія $B = \varnothing$ не містить жодного елемента (елементарної події) з множини Ω, тому вона ніколи не може відбутися в результаті проведення випробування, бо завжди $E \overline{\in} \varnothing$. Подію $B = \varnothing$ називають *неможливою*.

Приклад 1.2.1. Випробування полягає у виборі навмання однієї кульки із 10, серед яких є білі і червоні. Як наслідок випробування фіксується колір кульки, $\Omega = \{б, ч\}$. Подіями можуть бути підмножини множини Ω: $A = \{б\}$, $B = \{ч\}$, $C = \{б, ч\}$, $D = \varnothing$, що означає відповідно: A –навмання вибрана кулька біла, B – навмання вибрана кулька червона, C – навмання вибрана кулька біла або червона, D – навмання вибрана кулька ні біла, ні червона. З відбуванням елементарної події *б* відбувається подія $A = \{б\}$, бо $б \in \{б\}$, і подія $C = \{б, ч\}$, бо $б \in \{б, ч\}$, але не відбувається подія $B = \{ч\}$ і подія $D = \varnothing$. Аналогічно, якщо відбувається елементарна подія *ч*, то відбувається подія $B = \{ч\}$, бо $ч \in \{ч\}$, і подія $C = \{б, ч\}$, бо $ч \in \{б, ч\}$, однак не відбувається подія $A = \{б\}$ і подія $D = \varnothing$.

Приклад 1.2.2. Випробування полягає у підкиданні кубика один раз, Ω={“1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”}. Якщо одна з випадкових подій A={“3”, “6” } полягає в тому, що на верхній грані кубика випадає число, кратне 3, то коли випаде “3”∈Ω, відбувається подія A={“3”, “6”}, а коли випаде “2”∈Ω, не відбувається ця подія, оскільки “2” $\overline{\in}$ A={“3”, “6”}.

Приклад 1.2.3. Випробування полягає в тому, що монету підкидають тричі. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що принаймні двічі випаде герб. Множиною елементарних подій у даному експерименті можна вважати сукупність впорядкованих трійок результатів першого, другого та третього підкидань монети, тобто

$$\Omega = \{ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ГЦЦ, ЦГГ, ЦГЦ, ЦЦГ, ЦЦЦ\}.$$

Тоді

$$A = \{ГГГ,\ ГГЦ,\ ГЦГ, ЦГГ\}.$$

Приклад 1.2.4. На стіл (з бортами) (Рис. 1.2.1) навмання кидається тенісна кулька. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що кулька опиниться в певній частині площини стола. Тут множина Ω нескінченна (кожній можливій точці зупинки кульки відповідає елементарна подія, яка полягає в тому, що кулька зупиниться саме в цій точці). Так само нескінченною може бути й підмножина A, через яку визначається розглядувана подія.

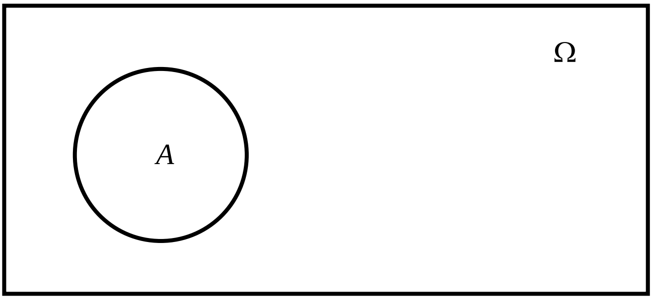


Рис. 1.2.1

Приклад 1.2.5. Виконується постріл в круглу мішень одиничного радіуса (Рис. 1.2.2), причому куля не може влучити за межі мішені. В даному разі $\Omega = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 1\}$. Нехай одна з подій $A = \Omega$ полягає в тому, що куля влучає в мішень. При виборі будь-якого елемента множини Ω відбувається подія A і не відбувається подія $B = \varnothing$. Якщо множина $C = \{(x, y): x^2 + y^2 \le 0{,}2\}$ – подія, то при виборі точки (0; 0) відбувається подія C, а коли буде вибрано точку $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, ця подія не відбуватиметься.

Нехай підмножини A і B множини Ω є подіями. Якщо $A \subset B$, тобто кожен елемент множини A є елементом і множини B, то говорять, що *подія A спричинює подію B*. Отже, подія A спричинює подію B тоді і тільки тоді, коли з відбуванням події A відбувається і подія B (Рис. 1.2.3).

Події A і B називають *рівними*, якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, тобто кожна з них спричинює іншу. Отже, події A і B рівні тоді і тільки тоді, коли вони одночасно або відбуваються, або не відбуваються.

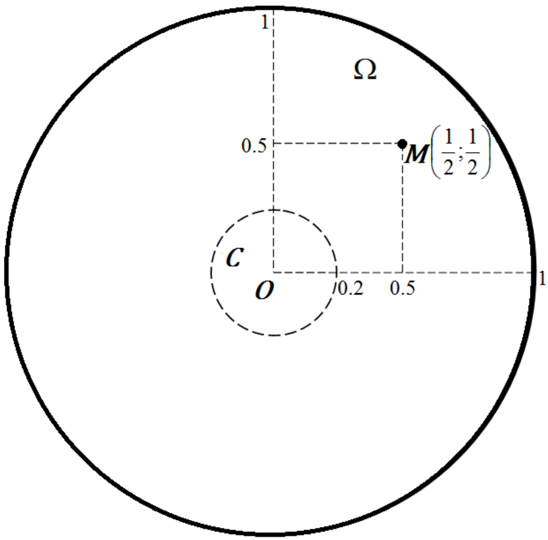


Рис. 1.2.2

Приклад 1.2.6. Випробування полягає в тому, що двічі підкидають монету. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що двічі випаде герб. Тоді подія A спричинює подію B, яка полягає в тому, що принаймні один раз випаде герб. Тут

$$A = \{ГГ\}, \; B = \{ГГ, ГЦ, ЦГ\},$$

і таким чином $A \subset B$, тобто подія A спричинює подію B (Рис. 1.2.4).

Для будь-якої множини Ω та підмножин A, B, C цієї множини мають місце такі властивості.

1. $A \subset A, \; A \subset \Omega, \; \varnothing \subset A$.

2. Якщо $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

3. $A = A$.

4. Якщо $A = B$, то $B = A$.

5. Якщо $A = B$, $B = C$, то $A = C$.

Позначаючи події (множини) кругами Ейлера, дістанемо відповідні геометричні ілюстрації (Рис. 1.2.3).

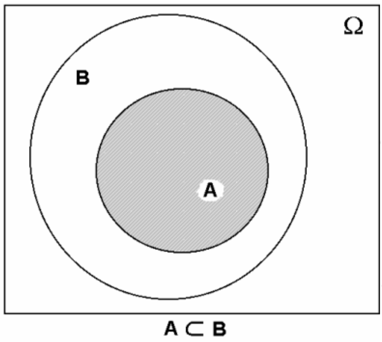


Рис.1.2.3

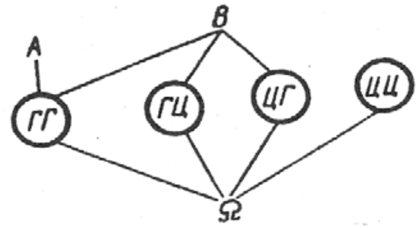


Рис. 1.2.4

Задачі

1.2.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Множина елементарних подій – це будь-яка множина.
2. Множина елементарних подій – це множина точок в деякому координатному просторі.
3. Подія – це будь-яка підмножина множини Ω елементарних подій.
4. Елементарна подія є подією.
5. При випадковому виборі навмання кожного елемента із множини елементарних подій відбувається певна подія.
6. Існує елементарна подія, при відбуванні якої не відбувається жодна подія.
7. Для будь-яких подій *A* і *B* принаймні одна з них спричинює іншу.

1.2.2. Вказати всі можливі події, що визначаються за множиною Ω елементарних подій:

1. Ω – множина наслідків випробування, яке полягає в підкиданні відразу двох монет (1 і 2 копійки). При цьому як наслідки розглядаються:

а) усі можливі пари появи герба і цифри на двох монетах – $\Omega = \{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}$, якщо першою вказується монета 1 копійка;

б) кількість появ герба на обох монетах, тобто $\Omega = \{0, 1, 2\}$.

2. Ω – множина наслідків випробування – пострілу в мішень, на якій зазначені можливі кількості отриманих очків: 0, 1, 2, 3, 4, 5 в залежності від відстані точки влучення від центра мішені. При цьому розглядаються наступні наслідки – 5 чи не 5 очків отримується після пострілу.

3. Ω – множина наслідків випробування, що полягає в підкиданні відразу двох кубиків (червоного та білого кольору), на гранях кожного з яких нанесені цифри від 1 до 6. При цьому як наслідки розглядаються:

а) можливі пари цифр $(i, j),\ i \in \overline{1,6},\ j \in \overline{1,6}$,

б) можливі суми цифр $(i + j),\ i \in \overline{1,6},\ j \in \overline{1,6}$,

де i – цифра, що випала на верхній грані одного з кубиків (білого кольору), j – цифра, що випала на верхній грані іншого кубика (червоного кольору).

1.3. Операції над подіями

Оскільки події – це деякі підмножини множини Ω елементарних подій, то над подіями можна ввести такі самі операції, як і над множинами.

Нехай $A \subset \Omega$ і $B \subset \Omega$ – деякі події.

Означення. *Сумою подій A* і *B* називають таку подію *C*, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається принаймні одна з подій *A* або *B*.

Це означає, що кожна елементарна подія *E*, що належить до множини *C*, належить принаймні до однієї із множин *A* або *B*, і навпаки, якщо $E \in A$ або $E \in B$, то $E \in C$. В теоретико-множинному тлумаченні сумі *C* подій *A* і *B* відповідає об'єднання відповідних множин. Суму подій *A* і *B* позначають $A \bigcup B$ або $A+B$.

Аналогічно визначається *сума довільної кількості подій* A_k, $k \in K$, – це подія, яка відбувається тоді й тільки тоді, коли відбувається принаймні одна з подій A_k, $k \in K$. *Суму скінченної кількості n* подій A_k позначають $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, а також $\sum_{k=1}^{n} A_k$.

Зауважимо, що для того, щоб одержати об'єднання (суму) двох множин *A* і *B*, потрібно до однієї з них приєднати з іншої ті елементи, яких немає в першій множині.

Геометричне тлумачення суми подій A і B подане на Рис. 1.3.1, де прямокутником зображено множину елементарних подій Ω, один з кругів – подія A, інший – подія B, заштрихована множина – подія $A+B = A \bigcup B$.

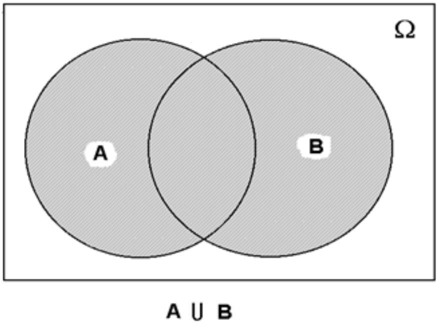


Рис 1.3.1

Приклад 1.3.1. Нехай Ω = {“1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”} – множина елементарних подій, що відповідає підкиданню кубика один раз, A = {“3”, “6”} – подія, що полягає у випаданні на верхній грані числа, кратного 3, а B = {“2”, “4”, “6”} – подія, що полягає у випаданні парного числа. Тоді $A+B = A \bigcup B$ = {“2”, “3”, “4”, “6”} – подія, яка полягає в тому, що на верхній грані кубика випаде або число, кратне 2 (відбувається подія B), або число, кратне 3 (відбувається подія A) (Рис. 1.3.2).

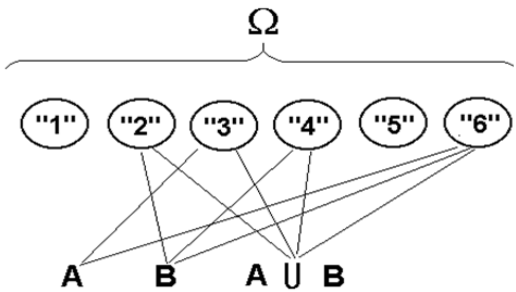


Рис. 1.3.2

Кількість елементів у множині $C = A + B$ не обов’язково дорівнює сумарній кількості елементів в множинах A і B, оскільки спільні елементи враховуються лише один раз.

Зазначимо, що кожна множина є об’єднанням (сумою) її одноелементних підмножин. Якщо у наведеному прикладі $E_i = \{i\}$, $i \in \overline{1,6}$, то

$$A = \{E_3\} + \{E_6\}, \quad B = \{E_2\} + \{E_4\} + \{E_6\},$$

$$\Omega = \{E_1\} + \{E_2\} + \{E_3\} + \{E_4\} + \{E_5\} + \{E_6\}.$$

Означення. *Добутком подій* A і B називають таку подію C, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбуваються обидві події A і B.

Це означає, що кожна елементарна подія E, що належить до множини C, належить також до обох множин A і B, тобто $E \in A$ і $E \in B$, і навпаки, якщо $E \in A$ і $E \in B$, то $E \in C$.

В теоретико-множинному тлумаченні добуткові подій A і B відповідає перетин відповідних множин, тобто сукупність елементів, що належать як до множини A, так і до множини B.

Добуток подій A і B позначають $A \bigcap B$, або $A \cdot B$ або просто AB.

Аналогічно визначається *добуток довільної кількості подій* A_k, $k \in K$, – це подія, яка відбувається тоді й тільки тоді, коли відбуваються всі події A_k, $k \in K$, при проведенні одного і того самого випробування. *Добуток скінченної кількості n подій* позначають $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$, а також $\prod\limits_{k=1}^{n} A_k$.

Зауважимо, що для того, щоб одержати перетин (добуток) двох множин A і B, слід взяти усі елементи, які належать до обох цих множин.

Геометричне тлумачення добутку подій A і B подане на Рис. 1.3.3, де заштрихована множина точок – подія $A \cdot B = A \bigcap B$.

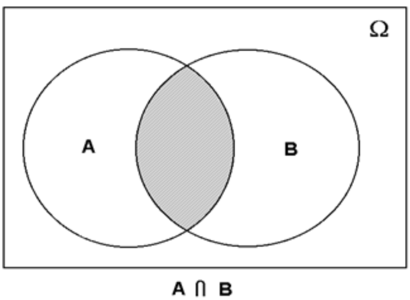


Рис. 1.3.3

Приклад 1.3.2. Нехай подія A полягає в тому, що навмання вибране ціле додатне однорозрядне число ділиться на 3, а подія B – навмання вибране однорозрядне число є парним. Елементарна подія E_i – навмання вибране однорозрядне число є i, де $i \in \{1, 2, ..., 9\}$, $(E_i = i)$.

Тоді

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},\ A = \{3, 6,\ 9\},\ B = \{2, 4, 6, 8\}.$$

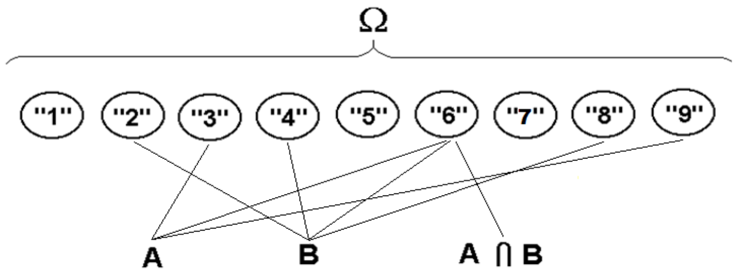


Рис. 1.3.4

Подія $C = AB$ означає, що навмання вибране число є і парне (відбувається подія B), і ділиться на 3 (відбувається подія A), тобто є число 6 (що означає, що відбуваються обидві події A і B одночасно, бо “6”$\in A$ і “6”$\in B$).

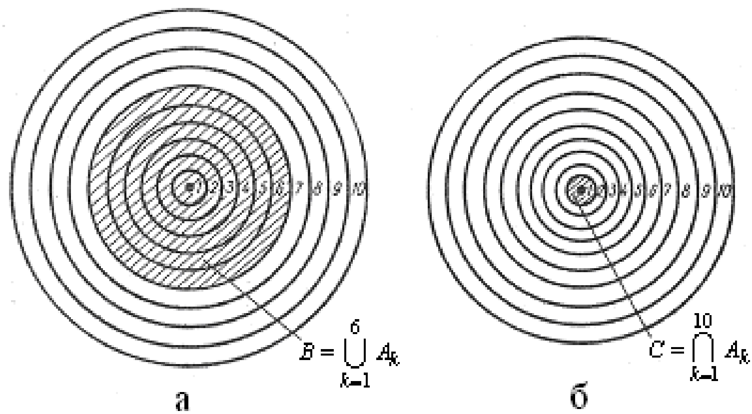


Рис. 1.3.5

Приклад 1.3.3. Мішень складається з 10 кругів, обмежених концентричними колами з радіусами r_k, $k \in \{1, 2, ..., 10\}$, причому

$r_1 < r_2 < r_3 < ... < r_{10}$. Нехай A_k – подія, яка полягає у влученні в круг з радіусом r_k. Тоді події $B = \bigcup_{k=1}^{6} A_k$ і $C = \bigcap_{k=1}^{10} A_k$ – множини, зображені відповідно на Рис. 1.3.5, а, б.

Означення. Події A і B називають *несумісними,* якщо $A \cdot B = \varnothing$, тобто якщо вони не можуть відбутися обидві при проведенні одного і того самого випробування.

Приклад 1.3.4. Якщо для Ω = {”1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”}, C = {”1”, “3”, “5”}, D = {”2”, “4”, “6”}, то C і D несумісні події, оскільки не існує елементарної події, яка належить як до множини C, так і до множини D.

Означення. *Різницею подій* A і B (A мінус B) називають таку подію C, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається подія A і не відбувається подія B.

Це означає, що кожна елементарна подія E, яка належить до множини C, належить також до множини A і не належить до множини B, і навпаки, якщо $E \in A$ і $E \overline{\in} B$, то $E \in C$. В теоретико-множинному тлумаченні різниці подій A і B відповідає різниця відповідних множин.

Різницю подій A і B (A мінус B) позначають $A \setminus B$, а також $A - B$.

Зауважимо, що для того, щоб одержати різницю множин $A \setminus B$, слід із множини A вилучити всі елементи множини B.

Геометричне тлумачення різниці подій $A \setminus B$ подано на Рис. 1.3.6, де заштрихована множина точок – подія $A \setminus B$.

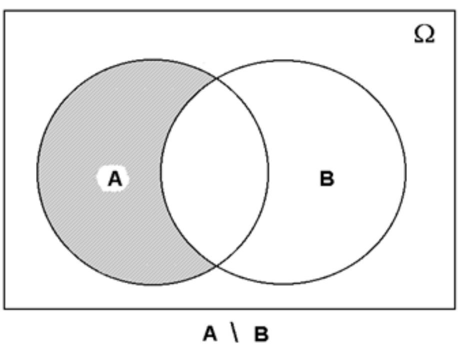


Рис. 1.3.6

Приклад 1.3.5. Серед учнів 11 класу, в якому навчається не менше п'яти спортсменів, навмання вибирається група з п'яти учнів. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що в групі не більше трьох спортсменів, B – подія, яка полягає в тому, що спортсменів не менше одного. Можливими наслідками даного випробування щодо кількості спортсменів у групі очевидно є: E_0 – 0 спортсменів, E_1 – 1 спортсмен, E_2 – 2 спортсмени, ..., E_5 – 5 спортсменів. Тоді

$$\Omega = \{E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}.$$

Подія $A \setminus B$ полягає в тому, що в групі з п'яти учнів спортсменів немає, а $B \setminus A$ – спортсменів не менше чотирьох (4 або 5) (Рис. 1.3.7).

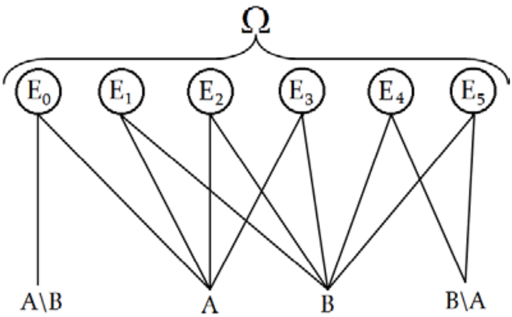


Рис. 1.3.7

Означення. *Подією, протилежною до події A*, називають різницю $\Omega \setminus A$, яку позначають $\overline{A}$.

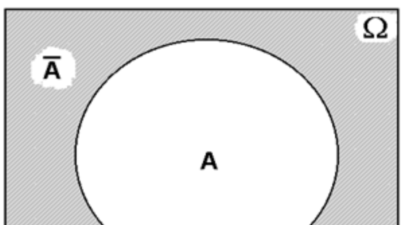


Рис. 1.3.8

Отже, подія $\overline{A}$, протилежна до події A, відбувається тоді і тільки тоді, коли не відбувається подія A. Зрозуміло, що подія A є протилежною до події $\overline{A}$. Тому події A і $\overline{A}$ називають взаємно протилежними. Очевидно, події A і $\overline{A}$ несумісні.

Геометричне тлумачення взаємно протилежних подій подано на Рис. 1.3.8, де заштрихована множина точок – подія $\overline{A}$, протилежна до події A.

Приклад 1.3.6. Якщо $\Omega = \{“1”, ”2”, ”3”, ”4”, ”5”, ”6”\}$ і $A = \{“3”, ”6”\}$ та $B = \{“2”, ”4”, ”6”\}$ – події, то $A \setminus B = \{“3”\}$ – подія, що полягає у випаданні непарного числа, кратного 3, $B \setminus A = \{“2”, ”4”\}$ – подія, що полягає у випаданні парного числа, не кратного 3. $\overline{A} = \Omega \setminus A = \{“1”, ”2”, ”4”, ”5”\}$ – подія, що полягає у випаданні числа, не кратного 3, а $\overline{B} = \Omega \setminus B = \{“1”,”3”,”5”\}$ – подія, що полягає у випаданні непарного числа (Рис. 1.3.9).

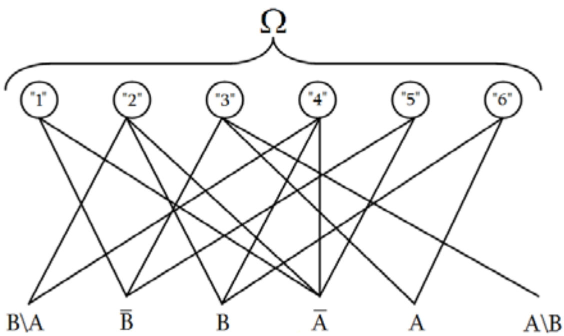


Рис. 1.3.9

Приклад 1.3.7. Нехай A подія, яка полягає в тому, що при підкиданні кубика на верхній грані випаде не менше, ніж три очка. Нехай можливими наслідками цього випробування є елементарні події $E_i = "i"$, $i \in \{1, \ldots, 6\}$, які полягають в тому, що на верхній грані випаде i очок. Тоді (Рис. 1.3.10)

$$\Omega = \{"1", "2","3","4","5","6"\}; \;\; A = \{"3","4","5","6"\}; \;\; \overline{A} = \{"1","2"\}.$$

Таким чином, тут подія $\overline{A}$ означає, що на верхній грані кубика випаде менше, ніж три очка.

Подія $\overline{\Omega}$, протилежна до вірогідної, є неможливою. Неможливій події відповідає порожня множина $\overline{\Omega} = \Omega \setminus \Omega = \varnothing$ можливих наслідків випробування. Зрозуміло, що $\overline{\varnothing} = \Omega \setminus \varnothing = \Omega$.

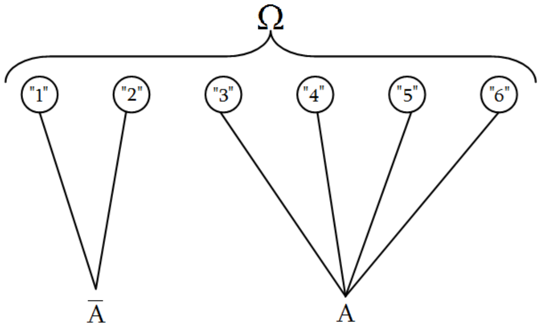


Рис. 1.3.10

Задачі

1.3.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо відбувається подія A, то відбувається подія $A+B$.
2. Якщо відбувається подія $A{\cdot}B$, то відбувається і подія A.
3. Подія $A \cdot B$ спричинює подію A.
4. Якщо $C = A - B$, то $A = C + B$.
5. $(A+B) - B = A$; $(A - B) + B = A$.
6. $A + \overline{A} = \Omega$.
7. Якщо $A = \overline{B}$, то $\overline{A} = B$, тобто події $\overline{\overline{B}}$ і B рівносильні.

1.3.2. Мішень складається з 10 кругів, обмежених концентричними колами з радіусами $r_k : r_1 < r_2 < \ldots < r_{10}$. Подія A_k полягає у влученні в круг радіуса r_k. Що означають події:

1. $B = \sum\limits_{k=1}^{6} A_k$;
2. $C = \prod\limits_{k=1}^{10} A_k$;
3. $A_{k+1} \setminus A_k$, $k \in \overline{1,9}$;
4. $A_1 \setminus A_2$;
5. $\overline{A_k}$, $k \in \overline{1, 10}$.

1.4. Властивості операцій над подіями

Нехай Ω – простір елементарних подій, $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ і $C \subset \Omega$ – довільні випадкові події, $\varnothing$ – неможлива подія. Введені *операції над подіями задовольняють такі закони*:

1. $\overline{\overline{A}} = A$ – закон подвійного заперечення.

$$\left.\begin{array}{l} 2.\ A + B = B + A \\ 3.\ AB = BA \end{array}\right\}$$ комутативні (переставні) закони додавання й множення.

$$\left.\begin{array}{l} 4.\ (A + B) + C = A + (B + C) \\ 5.\ (AB)C = A(BC) \end{array}\right\}$$ асоціативні (сполучні) закони додавання й множення.

6. $(A + B)C = AC + BC$ – перший дистрибутивний (розподільний) закон.

7. $AB + C = (A + C)(B + C)$ – другий дистрибутивний (розподільний) закон.

8. $A + A = A$.

9. $A \cdot A = A$.

10. $A + \overline{A} = \Omega$.

11. $A \cdot \overline{A} = \varnothing$.

12. $A + \Omega = \Omega$.

13. $A \cdot \Omega = A$.

14. $A + \varnothing = A$.

15. $A \cdot \varnothing = \varnothing$.

$$\left.\begin{array}{l} 16.\ \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \\ 17.\ \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \end{array}\right\}$$ – закони двоїстості (правила де Моргана).

Рівності 1–17 випливають безпосередньо з наведених вище означень.

Для прикладу розглянемо рівність 7. Геометрично цей закон можна проілюструвати так, як показано на Рис. 1.4.1, а, б.

Сумістивши ці зображення, можна впевнитися, що множини $AB + C$ і $(A + C)\ (B + C)$ співпадають.

Аналітичне доведення рівності 7 може бути таким.

Нехай E – довільна елементарна подія така, що $E \in AB + C$. Тоді справджується принаймні одне з двох – або $E \in AB$, або $E \in C$. Якщо $E \in AB$, то $E \in A$ і $E \in B$. Проте тоді $E \in A + C$ і $E \in B + C$ (за означенням суми подій), а отже $E \in (A + C)\ (B + C)$. Якщо $E \in C$, то $E \in C + A$ і $E \in C + B$, і тому $E \in (A + C)\ (B + C)$.

Таким чином, довільний елемент множини $AB + C$ належить до множини $(A + C)(B + C)$, тобто

$$(AB + C) \subset (A + C)\ (B + C).$$

Отже, подія $AB+C$ спричинює подію $(A+C)\,(B+C)$.

Нехай, навпаки, $E\in(A+C)\,(B+C)$. Це означає, що $E\in A+C$ і $E\in B+C$. Якщо $E\in C$, то $E\in C+AB$. Якщо $E\,\overline{\in}\,C$, то $E\in A$ і $E\in B$, тобто $E\in AB$, а отже $E\in AB+C$.

Таким чином, довільний елемент множини $(A+C)\,(B+C)$ є елементом множини $AB+C$, тобто $(A+C)\,(B+C)\subset AB+C$, і подія $(A+C)(B+C)$ спричинює подію $AB+C$. Звідси і з того, що $(AB+C)\subset(A+C)\,(B+C)$, слідує

$$AB+C=(A+C)\,(B+C).$$

Інші рівності 1–17 доводяться аналогічно.

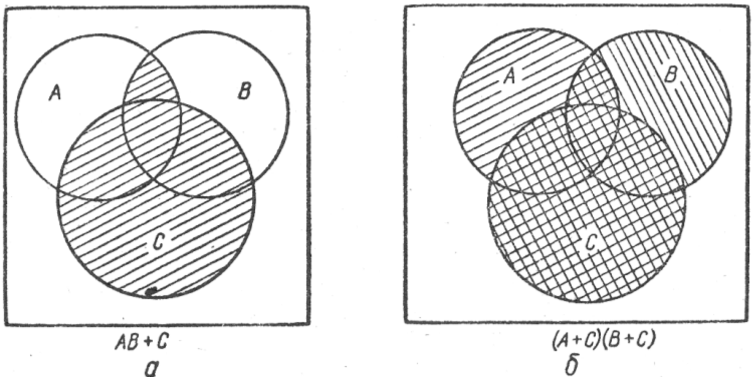


Рис. 1.4.1

Приклад 1.4.1. Для будь-яких подій $A\subset\Omega$ і $B\subset\Omega$ виконуються наступні співвідношення:

а) $AB\subset A$, $AB\subset B$, тому $\varnothing=\varnothing\cdot A\subset A$, $\varnothing=\varnothing\cdot B\subset B$;

б) $A\subset A+B,\ B\subset A+B$ (співвідношення а) і б) випливають безпосередньо з означення суми й добутку подій);

в) якщо $A\subset C$ і $B\subset C$, то й $A+B\subset C$ (співвідношення випливає з означення суми подій);

г) якщо $C\subset A$ і $C\subset B$, то $C\subset AB$ (співвідношення випливає з означення добутку подій);

д) якщо $A\subset B$, то $A+B=B,\ (A+B)\setminus A=B\setminus A$.

Справді, оскільки $A\subset B$ і $B\subset B$, то згідно із співвідношенням в) $A+B\subset B$, а згідно із співвідношенням б) $B\subset A+B$.

Таким чином, $A+B=B$, $(A+B)\setminus A=B\setminus A$. Звідси випливає також, що коли $A+B=A$, то $B\subset A$;

е) якщо $A\subset B$, то $AB=A$. Справді, згідно із співвідношенням а) $AB\subset A$, а оскільки $A\subset A$ і $A\subset B$, то згідно із співвідношенням г) $A\subset AB$. Отже $AB=A$. Звідси випливає, що якщо $AB=A$, то $A\subset B$.

Приклад 1.4.2. Довести, що $A+\overline{A}B+\overline{A+B}=\Omega$.

На основі другого дистрибутивного закону

$$A+\overline{A}B=(A+\overline{A})\ (A+B).$$

За законами 10 і 13

$$(A+\overline{A})\ (A+B)=\Omega\ (A+B)=A+B.$$

Таким чином,

$$A+\overline{A}B+\overline{A+B}=(A+\overline{A})\ (A+B)+\overline{(A+B)}=(A+B)+\overline{(A+B)}=\Omega.$$

За співвідношенням *а*) маємо

$$\varnothing=\varnothing\cdot A\subset A=A\cdot\Omega\subset\Omega \text{ і } A=A\cdot A\subset A,$$

для будь-якої підмножини A простору Ω.

Приклад 1.4.3. Довести, що з рівності $A+B=AB$ випливає, що $A=B$.

Справді, $A\subset A+B=AB\subset B$ і тому $A\subset B$. Аналогічно $B\subset A+B=AB\subset A$ і тому $B\subset A$. Отже, $A\subset B$ і $B\subset A$, тобто $A=B$.

Легко бачити, що події A_1 і $A_2\setminus(A_2\bigcap A_1)$ несумісні і $A_1\bigcup A_2=A_1\bigcup(A_2\setminus(A_2\bigcap A_1))$.

Задачі

1.4.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. $A\bigcap B=\overline{\overline{A}\bigcup\overline{B}}$. 2. $A\setminus B=A\bigcap\overline{B}$.

3. $A+B=A+\overline{A}B$. 3. $\bigcap\limits_k A_k=\overline{\bigcup\limits_k\overline{A_k}}$.

1.4.2. Довести закони двоїстості.

1.4.3. Вивести правило, за яким суму довільної кількості подій можна подати у вигляді суми попарно несумісних подій.

1.5. Простір подій. Уточнення поняття випадкової події

В п.1.2 сказано, що випадковою подією називають *деяку* (не будь-яку) підмножину простору Ω елементарних подій, що відповідає певному випробуванню.

Після введення операцій над подіями можна дещо уточнити, які підмножини простору Ω можна вважати подіями, а які не можна.

Отже, нехай Ω – простір елементарних подій, що відповідає певному випробуванню, а S – *деяка сукупність підмножин множини* Ω, що задовольняє умови:

1) $\Omega \in S$;

2) якщо $A \in S$, то і $\overline{A} \in S$;

3) якщо $A_i \in S,\ i \in \{1, 2, ..., m\}$, то $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in S$, де $I \subset \{1, 2, ..., m\}$ – довільна підмножина множини індексів 1, 2, …, *m*, *m* – деяке скінченне число.

Тоді *кожну підмножину* $A \subset \Omega$*, що належить до сукупності S, називають випадковою подією* або просто *подією* із сукупності *S*, а сукупність *S* називають *простором подій*, що відповідає даному простору Ω елементарних подій.

Таким чином, поняття події вводиться лише у зв'язку з поняттям простору подій.

Зауважимо, що $\varnothing = \overline{\Omega}$ і тому за умовами 1) і 2) $\varnothing \in S$.

Оскільки $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \overline{\bigcup\limits_{i \in I} \overline{A_i}}$, то за умовами 2) і 3) $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \in S$, коли $A_i \in S,\ \ I \subset \{1, 2, ..., m\}$. Зокрема, $A \bigcap B \in S$, коли $A \in S$ і $B \in S$, бо $A \bigcap B = \overline{\overline{A \bigcap B}} = \overline{\overline{A} \bigcup \overline{B}}$, а оскільки $\overline{A} \in S$ разом з $A \in S$, і $\overline{B} \in S$ разом з $B \in S$, то за умовою 3) $\overline{A} \bigcup \overline{B} \in S$, а за умовою 2) $\overline{\overline{A} \bigcup \overline{B}} \in S$. Враховуючи це та рівність $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$, з умови 2) дістанемо, що $A \setminus B \in S$, коли $A \in S$ і $B \in S$.

Отже, *простір S випадкових подій є замкненим відносно операцій суми*, *різниці та добутку подій*.

Приклад 1.5.1. Для будь-якої множини Ω елементарних подій покладемо $S=\{\varnothing, \Omega\}$. Тоді S задовольняє умови 1) - 3), тобто може бути простором подій (*найвужчим* з можливих), а тому можлива ситуація, коли подіями вважаються лише неможлива та вірогідна події.

Приклад 1.5.2. Якщо всі грані кубика пофарбовано в білий колір і при підкиданні кубика фіксується колір грані, якою кубик падає догори, тоді Ω={біла} містить один єдиний елемент. Тому в даному випадку простір S може складатися лише з двох елементів: $S = \{\varnothing, \Omega\}$.

Приклад 1.5.3. Для будь-якого простору Ω елементарних подій покладемо $S = \{A: A \subset \Omega\}$, тобто елементами сукупності S вважатимемо будь-які підмножини простору Ω. Тоді S задовольняє умови 1)-3), тобто може бути простором подій (*найширшим* з можливих), а тому можлива ситуація, коли подіями будуть будь-які підмножини простору Ω.

Приклад 1.5.4. Нехай Ω = {"1", "2", "3", "4", "5", "6"} – простір елементарних подій, що відповідає випробуванню – однократному підкиданню кубика. Покладемо S = {$\varnothing$, Ω, {"6"}, {"1", "2", "3", "4", "5"}}. Тоді S задовольняє умови 1)–3), тобто розглядувана сукупність S підмножин множини Ω може бути простором подій, а елементи сукупності S – подіями.

Зауважимо, що в останньому прикладі сукупність S можна визначити і інакше: наприклад, покласти S = {$\varnothing$, Ω, {"1"}, {"2", "3", "4", "5", "6"}}, або S = {$\varnothing$, Ω, {"1", "5"}, {"2", "3", "4", "6"}}, або S = {$\varnothing$, Ω, {"1", "2", "3"}, {"4", "5", "6"}}, або визначити S як у прикладі 1.5.2: $S = \{A: A \subset \Omega\}$, і т.д.

Отже, одному і тому самому простору Ω елементарних подій можуть відповідати різні простори S випадкових подій. Множина $A \subset \Omega$ залежно від обраного простору S подій може бути подією (якщо $A \in S$), а може і не бути (якщо $A \overline{\in} S$). Лише множини $\varnothing$ та Ω є подіями для будь-якого простору S випадкових подій.

Приклад 1.5.5. Нехай $\Omega = [-r; r)$ – простір елементарних подій, через які характеризуються результати спортивної вправи: положення точки падіння ядра відносно цілі (якщо $x<0$ – недоліт на відстань $(-x)$; $x > 0$ – переліт на відстань x; $x = 0$ – влучення).

Поділимо проміжок $[-r, r)$ на k проміжків $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \{1, 2, ..., k\}$, $a_0 = -r$, $a_k = r$, $a_i = a_{i-1} + \dfrac{a_k - a_0}{k}$. Розглянемо сукупність S, що містить порожню множину $\varnothing$, проміжки $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,k}$, всеможливі об'єднання проміжків $[a_{i-1}, a_i)$ по два проміжки, по три, по чотири і т.д., по $(k-1)$ проміжків, всі k проміжків $\bigcup_{i=1}^{k} [a_{k-1}, a_k) = \Omega$.

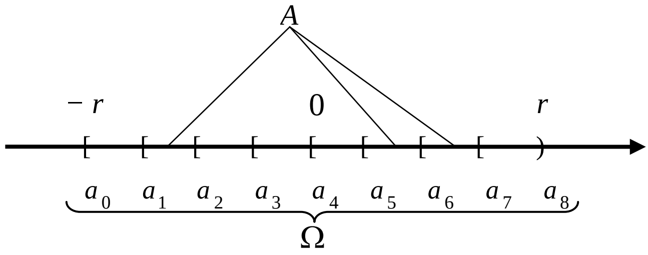


Рис. 1.5.1

Тоді сукупність S буде простором подій, оскільки така сукупність задовольняє вимоги 1_s-3_s. Цей *простір подій* називають *породженим поділом множини* $\Omega=[-r,r)$ *на підмножини* $H_i=[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,k}$. Зокрема сукупність S містить усілякі об'єднання $\bigcup\limits_{i\in I}[a_{i-1},a_i)$, $I\subset\{1,2,...,k\}$, а також перетини та різниці таких об'єднань.

На рисунку 1.5.1 показано одну із подій $A=[a_1,a_2)\cup\cup[a_5,a_6)\cup[a_6,a_7)$ із простору подій S, породженого поділом проміжка $\Omega=[-r,r)$ на вісім проміжків $[a_0,a_1)$, $[a_1,a_2)$, $[a_2,a_3)$, $[a_3,a_4)$, $[a_4,a_5)$, $[a_5,a_6)$, $[a_6,a_7)$, $[a_7,a_8)$.

Задачі

1.5.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Існує простір Ω елементарних подій, для якого існує лише один простір S випадкових подій.
2. Якщо простір Ω елементарних подій містить 2 елементи, то відповідний йому простір випадкових подій може містити 3 елементи.
3. Для множини Ω={*Г*, *Ц*} відповідний йому простір S випадкових подій може містити лише 2 або 4 елементи.
4. Сукупність S довільних підмножин множини Ω=*N* натуральних чисел може бути простором подій.
5. Сукупність S будь-яких скінченних підмножин множини Ω=*N* може бути простором подій.

1.5.2. Побудувати можливі простори S випадкових подій, що відповідають просторам Ω елементарних подій:

1. Ω – множина можливих наслідків випробування, що полягає в підкиданні монети двічі. При цьому як наслідки розглядаються:

а) однією стороною догори чи різними упала монета обидва рази?

б) кількість появ герба в обох підкиданнях;

в) усі можливі пари появ герба і цифри в обох підкиданнях.

2. Ω – множина можливих наслідків випробування, що полягає в підкиданні кубика, частина граней якого пофарбовані в білий колір, інша частина – в червоний, третя частина – в зелений. У кожній з частин є не менше однієї грані. При цьому як наслідки розглядаються :

а) колір грані, що виявилася верхньою;

б) зелений чи ні колір виявляється на верхній грані

3. Ω – множина можливих наслідків випробування, що полягає в підкиданні двічі кубика, на гранях якого нанесені цифри від 1 до 6. При цьому як наслідки розглядаються :

а) можливі суми $i + j,\ i \in \overline{1,6},\ j \in \overline{1,6}$,

б) чи виконується нерівність $i \le j,\ i \in \overline{1,6},\ j \in \overline{1,6}$,

де i – цифра, що випадає на верхній грані кубика при першому підкиданні, j – цифра, що випадає на верхній грані кубика при другому підкиданні.

1.5.3. Визначити, скільки елементів може містити простір S випадкових подій, якщо відповідний йому простір Ω елементарних подій містить:

а) один елемент, б) два елементи, в) три елементи.

1.6. Статистична ймовірність події

Нехай задано деякий простір Ω елементарних подій і один із можливих просторів S випадкових подій, пов'язаний з простором Ω елементарних подій. Розглянемо довільну подію $A \in S$. Нехай проведено серію із n випробувань, за результатами яких визначено кількість $k_n(A)$ відбувань події A.

1) Число $k_n(A)$, що дорівнює кількості тих випробувань, в яких подія A відбулася, називається *абсолютною частотою події* $A \in S$ в даній серії із n випробувань. Іншими словами, $k_n(A)$ – це кількість відбувань події A в серії із n проведених випробувань;

2) число $P_n^*(A) = \dfrac{k_n(A)}{k_n(\Omega)}$ називається *статистичною ймовірністю* або *відносною частотою події* $A \in S$ *в даній серії із* n *випробувань*.

Підкреслимо, що аргументами функцій $k_n(A)$ і $P_n^*(A)$ є підмножини простору Ω, які входять до сукупності S.

Приклад 1.6.1. Нехай простір елементарних подій $\Omega = \{Г, Ц\}$, простір подій $S=\{\varnothing, \{Г\}, \{Ц\}, \{Г, Ц\}=\Omega\}$ і подія $A_0 = \{Г\}$ – випадання герба при однократному підкиданні монети.

Припустимо, що проведено $n = 100$ підкидань монети, в результаті яких герб випадав 45 разів. Тоді $k_{100}(\{Г\})=45$, $k_{100}(\{Ц\})=100–45=55$, $k_{100}(\varnothing) = 0$, $k_{100}(\Omega) = 100$ – абсолютні частоти відповідних подій. Числа $P_{100}^*(\{Г\}) = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$, $P_{100}^*(\{Ц\}) = = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}$, $P_{100}^*(\varnothing)=0$, $P_{100}^*(\Omega) = 1$ – це статистичні ймовірності (відносні частоти) відповідних подій у даній серії із $n = 100$ підкидань монети. Зокрема $k_{100}(A_0) = 45$, $P_{100}^*(A_0) = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$.

Приклад 1.6.2. Нехай простір елементарних подій $\Omega = \{Г, Ц\}$, простір подій $S = \{\varnothing, \Omega\}$, а в серії випробувань фіксувалося лише число $k_n(\Omega)$, а тому й $k_n(\varnothing) = k_n(\Omega) - k_n(\Omega) = n - n = 0$. В даному випадку множини $A=\{Г\}$, $B=\{Ц\}$ подіями не вважаються і тому не фіксувалися кількості їх відбувань.

Отже, про абсолютні і відносні частоти відбування події A в даній серії із n випробувань можна говорити лише для будь-якої події A, що належить до даного простору S випадкових подій.

Приклад 1.6.3. Нехай підкидається кубик і простір елементарних подій $\Omega = \{"1", "2", "3", "4", "5", "6"\}$, простір S подій – сукупність будь-яких підмножин простору Ω, а подія $A_1 = \{"3", "6"\}$ – випадання при однократному підкиданні кубика числа, кратного 3. Припустимо, що проведено n=15 таких підкидань і спостерігалися такі результати:

$E_{сп\,1}$=”5”, $E_{сп\,2}$=”6”, $E_{сп\,3}$=”6”, $E_{сп\,4}$=”6”, $E_{сп\,5}$=”4”,
$E_{сп\,6}$=”3”, $E_{сп\,7}$=”5”, $E_{сп\,8}$=”2”, $E_{сп\,9}$=”6”, $E_{сп\,10}$=”4”,
$E_{сп\,11}$=”5”, $E_{сп\,12}$=”6”, $E_{сп\,13}$=”3”, $E_{сп\,14}$=”3”, $E_{сп\,15}$=”5”.

де $E_{сп\,i}$ – елементарна подія із Ω, яка була спостережена при i-му випробуванні, $i \in \overline{1,15}$.

Тоді абсолютні частоти $k_{15}(E_i)$ елементарних подій E_i =”i”, $(\{E_i\} \in S)$, $i \in \overline{1,6}$, дорівнюють:

$$k_{15}(\{E_1\}) = k_{15}(\{"1"\}) = 0, \qquad k_{15}(\{E_2\}) = k_{15}(\{"2"\}) = 1,$$
$$k_{15}(\{E_3\}) = k_{15}(\{"3"\}) = 3, \qquad k_{15}(\{E_4\}) = k_{15}(\{"4"\}) = 2,$$
$$k_{15}(\{E_5\}) = k_{15}(\{"5"\}) = 4, \qquad k_{15}(\{E_6\}) = k_{15}(\{"6"\}) = 5.$$

Тепер можна обчислити абсолютну частоту $k_{15}(A)$ для довільної події $A \in S$.

Зокрема, $k_{15}(A_1) = k_{15}(\{"3","6"\}) = k_{15}(\{"3"\}) + k_{15}(\{"6"\}) = 3 + 5 = 8$ – абсолютна частота випадання числа, кратного 3, в даній серії із n=15 підкидань кубика.

Статистична ймовірність (або відносна частота) події A_1 – це число $P_{15}^*(A_1) = \dfrac{k_{15}(A_1)}{k_{15}(\Omega)} = \dfrac{8}{15}$.

Приклад 1.6.4. Множину Ω точок мішені в шкільному тірі поділено на 11 частин (Рис. 1.6.1): H_0 – з позначкою 0, H_1 – з позначкою 1, H_2 – з позначкою 2, H_3 – з позначкою 3, H_4 – з позначкою 4, H_5 – з позначкою 5, H_6 – з позначкою 6, H_7 – з позначкою 7, H_8 – з позначкою 8, H_9 – з позначкою 9, H_{10} – з позначкою 10. Як події із сукупності S підмножин множини Ω розглядаються разом із порожньою множиною $\varnothing$ всі множини H_i, $i \in \overline{0,10}$, а також всеможливі об'єднання підмножин H_i по дві, по три, по чотири, і т.д., по дев'ять, по десять, всіх одинадцяти підмножин H_i, тобто всеможливі об'єднання типу $\bigcup\limits_{i \in I} H_i$, $I \subset \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Учень виконав із пневматичної гвинтівки 15 пострілів у вказану мішень. Результати виконання цих 15 пострілів показані на Рис. 1.6.1.

За даними, наведеними на Рис. 1.6.1, визначити кількість відбувань в даній серії із 15 пострілів:

а) події A, яка полягає в тому, що при кожному пострілові учень отримував не менше 8 очок (кількість отриманих очок дорівнює номерові підмножини $H_i \subset \Omega$, $i \in \overline{0,10}$, див. Рис. 1.6.1);
б) події B, яка полягає в тому, що кількість отримуваних очок при кожному пострілові була в межах від 6 до 9 включно;
в) події C, яка полягає в тому, що при кожному пострілові кількість отримуваних очок була непарною;
г) події D, яка полягає в тому, що при кожному пострілові

кількість отримуваних очок була парною.

Обчислити статистичні ймовірності подій A; B; C; D; $A+B$; $A+C$; $A+D$; $B+C$; $B+D$; $C+D$; AB; AC; AD; BC; BD; CD; $A\setminus B$; $A\setminus C$; $A\setminus D$; $B\setminus C$; $B\setminus D$; $C\setminus D$; $\overline{A}$; $\overline{B}$; $\overline{C}$; $\overline{D}$.

а) очевидно (див. Рис. 1.6.1), $k_{15}(A)=7$, оскільки в множину H_8 було 3 влучення, в множину H_9 – 3 влучення, в множину H_{10} – 1 влучення, тому кількість влучень в множину $A=H_8\cup H_9\cup H_{10}$, при яких отримувалось не менше 8 очок, тобто або 8, або 9, або 10, дорівнює

$$k_{15}(A)=k_{15}(H_8\cup H_9\cup H_{10})=$$
$$=k_{15}(H_8)+k_{15}(H_9)+k_{15}(H_{10})=3+3+1=7;$$

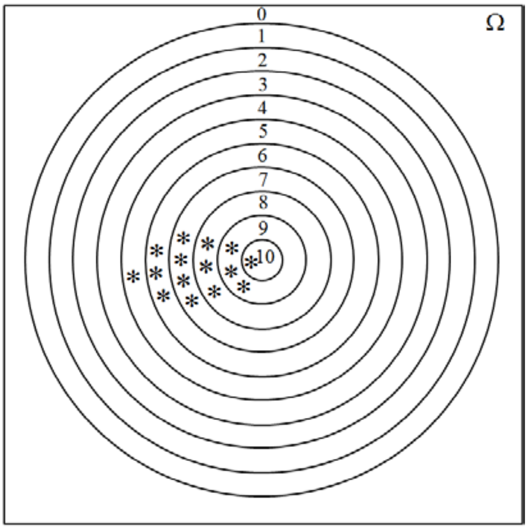


Рис. 1.6.1

б) аналогічно до попереднього одержуємо (див. Рис. 1.6.1)

$$k_{15}(B)=k_{15}(H_6\cup H_7\cup H_8\cup H_9)=$$
$$=k_{15}(H_6)+k_{15}(H_7)+k_{15}(H_8)+k_{15}(H_9)=3+4+3+3=13;$$

в) для події C одержуємо (див. Рис. 1.6.1)

$$C=H_1\cup H_3\cup H_5\cup H_7\cup H_9,$$
$$k_{15}(C)=k_{15}(H_1\cup H_3\cup H_5\cup H_7\cup H_9)=k_{15}(H_1)+k_{15}(H_3)+$$
$$+k_{15}(H_5)+k_{15}(H_7)+k_{15}(H_9)=0+0+1+4+3=8;$$

г) оскільки $D=H_2\cup H_4\cup H_6\cup H_8\cup H_{10}$, то

$$k_{15}(D) = k_{15}(H_2 \cup H_4 \cup H_6 \cup H_8 \cup H_{10}) = k_{15}(H_2) + k_{15}(H_4) +$$
$$+ k_{15}(H_6) + k_{15}(H_8) + k_{15}(H_{10}) = 0 + 0 + 3 + 3 + 1 = 7;$$

д) для статистичних ймовірностей (відносних частот подій *A*, *B*, *C*, *D*) одержуємо:

$$P_{15}^*(A) = \frac{k_{15}(A)}{k_{15}(\Omega)} = \frac{7}{15}; \; P_{15}^*(B) = \frac{k_{15}(B)}{k_{15}(\Omega)} = \frac{13}{15};$$
$$P_{15}^*(C) = \frac{k_{15}(C)}{k_{15}(\Omega)} = \frac{8}{15}; \; P_{15}^*(D) = \frac{k_{15}(D)}{k_{15}(\Omega)} = \frac{7}{15}.$$

Враховуючи означення суми, добутку, різниці подій та протилежної події, а також наведені результати, одержуємо:

$$P_{15}^*(A+B) = P_{15}^*(H_8 \cup H_9 \cup H_{10} \cup H_6 \cup H_7 \cup H_8 \cup H_9) =$$
$$= P_{15}^*(H_6 \cup H_7 \cup H_8 \cup H_9 \cup H_{10}) =$$
$$= \frac{k_{15}(H_6) + k_{15}(H_7) + k_{15}(H_8) + k_{15}(H_9) + k_{15}(H_{10})}{k_{15}(\Omega)} =$$
$$= \frac{3+4+3+3+1}{15} = \frac{14}{15};$$
$$P_{15}^*(A+C) = P_{15}^*(H_8 \cup H_9 \cup H_{10} \cup H_1 \cup H_3 \cup H_5 \cup H_7 \cup H_9) =$$
$$= P_{15}^*(H_1 \cup H_3 \cup H_5 \cup H_7 \cup H_8 \cup H_9 \cup H_{10}) =$$
$$= \frac{k_{15}(H_1) + k_{15}(H_3) + k_{15}(H_5) + k_{15}(H_7) + k_{15}(H_8) + k_{15}(H_9) + k_{15}(H_{10})}{k_{15}(\Omega)} =$$
$$= \frac{0+0+1+4+3+3+1}{15} = \frac{12}{15}.$$

Оскільки

$$A + D = H_8 \cup H_9 \cup H_{10} \cup H_2 \cup H_4 \cup H_6 \cup H_8 \cup H_{10} =$$
$$= H_2 \cup H_4 \cup H_6 \cup H_8 \cup H_9 \cup H_{10},$$

то, міркуючи аналогічно до попереднього, одержимо

$$P_{15}^*(A+D) = P_{15}^*(H_2 \cup H_4 \cup H_6 \cup H_8 \cup H_9 \cup H_{10}) =$$
$$= \frac{k_{15}(H_2) + k_{15}(H_4) + k_{15}(H_6) + k_{15}(H_8) + k_{15}(H_9) + k_{15}(H_{10})}{k_{15}(\Omega)} =$$
$$= \frac{0+0+3+3+3+1}{15} = \frac{10}{15};$$

$AB = H_8 \cup H_9$, тому

$$P_{15}^*(AB) = \frac{k_{15}(H_8 \cup H_9)}{k_{15}(\Omega)} = \frac{k_{15}(H_8) + k_{15}(H_9)}{k_{15}(\Omega)} = \frac{3+3}{15} = \frac{6}{15};$$

$AC = H_9$, тому $P_{15}^*(AC) = \dfrac{k_{15}(H_9)}{k_{15}(\Omega)} = \dfrac{3}{15}$;

$AD = H_8 \cup H_{10}$, тому

$$P_{15}^*(AD) = \frac{k_{15}(H_8 \cup H_{10})}{k_{15}(\Omega)} = \frac{k_{15}(H_8) + k_{15}(H_{10})}{k_{15}(\Omega)} = \frac{3+1}{15} = \frac{4}{15};$$

$BC = H_7 \cup H_9$, тому

$$P_{15}^*(BC) = \frac{k_{15}(H_7 \cup H_9)}{k_{15}(\Omega)} = \frac{k_{15}(H_7) + k_{15}(H_9)}{k_{15}(\Omega)} = \frac{4+3}{15} = \frac{7}{15};$$

$BD = H_6 \cup H_8$, тому

$$P_{15}^*(BD) = \frac{k_{15}(H_6 \cup H_8)}{k_{15}(\Omega)} = \frac{k_{15}(H_6) + k_{15}(H_8)}{k_{15}(\Omega)} = \frac{3+3}{15} = \frac{6}{15};$$

$CD = \varnothing$, тому $P_{15}^*(CD) = 0$;

$A \setminus B = H_{10}$, тому $P_{15}^*(A \setminus B) = \dfrac{k_{15}(H_{10})}{k_{15}(\Omega)} = \dfrac{1}{15}$;

$A \setminus C = H_8 \cup H_{10}$, тому

$$P_{15}^*(A \setminus C) = \frac{k_{15}(H_8 \cup H_{10})}{k_{15}(\Omega)} = \frac{k_{15}(H_8) + k_{15}(H_{10})}{k_{15}(\Omega)} = \frac{3+1}{15} = \frac{4}{15};$$

$A \setminus D = H_9$, тому $P_{15}^*(A \setminus D) = \dfrac{k_{15}(H_9)}{k_{15}(\Omega)} = \dfrac{3}{15}$;

$B \setminus C = H_6 \cup H_8$, тому

$$P_{15}^*(B \setminus C) = \frac{k_{15}(H_6 \cup H_8)}{k_{15}(\Omega)} = \frac{k_{15}(H_6) + k_{15}(H_8)}{k_{15}(\Omega)} = \frac{3+3}{15} = \frac{6}{15};$$

$B \setminus D = H_7 \cup H_9$, тому

$$P_{15}^*(B \setminus D) = \frac{k_{15}(H_7 \cup H_9)}{k_{15}(\Omega)} = \frac{k_{15}(H_7) + k_{15}(H_9)}{k_{15}(\Omega)} = \frac{4+3}{15} = \frac{7}{15};$$

$C \setminus D = C = H_1 \cup H_3 \cup H_5 \cup H_7 \cup H_9$, тому $P_{15}^*(C \setminus D) = P_{15}^*(C) = \dfrac{7}{15}$;

$\overline{A} = \Omega \setminus A = H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 \cup H_5 \cup H_6 \cup H_7$, тому

$$P_{15}^*(\overline{A}) = \frac{k_{15}(H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 \cup H_5 \cup H_6 \cup H_7)}{k_{15}(\Omega)} =$$

$$= \frac{k_{15}(H_0) + k_{15}(H_1) + k_{15}(H_2) + k_{15}(H_3) + k_{15}(H_4) + k_{15}(H_5) + k_{15}(H_6) + k_{15}(H_7)}{k_{15}(\Omega)} =$$

$$= \frac{0+0+0+0+0+1+3+4}{15} = \frac{8}{15};$$

$\overline{B} = \Omega \setminus B = H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 \cup H_5 \cup H_{10}$, тому

$$P_{15}^*(\overline{B}) = \frac{k_{15}(H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 \cup H_5 \cup H_{10})}{k_{15}(\Omega)} =$$

$$= \frac{k_{15}(H_0) + k_{15}(H_1) + k_{15}(H_2) + k_{15}(H_3) + k_{15}(H_4) + k_{15}(H_5) + k_{15}(H_{10})}{k_{15}(\Omega)} =$$

$$= \frac{0+0+0+0+0+1+1}{15} = \frac{2}{15};$$

$\overline{C} = \Omega \setminus C = H_0 \cup H_2 \cup H_4 \cup H_6 \cup H_8 \cup H_{10} = H_0 \cup D$, тому

$$P_{15}^*(\overline{C}) = \frac{k_{15}(H_0 \cup D)}{k_{15}(\Omega)} = \frac{k_{15}(H_0) + k_{15}(D)}{k_{15}(\Omega)} = \frac{0 + k_{15}(D)}{k_{15}(\Omega)} = P_{15}^*(D) = \frac{7}{15};$$

$\overline{D} = \Omega \setminus D = H_0 \cup H_1 \cup H_3 \cup H_5 \cup H_7 \cup H_9 = H_0 \cup C$, тому

$$P_{15}^*(\overline{D}) = \frac{k_{15}(H_0 \cup C)}{k_{15}(\Omega)} = \frac{k_{15}(H_0) + k_{15}(C)}{k_{15}(\Omega)} = \frac{0 + k_{15}(C)}{k_{15}(\Omega)} = P_{15}^*(C) = \frac{8}{15}.$$

Задачі.

1.6.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Число $k_n(A)$ може набувати будь-якого значення з проміжка $[0;\, n]$.

2. Статистична ймовірність (відносна частота) $P_n^*(A)$ події A може набувати будь-якого значення з проміжка $[0;\, 1]$.

3. Якщо $P_n^*(A) = 1$, то A – вірогідна подія.

4. Якщо $P_n^*(A) = 0$, то A – неможлива подія.

1.6.2. 1. Монету підкидали 10 разів. Якими можуть бути при цьому абсолютні і відносні частоти випадань герба і цифри?

2. Кубик, частина граней якого пофарбовані в білий колір, друга частина – у червоний колір, третя частина – у зелений колір, підкидали 5 разів. Якими при цьому можуть бути абсолютні і відносні частоти випадань на верхній грані кожного з трьох кольорів?

3. Грані кубика пофарбовані в білий, червоний, зелений, блакитний, жовтий, бузковий кольори, причому на кожній грані є лише один колір. Випробування полягає в підкиданні кубика і фіксації кольору грані, якою кубик падає догори. Якими можуть бути статистичні ймовірності випадання грані кожного кольору, якщо кубик підкидали: 1 раз? 2 рази? 3 рази? 4 рази? 5 разів? 6 разів? 7 разів? 8 разів? 9 разів? 10 разів?

4. Кубик, частина граней якого пофарбована в білий колір, друга частина – у червоний колір, третя частина – у зелений колір, підкидали 1000 разів. При цьому як результати випробувань розглядали колір верхньої грані. Виявилося, що в 1000 випробуваннях білою гранню догори кубик падав 500 разів, червоною – 300, зеленою – 200. Побудувати всі можливі простори подій, що відповідають даному експерименту, і визначити статистичні імовірності всіх подій кожного з просторів, виходячи з зазначених даних.

1.7. Властивості статистичної ймовірності

Безпосередньо з означення випливають *основні властивості статистичної ймовірності:*

$1_р$. $P_n^*(A) \geq 0, \ \ A \in S$, тобто статистична ймовірність довільної події $A \in S$ невід'ємна;

$2_р$. $P_n^*\left(\sum_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P_n^*(A_i)$, $\quad I \subset \{1, 2, ..., m\}$, коли $A_i \in S$ і $A_i A_j = \varnothing$, якщо $i \neq j$ (події A_i попарно несумісні), тобто статистична ймовірність суми довільної кількості попарно несумісних подій дорівнює сумі статистичних ймовірностей цих подій. Це так звана *властивість адитивності* статистичної ймовірності.

$3_р$. $P_n^*(\Omega) = 1,$ тобто статистична ймовірність вірогідної події дорівнює 1.

Властивості $1_р$-$3_р$ називають *основними або визначальними*. З них випливають інші важливі властивості статистичної ймовірності.

Наведемо деякі з цих властивостей:

4. $P_n^*(\overline{A}) = 1 - P_n^*(A)$. Справді, $A \cdot \overline{A} = \varnothing$ і $A + \overline{A} = \Omega$. Тому за основними властивостями $2_р$ і $3_р$ маємо:

$$P_n^*(A + \overline{A}) = P_n^*(A) + P_n^*(\overline{A}) = P_n^*(\Omega) = 1.$$

Звідси $P_n^*(\overline{A}) = 1 - P_n^*(A).$

5. $P_n^*(\varnothing) = 0$, тобто статистична ймовірність неможливої події дорівнює нулю.

Справді, оскільки $\varnothing = \overline{\Omega}$, то за властивостями 4 і $3_р$ $P_n^*(\varnothing) =$

$= P_n^*(\overline{\Omega}) = 1 - P_n^*(\Omega) = 1 - 1 = 0$.

6. Якщо $A \subset B$, то $P_n^*(B) = P_n^*(A) + P_n^*(B \setminus A)$, а тому $P_n^*(A) \le P_n^*(B)$. Зокрема $P_n^*(A) \le 1$ для будь-якої події A.

Справді, якщо $A \subset B$, то $B = A + (B \setminus A)$ і $A \cdot (B \setminus A) = \varnothing$. Тому за основними властивостями $2_р$ і $1_р$ маємо:

$$P_n^*(B) = P_n^*(A) + P_n^*(B \setminus A) \ge P_n^*(A).$$

Зокрема, якщо $B = \Omega$, то $A \subset \Omega$, і тому $P_n^*(A) \le P_n^*(\Omega) = 1$ для будь-якої події A.

7. Враховуючи властивості $1_р$ та 6, дістанемо

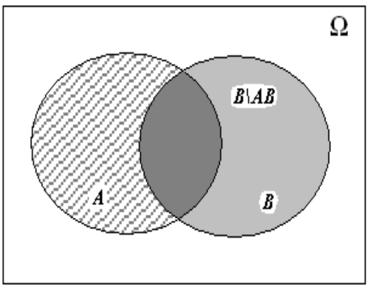
$$0 \le P_n^*(A) \le 1,$$

тобто статистична ймовірність довільної події може набувати значення лише з відрізка $[0;1]$. (Ця властивість також випливає з означення $P_n^*(A)$).

8. Для довільних подій $A \in S$, $B \in S$ має місце рівність

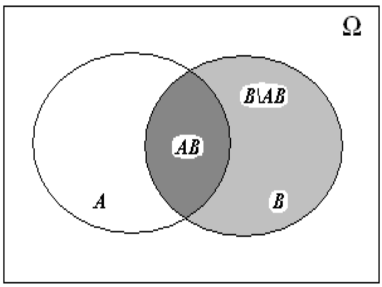
$$P_n^*(A+B) = P_n^*(A) + P_n^*(B) - P_n^*(AB).$$

Справді, подію $A+B$ можна подати у вигляді суми $A + (B \setminus AB)$ двох несумісних доданків (Рис. 1.7.1.). Подію B також можна подати у вигляді суми $AB + (B \setminus AB)$ двох несумісних доданків (Рис. 1.7.2.).



A+B=A+(B\\AB)

Рис. 1.7.1



B=AB+(B\\AB)

Рис. 1.7.2

Тому за властивістю $2_р$:

$$P_n^*(A+B) = P_n^*(A) + P_n^*(B \setminus AB), \qquad (1.7.1)$$

$$P_n^*(B) = P_n^*(AB) + P_n^*(B \setminus AB).$$

З останньої рівності випливає

$$P_n^*(B \setminus AB) = P_n^*(B) - P_n^*(AB),$$

а тому, враховуючи рівність (1.7.1), дістаємо:

$$P_n^*(A+B) = P_n^*(A) + P_n^*(B) - P_n^*(AB).$$

Задачі

1.7.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо $P_n^*(A+B) = P_n^*(A) + P_n^*(B)$, то A і B несумісні події.

2. Якщо $P_n^*(A) + P_n^*(B) = 1,$ то A і B протилежні події.

3. Якщо $P_n^*(A+B) \neq P_n^*(A) + P_n^*(B),$ то A і B сумісні події.

4. Якщо подія A спричинює подію B, то $P_n^*(A) < P_n^*(B)$.

5. Якщо $P_n^*(A) < P_n^*(B)$, то подія A спричинює подію B.

6. Для будь-яких подій $A \in S$, $B \in S$ і $C \in S$:

$$P_n^*(A+B+C) = P_n^*(A) + P_n^*(B) + P_n^*(C) -$$
$$- P_n^*(A \cdot B) - P_n^*(AC) - P_n^*(BC) + P_n^*(ABC).$$

7. Якщо $A \subset B,$ то $P_n^*(B \setminus A) = P_n^*(B) - P_n^*(A).$

1.7.2. 1. Сформулювати і довести властивості абсолютної частоти, аналогічні до властивостей статистичної ймовірності.

1.8. Ймовірнісні простори. Уточнення поняття випадкової події

Нехай Ω – деякий простір елементарних подій, і задана деяка сукупність S підмножин множини Ω, що задовольняє вимоги:

1_s. $\Omega \in S$;

2_s. Якщо $A \in S$, то і $\overline{A} \in S$;

3_s. Якщо $A_i \in S$, $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, то і $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in S$, $I \subset \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Будь-яку *задану на* S *числову функцію* $V(A)$, $A \in S$, що задовольняє вимоги:

1_v. $V(A) \geq 0$, $A \in S$;

2_v. Якщо $A_i \in S$, $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, $A_i A_j = \varnothing$, якщо $i \neq j$,

то $V\left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) = \sum\limits_{i \in I} V(A_i)$, $I \subset \{1, 2, 3, \ldots\}$,

називають *мірою, заданою на сукупності* S .

При цьому сукупність S називають *простором вимірних за* *мірою* V *множин*, кожну множину $A \in S$ називають *вимірною за мірою* V, а значення $V(A)$ називають *мірою множини* A. Якщо ж $A \subset \Omega$, але $A \overline{\in} S$, то *таку множину* A *називають невимірною відносно міри* V*, заданої на S*.

Прикладами мір можуть бути об'єми вимірних просторових фігур, площі вимірних плоских фігур, довжини вимірних лінійних фігур (зокрема об'єми многогранників та їх об'єднань, площі многокутників та їх об'єднань, довжини відрізків та їх об'єднань), кількості елементів в підмножинах даної скінченної множини, кількості попадань у певні підмножини деякої множини, з якої елементи вибираються навмання, маси фізичних тіл та їх об'єднань тощо.

Якщо $V(\Omega) = 1$, тоді міру V називають *ймовірнісною мірою* або *ймовірністю, визначеною на сукупності* S *підмножин множини* Ω.

Таким чином, ймовірнісна міра (ймовірність) $P(A)$, визначена на сукупності S, повинна задовольняти вимоги (мати властивості):

1_p. $P(A) \geq 0$, $A \in S$;

2_p. Якщо $A_i \in S$, $i \in \{1,2,3,\ldots\}$, $A_i A_j = \varnothing$, якщо $i \neq j$, то

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i),\ I \subset \{1,2,3,\ldots\}.$$

3_p. $P(\Omega) = 1$;

Якщо задано простір елементарних подій Ω, сукупність S підмножин множини Ω, що задовольняє вимоги 1_s–3_s, і на цій сукупності визначена числова функція $P(A)$, що задовольняє вимоги 1_p–3_p, тоді говорять, що задано *ймовірнісний простір* (Ω, S, P).

При цьому *елементи множини* Ω *називаються елементарними подіями, елементи сукупності* S *– подіями, а числа* $P(A)$, $A \in S$, *– ймовірностями подій* A.

Властивості 1_p-3_p функції $P(A)$, $A \in S$, називаються *основними* чи *визначальними*. З них випливають і інші важливі властивості ймовірнісної міри $P(A)$.

Властивість 2_p називають *властивістю повної адитивності функції* $P(A)$.

Будь-яку числову функцію $P(A)$, $A \in S$, *що задана на просторі подій* S *і задовольняє вимоги* 1_p-3_p, *називають ймовірнісною мірою* *(або просто ймовірністю) подій* $A \in S$.

Вимоги (властивості) 1_s-3_s, 1_p-3_p називають *системою аксіом теорії ймовірностей* (системою аксіом А.М. Колмогорова).

Зауважимо, що якщо міра $V(A)$, $A \in S$, задовольняє вимоги $0 < V(\Omega) < \infty$, тоді функція $\tilde{V}(A)$ від множин $A \in S$, що визначається за рівністю

$$\tilde{V}(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)},\ A \in S ,$$

буде ймовірнісною мірою, оскільки задовольняє вимоги 1_p-3_p. Зокрема $\tilde{V}(\Omega) = 1$.

Таку функцію $\tilde{V}(A)$ від множин $A \in S$ називають *нормованою мірою, що отримується нормуванням міри* $V(A)$, *заданої на S*.

Легко бачити, що статистична ймовірність (відносна частота) $P_n^*(A)$, $A \in S$, визначена на сукупності S підмножин множини Ω, є ймовірнісною мірою (оскільки задовольняє вимоги 1_p-3_p).

Зауважимо, що $P_n^*(A)$, $A \in S$, є *нормованою мірою, одержаною нормуванням міри* $k_n(A)$, заданої на *S*:

$$P_n^*(A) = \frac{k_n(A)}{k_n(\Omega)},\ A \in S ,$$

причому міра $k_n(A)$, $A \in S$, задовольняє вимоги $0 \le k_n(A) < \infty$ для всіх $A \in S$, зокрема $1 \le k_n(\Omega) = n < \infty$, $P_n^*(\Omega) = \dfrac{k_n(\Omega)}{k_n(\Omega)} = 1$.

Зауважимо також, що $P_n^*(A) = \dfrac{k_n(A)}{k_n(\Omega)}$, $A \in S$, є часткою від кількості $k_n(\Omega) = n \ge 1$ точок, вибраних із множини Ω в результаті серії із n проведених випробувань, яка припадає на множину $A \subset \Omega$, $A \in S$, тобто $k_n(\Omega) \cdot P_n^*(A) = k_n(A)$, $A \subset \Omega$, $A \in S$.

Очевидно, $P_n^*(A) = \dfrac{k_n(A)}{k_n(\Omega)}$ може набувати лише значень $0 = \dfrac{0}{n}, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{n}{n} = 1$ в межах від 0 до 1 – найменшого, коли серед точок, вибраних із множини Ω в результаті серії із *n* випробувань, $n \ge 1$, $k_n(\Omega) = n$, не виявилося жодної, яка належить до множини *A*, тобто $k_n(A)=0$, $P_n^*(A)=\frac{k_n(A)}{k_n(\Omega)}=\frac{0}{n}=0$, і найбільшого, коли серед точок, вибраних із множини Ω в серії із n випробувань, $n\geq 1$, $k_n(\Omega)=n$, всі вибрані точки належать до множини *A*, тобто $k_n(A)=n$, $P_n^*(A)=\frac{k_n(A)}{k_n(\Omega)}=\frac{n}{n}=1$.

Якщо, наприклад, проведено лише одне випробування, тобто $n=1$, і вибрано точку $E\in A$, $A\subset\Omega$, $A\in S$, тоді $k_n(\Omega)=1$, $k_n(A)=1$, $P_n^*(A)=\frac{k_n(A)}{k_n(\Omega)}=\frac{1}{1}=1$, $n=1$.

Якщо при цьому розглядається інша подія $B\subset\Omega$, $B\in S$, і вибрана точка *E* не належить до множини *B*, тобто $E\,\overline{\in}\,B$, а значить $E\in\overline{B}$, тоді $k_n(B)=0$, $k_n(\overline{B})=1$, $P_n^*(B)=\frac{k_n(B)}{k_n(\Omega)}=\frac{0}{1}=0$, $P_n^*(\overline{B})=\frac{k_n(\overline{B})}{k_n(\Omega)}=\frac{1}{1}=1$, $n=1$.

На практиці як правило проводять досить довгу серію випробувань для того, щоб за її результатами можна було робити більш або менш точні і надійні прогнози на майбутнє стосовно відбування деякої події *A*. Однак для теоретичних досліджень властивостей статистичної ймовірності $P_n^*(A)$ як ймовірнісної міри, заданої на деякій сукупності *S* підмножин множини Ω, що задовольняє вимоги 1_s-3_s, довжина серії випробувань не має ніякого значення, важливо лише, щоб виконувалась умова $1\leq n<\infty$.

Приклад 1.8.1. Нехай дуже велику кількість разів проводили випробування – підкидання кубика, в результаті кожного з яких навмання вибирався один елемент із множини $\Omega=\{"1","2","3","4","5","6"\}$. Нехай, разом з тим, повідомлено лише, що за результатами цих випробувань виявилося $P_n^*(\{"6"\})=0.60$, $P_n^*(\{"5"\})=0.30$. Тоді за наведеними даними можна побудувати один із можливих просторів подій, для всіх елементів якого буде визначено статистичну ймовірність (ймовірнісну міру), слідуючим чином. Розглянемо підмножину множини Ω, яка є доповненням множини $\{"5"\}\bigcup\{"6"\}$ до множини Ω, тобто множину $\Omega\setminus(\{"5"\}\bigcup\{"6"\})=\{"1","2","3","4"\}$.

Введемо позначення: $H_1 = \{"1","2","3","4"\}$, $H_2 = \{"5"\}$, $H_3 = \{"6"\}$. Очевидно $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $H_1 + H_2 + H_3 = \Omega$, тобто підмножини H_1, H_2, H_3 утворюють поділ множини Ω на підмножини, що попарно не перетинаються.

Розглянемо таку сукупність S підмножин множини $\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\}$:

$$S = \{\varnothing,\ H_1\ ,H_2\ ,H_3\ ,H_1 + H_2\ ,H_1 + H_3\ ,H_2 + H_3\ ,H_1 + H_2 + H_3 = \Omega\} =$$

$$= \{\varnothing, \{"1","2","3","4"\}, \{"5"\}, \{"6"\}, \{"1","2","3","4","5"\},$$

$$\{"1","2","3","4","6"\}, \{"5","6"\}, \{"1","2","3","4","5","6"\} = \Omega\}.$$

Очевидно, ця сукупність S задовольняє вимоги 1_s-3_s. В подібних випадках говорять, що сукупність S породжена поділом множини Ω на підмножини H_1, H_2, H_3. Очевидно також, що $P_n^*(A)$ визначена на всіх елементах сукупності S:

$$P_n^*(\varnothing) = 0;\ P_n^*(\{"1","2","3","4"\}) = P_n^*(\overline{\{"5"\} \bigcup \{"6"\}}) =$$

$$= 1 - P_n^*(\{"5"\} \bigcup \{"6"\}) = 1 - (0.30 + 0.60) = 0.10\ ;\ P_n^*(\{"5"\}) = 0.30\ ;$$

$$P_n^*(\{"6"\}) = 0.60\ ;\ P_n^*(\{"1","2","3","4","5"\}) = 0.40\ ;$$

$$P_n^*(\{"1","2","3","4","6"\}) = 0.70\ ;\ P_n^*(\{"5","6"\}) = 0.90\ \ ;$$

$$P_n^*(\{"1","2","3","4","5","6"\}) = 1,$$

і задовольняє вимоги 1_p-3_p.

Тому в розглянутому випадку сукупність S є простором подій (вимірних за мірою $P_n^*(A)$ підмножин множини Ω), а трійка $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$ є ймовірнісним простором.

Разом з тим підмножини, наприклад, $\{"1","2"\}$, $\{"1","3","5"\}$, $\{"2","4","6"\}$, і деякі інші підмножини множини $\Omega = \{"1","2","3",$ $"4","5","6"\}$ виявляються невимірними відносно розглянутої міри $P_n^*(A)$, $A \in S$, і тому такі підмножини не включені до простору подій S, вони не вважаються подіями.

Приклад 1.8.2. Нехай Ω – скінченна множина точок x_i з відрізка $[0,1]$, причому $x_i = x_{i-1} + h$, $x_0 = 0$, $h = 10^{-1000000}$, $i \in \{1,\ 2,\ \dots,\ 10^{1000000}\}$. Тоді (як і у випадку неперервної множини Ω типу $\Omega = [a, b)$), на практиці швидше за все недоцільно розглядати всі підмножини розглянутої скінченної множини Ω. У подібних випадках доцільно множину Ω поділити на деяку практично прийнятну кількість k підмножин H_i таких, що $H_i H_j = \varnothing$, якщо $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$, і як події разом з $\varnothing$ розглядати лише всілякі об'єднання підмножин H_i. Визначивши статистичні ймовірності $P_n^*(H_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, для довільної події $A = \bigcup_{i \in I} H_i \in S$, $I \subset \{1,2,\ldots,k\}$, будемо мати $P_n^*(A) = \sum_{i \in I} P_n^*(H_i)$.

При цьому сукупність S подій (підмножин множини Ω) може містити неможливу подію $\varnothing$, усі події H_i, усі суми виду $H_i + H_j$ по дві події, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $i \neq j$, усі суми виду $H_i + H_j + H_l$ по три події, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $l \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $i \neq j \neq l$, усі суми по чотири події H_i, усі суми по п'ять подій H_i, і т.д., усі суми по $(k-1)$ подій H_i, суму всіх k подій H_i, тобто $H_1 + H_2 + \ldots + H_k = \Omega$. Очевидно, так побудована (породжена поділом множини Ω на підмножини H_1, H_2, …, H_k) сукупність S підмножин множини Ω задовольняє вимоги 1_s-3_s, а так введена ймовірнісна міра $P_n^*(A)$ задовольняє вимоги 1_p-3_p. У такий спосіб побудовано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*).

Якщо події H_i розглядати як єдино можливі наслідки випробування, тоді по суті вводиться новий простір $\tilde{\Omega}$ елементарних подій $\tilde{\Omega} = \{H_1, H_2, \ldots, H_k\}$ і відповідно новий ймовірнісний простір $(\tilde{\Omega}, S, P_n^*)$.

У розглянутому прикладі множину Ω можна поділити, наприклад, на 10 підмножин H_i у такий спосіб:

$H_1 = \{x_i \mid 0 \le x_i < 0.1\}$, $\qquad H_2 = \{x_i \mid 0.1 \le x_i < 0.2\}$,

$H_3 = \{x_i \mid 0.2 \le x_i < 0.3\}$, $\qquad H_4 = \{x_i \mid 0.3 \le x_i < 0.4\}$,

$H_5 = \{x_i \mid 0.4 \le x_i < 0.5\}$, $\qquad H_6 = \{x_i \mid 0.5 \le x_i < 0.6\}$,

$H_7 = \{x_i \mid 0.6 \le x_i < 0.7\}$, $\qquad H_8 = \{x_i \mid 0.7 \le x_i < 0.8\}$,

$H_9 = \{x_i \mid 0.8 \le x_i < 0.9\}$, $\qquad H_{10} = \{x_i \mid 0.9 \le x_i \le 1.0\}$.

Можливі і інші поділи множини Ω на підмножини, які попарно не перетинаються. Наприклад, $\tilde{H}_1 = H_1 + H_2$, $\tilde{H}_2 = H_3 + H_4$, $\tilde{H}_3 = H_5 + H_6$, $\tilde{H}_4 = H_7 + H_8$, $\tilde{H}_5 = H_9 + H_{10}$ і т.п.

Задачі

1.8.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Поняття міри множини узагальнює поняття кількості елементів у множині, довжини лінійної множини, площі плоскої фігури, об'єму тіла, маси тіла.
2. Міру можна задати на будь-якій сукупності множин.
3. Абсолютна частота $k_n(A)$ події A, $A \in S$, є мірою, заданою на S.
4. Статистична ймовірність є ймовірнісною мірою.
5. Кожна ймовірнісна міра є статистичною ймовірністю.
6. Для того, щоб задати ймовірнісну міру $P_n^*(A), A \in S$, потрібно спочатку задати простір подій S.
7. Для того, щоб задати простір подій S, потрібно спочатку задати ймовірнісну міру на деяких підмножинах $A \subset \Omega$.

1.8.2. Нехай $\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\}$, і відомі відносні частоти $P_n^*(\{"5","6"\}) = 0.70;$ $P_n^*(\{"1","2","3","4"\}) = 0.30$. Чи буде трійка $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$ ймовірнісним простором, якщо:

а) $S = \{\varnothing, \{"1","2","3","4"\}, \{"5","6"\}, \Omega\}$?

б) $S = \{\varnothing, \Omega\}$?

в) $S = \{\varnothing, \{"5","6"\}, \Omega\}$?

г) $S = \{\varnothing, \{"1","2"\}, \{"3","4","5","6"\}, \Omega\}$?

д) $S = \{\{"1"\}, \{"2"\}\}$?

1.8.3. Нехай задано деяку множину Ω елементарних подій і ймовірнісну міру $P_n^*(A)$ для деякого $A \subset \Omega$. Побудувати ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), для якого $A \in S$. Скільки просторів подій можна побудувати за заданих умов?

1.8.4. Нехай задано деяку множину Ω і ймовірнісні міри $P_n^*(H_1)$, $P_n^*(H_2)$, $P_n^*(H_3)$ деяких підмножин H_1, H_2, H_3 множини Ω, таких, що $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$. Побудувати всі можливі ймовірнісні простори (Ω, S, P_n^*) за заданих умов.

1.9. Побудова ймовірнісного простору

При побудові ймовірнісного простору трійку $(\Omega,\ S,\ P)$ можна вважати ймовірнісним простором, якщо *множина* Ω, *сукупність*

S і ймовірнісна міра $P(A)$ узгоджені.

Це означає, що функція $P(A)$ повинна бути визначена для кожного $A \in S$, сукупність S підмножин множини Ω повинна задовольняти вимоги 1_s-3_s, а функція $P(A)$ – вимоги 1_p-3_p. Якщо ж хоч одна із зазначених вимог не виконується, тоді слід продовжити дії щодо побудови ймовірнісного простору.

Наприклад, якщо функція $P(A)$ визначена не на всіх $A \in S$, то тоді необхідно або довизначити функцію $P(A)$ на всіх $A \in S$ (продовжити міру $P(A)$ на всю сукупність S), або ж вилучити із сукупності S всі її елементи $A \in S$, для яких $P(A)$ не визначена, і залишивши лише такі $A \in S$, для яких $P(A)$ визначена, побудувати на їх основі нову сукупність S_1 таку, яка буде задовольняти вимоги 1_s-3_s, і крім того $P(A)$ буде визначена на всіх елементах $A \in S_1$ і буде задовольняти вимоги 1_p-3_p.

Множини $A \subset \Omega$, для яких міра $P(A)$ не визначена, називаються *невимірними* відносно міри $P(A)$, заданої на S. Відповідно множини $A \subset \Omega$, для яких $P(A)$ визначена, називаються *вимірними* відносно міри $P(A)$, заданої на S.

Невимірні (*відносно міри $P(A)$*) *підмножини $A \subset \Omega$ множини Ω не розглядаються як події* (не вважаються подіями), *а до простору подій S включають лише вимірні* (*відносно міри $P(A)$*) *підмножини множини Ω.*

Приклад 1.9.1. Нехай Ω ={“1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”} і нехай $H_1 = \{"1","2","3"\}$, $H_2 = \{"4"\}$, $H_3 = \{"5"\}$, $H_4 = \{"6"\}$. Тоді $H_i H_j = \varnothing$, якщо $i \neq j$, $H_1 + H_2 + H_3 + H_4 = \Omega$.

Розглянемо таку сукупність S_1 підмножин множини Ω:

$$S_1 = \{\varnothing, H_1, H_2, H_3, H_4, H_1+H_2, H_1+H_3, H_1+H_4, H_2+H_3, H_2+H_4, H_3+H_4,$$
$$H_1+H_2+H_3, H_1+H_2+H_4, H_1+H_3+H_4, H_2+H_3+H_4, H_1+H_2+H_3+H_4=\Omega\} =$$
$$= \Big\{ \varnothing, \{"1","2","3"\}, \{"4"\}, \{"5"\}, \{"6"\}, \{"1","2","3","4"\}, \{"1","2","3","5"\},$$
$$\{"1","2","3","6"\}, \{"4","5"\}, \{"4","6"\}, \{"5","6"\}, \{"1","2","3","4","5"\},$$
$$\{"1","2","3","4","6"\}, \{"1","2","3","5","6"\}, \{"4","5","6"\},$$
$$\{"1","2","3","4","5','6"\} \Big\}.$$

Очевидно ця сукупність S_1 (породжена поділом множини Ω на підмножини H_1, H_2, H_3, H_4) задовольняє вимоги 1_s-3_s. Разом з тим, якщо задано лише $P_n^*(\{"6"\}) = 0.6$, $P_n^*(\{"5"\}) = 0.3$, тоді можна однозначно визначити $P_n^*(A)$ для A із сукупності подій

$$S = \{\varnothing, \{"1","2","3","4"\}, \{"5"\}, \{"6"\}, \{"1","2","3","4","5"\},$$
$$\{"1","2","3","4","6"\}, \{"5","6"\}, \{"1","2","3","4","5","6"\}\}$$

Таким чином P_n^* і S узгоджені. Разом з тим, ймовірнісна міра $P_n^*(A)$ виявляється неузгодженою із сукупністю S_1, оскільки неможливо однозначно визначити статистичні ймовірності попадання в підмножини $\{"1","2","3"\}$, $\{"4"\}$, $\{"1","2","3","5"\}$, $\{"4","5"\}$, $\{"1","2","3","6"\}$, $\{"4","6"\}$, $\{"4","5","6"\}$, ці підмножини виявляються невимірними відносно так заданої ймовірнісної міри. Якщо при цьому в доповнення до попереднього повідомлено, що відносна частота попадання в множину $\{"4"\}$ дорівнює, наприклад, 0.06, а в множину $\{"1","2","3"\}$ – 0.04, то тоді одержуємо нову функцію $\tilde{P}_n^*(A)$, $A \in S_1$, визначену на всіх елементах S_1. Зокрема,

$$\tilde{P}_n^*(\{"1","2","3"\}) = 0.04 \quad \tilde{P}_n^*(\{"4"\}) = 0.06,$$
$$\tilde{P}_n^*(\{"1","2","3","5"\}) = 0.34, \quad \tilde{P}_n^*(\{"4","5"\}) = 0.36,$$
$$\tilde{P}_n^*(\{"1","2","3","6"\}) = 0.64, \quad \tilde{P}_n^*(\{"4","6"\}) = 0.66,$$
$$\tilde{P}_n^*(\{"4","5","6"\}) = 0.96,$$

а на елементах сукупності $S \subset S_1$

$$\tilde{P}_n^*(A) = P_n^*(A), \text{ коли } A \in S.$$

Таким чином ймовірнісна міра $\tilde{P}_n^*(A)$ є продовженням ймовірнісної міри $P_n^*(A)$ із сукупності S на сукупність $S_1 \supset S$.

Разом з тим, якщо немає ніяких коректних міркувань щодо того, як слід продовжувати міру $P_n^*(A)$ із сукупності S на сукупність S_1, тоді слід із сукупності S_1 вилучити всі підмножини множини Ω, невимірні відносно міри $P_n^*(A)$, для того, щоб мати можливість побудувати сукупність S вимірних відносно міри $P_n^*(A)$ підмножин множини Ω, яка буде задовольняти вимоги 1_s-3_s, і в такий спосіб побудувати ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*).

Наприклад, якщо задані міри $P_n^*(H_i)$ множин H_1, H_2, …, H_k таких, що $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$, тоді можна побудувати сукупність S вимірних за мірою P_n^* підмножин множини Ω, включивши до S разом з $\varnothing$ всеможливі об'єднання множин H_i по одному, по два, по три і т.д., по $k-1$, всіх k доданків. Очевидно, така сукупність S (породжена поділом множини Ω на підмножини H_1, H_2, …, H_k) задовольнятиме вимоги 1_s-3_s і на всіх елементах такої сукупності буде визначена міра P_n^*.

Слід підкреслити, що за заданих в прикладі 1.9.1 умов існує багато різних продовжень міри P із сукупності S на сукупність S_1.

Зауважимо, що коли множина Ω елементарних подій скінченна, $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_k\}$, і визначені статистичні ймовірності $P_n^*(\{E_i\})$, $i \in \{1, 2, ..., k\}$, то тоді числа $P_n^*(A) = \sum\limits_{E_i \in A} P_n^*(\{E_i\})$ виявляються визначеними для будь якого $A \subset \Omega$.

Зауважимо також, що до сукупності S не обов'язково повинні входити всі множини H_i, всі суми $H_i + H_j$, $i \neq j$, по два доданки, всі суми по три доданки і т.д. Важливо лише, щоб задовольнялися вимоги 1_s-3_s стосовно сукупності S, і щоб для кожного $A \in S$ була визначена ймовірнісна міра $P_n^*(A)$.

Приклад 1.9.2. Нехай для деяких $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $AB = \varnothing$, задано $P_n^*(A)$ і $P_n^*(B)$. Тоді оскільки

$$\overline{A+B} = \overline{A}\overline{B},\ A + B + \overline{A}\overline{B} = \Omega,\ A \cdot \overline{A}\overline{B} = \varnothing,\ B \cdot \overline{A}\overline{B} = \varnothing,$$

$$P_n^*(\overline{A}\overline{B}) = 1 - P_n^*(A+B) = 1 - P_n^*(A) - P_n^*(B),$$

можна побудувати сукупність

$$S = \{\varnothing, A, B, \overline{A}\overline{B}, A+B, A+\overline{A}\overline{B}, B+\overline{A}\overline{B}, A+B+\overline{A}\overline{B} = \Omega\}$$

підмножин множини Ω, яка задовольняє вимоги 1_s-3_s, і в такий спосіб буде отримано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*).

Це означає, що ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) можна побудувати і тоді, коли задано $P_n^*(H_i)$ для деякої кількості k підмножин H_i із множини Ω таких, що $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, але не обов'язково $\bigcup\limits_{i=1}^{k} H_i = \Omega$, бо легко визначити ймовірнісну міру

$P_n^*\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{k} H_i}\right) = 1 - \sum_{i=1}^{k} P_n^*(H_i)$ доповнення множини $\bigcup_{i=1}^{k} H_i$ до множини Ω, тобто отримати поділ множини Ω на підмножини H_1, H_2, …, H_k, $\overline{\bigcup_{i=1}^{k} H_i}$, які не перетинаються, і для всіх із яких визначено ймовірнісну міру P_n^*. На основі цього поділу легко побудувати деяку сукупність S підмножин множини Ω, яка задовольнятиме вимоги 1_S-3_S і на всіх елементах якої буде визначена ймовірнісна міра P_n^*.

Таким чином, остаточно сказати, які саме підмножини A множини Ω вважаються подіями, можна лише після того, як побудовано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*).

Задачі

1.9.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} H_i$, $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, і всі H_i включено до простору подій *S*, тоді до *S* входять Ω, $\varnothing$ і всеможливі об'єднання $\bigcup_{i \in I} H_i$, $I \subset \{1, 2, ..., k\}$.

2. Якщо сукупність S підмножин $A \subset \Omega$ входить у простір подій S_1, тобто $S \subset S_1$, і на S_1 задана ймовірнісна міра $P_n^*(A)$, $A \in S_1$, то (Ω, S, P_n^*) ймовірнісний простір.

3. Якщо (Ω, S, P_n^*) – ймовірнісний простір, то ймовірнісна міра $P_n^*(A)$ визначена для довільного $A \subset \Omega$.

1.9.2. 1. Задано $\Omega = \{“1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”\}$ і $P_n^*(\{“1”, “3”, “5”\}) = 0.5$, $P_n^*(\{“1”, “4”, “6”\}) = 0.5$. Чи можливо за заданих умов побудувати якийсь ймовірнісний простір? Якщо так, то скільки і які саме?

2. Задано простір елементарних подій Ω, підмножини $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $C \subset \Omega$, такі що $B \subset A$, $C \subset A$, $BC = \varnothing$. Крім того задано $P_n^*(A)$, $P_n^*(B)$, $P_n^*(C)$. Побудувати всі можливі ймовірнісні простори за заданих умов.

1.10. Умовна статистична ймовірність. Статистична ймовірність добутку подій.

Нехай Ω – простір елементарних подій, S – деякий простір подій, що відповідає Ω.

Хай проведено n випробувань, в яких спостерігалися події $A \in S$ і $B \in S$, і нехай $m_B \neq 0$ – число випробувань, в яких відбулася подія B. Серед цих m_B випробувань подія A відбувається тоді, коли відбуваються елементарні події, які належать як до множини A, так і до множини B, тобто до множини AB. Нехай m_{AB} – число випробувань, в яких відбулася подія AB. Тоді відносна частота відбування події A серед тих випробувань, коли відбувалася подія B, дорівнює

$$\frac{m_{AB}}{m_B} = \frac{m_{AB}/n}{m_B/n} = \frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)} .$$

Цю величину називають *умовною статистичною ймовірністю події A за умови, що подія B мала місце*, і позначають через $P_n^*(A/B)$. При цьому $P_n^*(A) = P_n^*(A/\Omega)$ називають *безумовною статистичною ймовірністю події A*.

Зауважимо, що умовна статистична ймовірність

$$P_n^*(A/B) = \frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}$$

є нормованою мірою підмножин AB множини B, одержаною нормуванням міри $P_n^*(AB)$, $AB \subset B$, $A \in S$, $B \in S$. Міра $P_n^*(A/B)$ очевидно, задовольняє вимоги

$$0 \le P_n^*(A/B) \le 1,$$

зокрема $P_n^*(B/B) = \dfrac{P_n^*(B)}{P_n^*(B)} = 1$.

Якщо в механічній інтерпретації $P_n^*(B)$ – це маса, що припадає на множину B, а $P_n^*(AB)$ – маса, що припадає на множину AB, то $\dfrac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}$ – частка від маси, що є у множині B, яка припадає на множину A. $P_n^*(A/B) = \dfrac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}$ є також часткою від кількості попадань у множину *B*, яка припадає на множину *A*, тобто на *AB*.

З означення умовної статистичної ймовірності:

$$P_n^*(A/B) = \frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)} \tag{1.10.1}$$

випливає, що

$$P_n^*(AB) = P_n^*(B)\, P_n^*(A/B)\,.$$

Звідси, враховуючи, що $AB = BA$, дістанемо також рівність:

$$P_n^*(AB) = P_n^*(A) P_n^*(B/A)\,. \tag{1.10.2}$$

Приклад 1.10.1. Кубик підкидали дуже велику кількість n разів. При цьому виявилось, що відносна частота випадання на верхній грані кубика цифри “1” дорівнює 0.01, цифри “2” – 0.02, цифри “3” – 0.03, цифри “4” – 0.04, цифри “5” – 0.30, цифри “6” – 0.60.

Позначимо можливі наслідки (елементарні події) “*i*” через E_i, $i \in \{1, 2, ..., 6\}$. Тоді простір елементарних подій $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$. Як події розглядатимемо будь які підмножини множини Ω, тобто розглянемо простір S подій, який містить події $\varnothing$ і Ω, всі одноелементні підмножини множини Ω, всі двохелементні, всі триелементні, всі чотириелементні, всі п’ятиелементні підмножини множини Ω. Нехай подія A полягає в тому, що на верхній грані кубика випадає парна цифра, B – непарна цифра, C – одна із цифр “4”, ”5”, ”6”, D – одна із цифр “1”, ”2”, ”3”, ”4” (Рис. 1.10.1).

Враховуючи заданий *розподіл статистичних ймовірностей на множині* Ω *елементарних подій*:

E_i	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
$P_n^*(\{E_i\})$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.30	0.60

та формулу $P_n^*(A) = \sum\limits_{E_i \in A} P_n^*(\{E_i\})$, для розглядуваних подій *A*, *B*, *C*, *D* дістанемо:

$$P_n^*(A) = 0.66,\;\; P_n^*(B) = 0.34,\;\; P_n^*(C) = 0.94,\;\; P_n^*(D) = 0.10.$$

Оскільки $AB = \varnothing$, $AC = \{E_4, E_6\}$, $AD = \{E_2, E_4\}$, то за формулою (1.10.1) для умовних статистичних ймовірностей матимемо:

$$P_n^*(A/B)=\frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}=\frac{P_n^*(\varnothing)}{P_n^*(\{E_1,\ E_3,E_5\})}=\frac{0}{0.34}=0\,,$$

$$P_n^*(B/A)=\frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(A)}=\frac{P_n^*(\varnothing)}{P_n^*(\{E_2,E_4,E_6\})}=\frac{0}{0.66}=0\,,$$

$$P_n^*(A/C)=\frac{P_n^*(AC)}{P_n^*(C)}=\frac{P_n^*(\{E_4,E_6\})}{P_n^*(\{E_4,E_5,E_6\})}=\frac{0.64}{0.94}=0.68\,,$$

$$P_n^*(A/D)=\frac{P_n^*(AD)}{P_n^*(D)}=\frac{P_n^*(\{E_2,E_4\})}{P_n^*(\{E_1,E_2,E_3,E_4\})}=\frac{0.06}{0.10}=0.6\,.$$

Для добутку трьох подій *A, B, C* маємо:

$$P_n^*(ABC)=P_n^*((AB)C)=P_n^*(AB)\,P_n^*(C/AB)=$$
$$=P_n^*(A)\,P_n^*(B/A)\,P_n^*(C/AB).$$

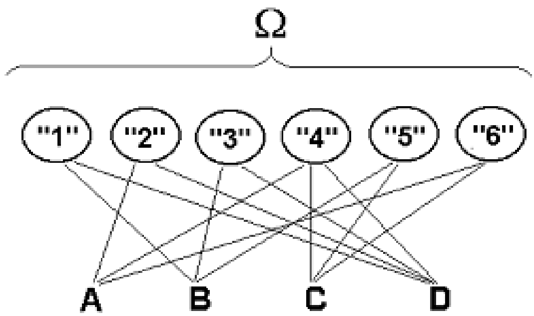


Рис. 1.10.1

В механічній інтерпретації – щоб одержати масу, що припадає на множину *ABC*, треба спочатку знайти масу, що припадає на *AB*, для чого треба взяти частку, що припадає на множину *B*, від маси, що є в множині *A*, потім від маси, що є в *AB*, взяти частку, що припадає на множину *C*.

За методом математичної індукції легко довести *формулу статистичної ймовірності добутку довільної скінченної кількості подій*

$$P_n^*(A_1A_2\ldots A_{m-1}A_m)=P_n^*((A_1A_2\ldots A_{m-1})A_m)=$$
$$=P_n^*(A_1A_2\ldots A_{m-1})\,P_n^*(A_m/A_1A_2\cdots A_{m-1})=\ldots= \qquad (1.10.3)$$
$$=P_n^*(A_1)\,P_n^*(A_2/A_1)\,P_n^*(A_3/A_1A_2)\cdots P_n^*(A_m/A_1A_2\cdots A_{m-1}).$$

Приклад 1.10.2. В скриньці є 49 кульок, які пронумеровані від 1 до 49. Дуже велику кількість n разів проводились такі випробування – навмання одна за однією без повернення в скриньку виймали шість кульок. При цьому виявилось, що відносна частота появи будь якої із 49 кульок першою дорівнює $\frac{1}{49}$. Після того, як першу кульку вийнято, відносна частота появи будь якої із решти 48 кульок дорівнює $\frac{1}{48}$ незалежно від номера першої кульки. Після того, як вийнято дві кульки, відносна частота появи будь якої із решти 47 кульок дорівнює $\frac{1}{47}$ незалежно від номерів двох вийнятих кульок. Після того, як вийнято три кульки, відносна частота появи будь якої із решти 46 кульок дорівнює $\frac{1}{46}$ незалежно від номерів трьох вийнятих кульок. Після того, як вийнято чотири кульки, відносна частота появи будь якої із решти 45 кульок дорівнює $\frac{1}{45}$ незалежно від номерів чотирьох вийнятих кульок. Після того, як вийнято 5 кульок, відносна частота появи будь якої із решти 44 кульок дорівнює $\frac{1}{44}$ незалежно від номерів п'яти вийнятих кульок.

Потрібно обчислити відносну частоту (статистичну ймовірність) відбування події A, яка полягає в тому, що на кожній із шести кульок, навмання вийнятих в одному випробуванні, був один із шести наперед задуманих номерів.

Припустимо, що задумали номери $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$. Позначимо через A_1 подію, яка полягає в тому, що першою вийнято кульку з номером m_1, який є серед задуманих, тобто $m_1 \in \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}$. Зрозуміло, що ця подія спричинюється шістьма попарно несумісними подіями, кожна з яких полягає в тому, що першою вийнято кульку, номер якої дорівнює одному із задуманих, тобто дорівнює або i_1, або i_2, або i_3, або i_4, або i_5, або i_6.

За умовою задачі статистична ймовірність кожної із цих шести подій дорівнює $\frac{1}{49}$, а тому $P_n^*(A_1) = \frac{6}{49}$.

Позначимо через A_2 – подію, яка полягає в тому, що номер m_2 кульки, яку вийнято другою, є одним із шести задуманих номерів, тобто $m_2 \in \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}$.

Якщо подія A_1 відбулася, тобто першою вийнято кульку з номером $m_1 \in \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}$, то кулька з номером m_1 не може бути вийнята вдруге. Отже за умови, що подія A_1 відбулася, подія A_2 спричинюється п'ятьма попарно несумісними подіями, кожна з яких полягає в тому, що другою вийнято кульку, номер якої m_2 є одним із задуманих, але $m_2 \neq m_1$, тобто

$$m_2 \in \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\} \setminus \{m_1\}.$$

За умовою задачі умовна статистична ймовірність кожної з цих п'яти подій дорівнює $\frac{1}{48}$. Тому $P_n^*(A_2 / A_1) = \frac{5}{48}$.

Аналогічно, якщо A_3, A_4, A_5, A_6 події, які полягають в тому, що відповідно третьою, четвертою, п'ятою, шостою вийнято кульку з номерами m_3, m_4, m_5, m_6, кожний з яких є одним із задуманих номерів і крім того не співпадає з номерами раніше вийнятих кульок, які теж належать до задуманих, то

$$P_n^*(A_3 / A_1 A_2) = \frac{4}{47}, \qquad P_n^*(A_4 / A_1 A_2 A_3) = \frac{3}{46},$$

$$P_n^*(A_5 / A_1 A_2 A_3 A_4) = \frac{2}{45}, \qquad P_n^*(A_6 / A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) = \frac{1}{44}.$$

Очевидно, що подія A відбувається тоді, коли *в одному й тому самому випробуванні* (вийманні одна за однією шести кульок) відбуваються всі шість подій $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, тобто

$$A = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6.$$

Враховуючи формулу (1.10.3), одержимо

$$P_n^*(A) = P_n^*(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6) =$$

$$= P_n^*(A_1) P_n^*(A_2 / A_1) P_n^*(A_3 / A_1 A_2) P_n^*(A_4 / A_1 A_2 A_3) \cdot$$

$$\cdot P_n^*(A_5 / A_1 A_2 A_3 A_4) P_n^*(A_6 / A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) =$$

$$= \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{1}{44} \approx \frac{7}{100000000}.$$

Отже, в наведеній серії дуже великої кількості n випробувань 6 номерів із 49 можливих вдавалося вгадати в середньому 7 разів у 100 мільйонах спроб.

Задачі

1.10.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Умовна статистична ймовірність $P_n^*(A/B)$ існує для будь-яких подій A та B.

2. Статистична ймовірність добутку подій дорівнює добутку статистичних ймовірностей цих подій.

3. Умовна статистична ймовірність є статистичною ймовірністю.

4. $P_n^*(AB) = 1 - P_n^*(\overline{A} + \overline{B})$.

1.10.2. Відомо, що подія A полягає у випаданні не менше ніж a очок при підкиданні кубика, причому $P_n^*(\{"i"\}) = \dfrac{1}{6}$, $i \in \{1, 2, ..., 6\}$. Знайти $P_n^*(A/B)$, де подія B полягає у випаданні 4 очок, коли 1) $a = 1$; 2) $a = 2$; 3) $a = 3$; 4) $a = 4$; 5) $a = 5$; 6) $a = 6$.

1.11. Залежні і незалежні відносно ймовірнісної міри P_n^* випадкові події

Означення. *Події A і B називаються незалежними відносно ймовірнісної міри P_n^**, якщо

$$P_n^*(AB) = P_n^*(A)P_n^*(B).$$

Оскільки $P_n^*(AB) = P_n^*(B)P_n^*(A/B)$, то події A і B незалежні тоді й тільки тоді, коли $P_n^*(A/B) = P_n^*(A)$, тобто коли умовна статистична ймовірність $P_n^*(A/B)$ події A, знайдена за умови, що подія B мала місце, співпадає з безумовною статистичною ймовірністю $P_n^*(A)$ події A.

Аналогічно, якщо A і B незалежні події, то і $P_n^*(B/A) = P_n^*(B)$. Якщо ж $P_n^*(A) = 0$ або $P_n^*(B) = 0$, то події A і B незалежні, оскільки $AB \subset A$, $AB \subset B$, і тому $0 \le P_n^*(AB) \le P_n^*(A) = 0$ або $0 \le P_n^*(AB) \le P_n^*(B) = 0$, звідки $P_n^*(AB) = 0 = P_n^*(A) \cdot P_n^*(B)$.

Означення. *Події A_1, A_2, …, A_k називаються незалежними в сукупності відносно ймовірнісної міри P_n^**, якщо

$$P_n^*(\prod_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} P_n^*(A_i)$$

для довільного $I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$, $I \neq \varnothing$.

З останнього означення випливає, що для того, щоб події $A_1, A_2, \ldots, A_k$ були незалежні в сукупності відносно міри P_n^*, потрібно, щоб кожна з них не залежала від будь-якої сукупності інших подій, тобто щоб мали місце рівності

$$P_n^*(A_i / \prod_{j\in I\setminus\{i\}} A_j) = P_n^*(A_i),\ I \subset \{1, 2, \ldots, k\},\ I \setminus \{i\} \neq \varnothing .$$

Зауважимо, що коли замість ймовірнісної міри $P_n^*(A)$, $A \in S$, на тому самому просторі S подій задати іншу ймовірнісну міру $\widetilde{P}_n^*(A)$, $A \in S$, то події, що були незалежні (чи незалежні в сукупності) відносно ймовірнісної міри P_n^*, не обов'язково залишатимуться такими самими відносно ймовірнісної міри $\widetilde{P}_n^*$.

Одні і ті самі події A і B, $A \in S$, $B \in S$, відносно однієї ймовірнісної міри P_n^*, заданої на S, можуть бути незалежними, а відносно іншої ймовірнісної міри $\widetilde{P}_n^*$, заданої на тому самому просторі подій, можуть бути залежними. Тому говорити про незалежність чи залежність подій A і B безвідносно якоїсь ймовірнісної міри некоректно.

Приклад 1.11.1. Нехай проведено серію випробувань, в кожному з яких із скриньки, де було 40 кульок чотирьох кольорів – білі, червоні, зелені, жовті, по 10 кульок кожного кольору, навмання вибирали одну кульку, фіксували її колір і повертали в скриньку (Рис. 1.11.1).

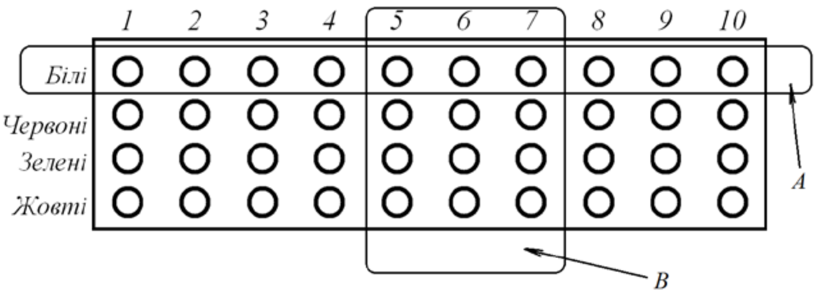


Рис. 1.11.1

Кульки кожного кольору пронумеровані від 1 до 10.

Нехай простір подій S містить всі підмножини заданої сорокаелементної множини Ω, подія A – кулька білого кольору, подія B – на кульці нанесено один із номерів 5, 6, 7 (Рис. 1.11.1).

а) Нехай в результаті проведеної серії випробувань отримали, що всі кульки вибирали однаково часто, тобто із статистичною ймовірністю $\frac{1}{40}$ кожна. Тоді

$$P_n^*(A)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4},\ P_n^*(B)=\frac{12}{40}=\frac{3}{10},\ P_n^*(AB)=\frac{3}{40},$$

$$P_n^*(A/B)=\frac{3/40}{12/40}=\frac{1}{4}=P_n^*(A),\ P_n^*(B/A)=\frac{3/40}{10/40}=\frac{3}{10}=P_n^*(B),$$

$$P_n^*(AB)=P_n^*(A)\cdot P_n^*(B/A)=P_n^*(B)\cdot P_n^*(A/B)=P_n^*(A)\cdot P_n^*(B)=\frac{10}{40}\cdot\frac{12}{40}=\frac{3}{40}.$$

Таким чином відносно так заданої міри $P_n^*(A)$, $A\in S$, розглядувані події A і B незалежні.

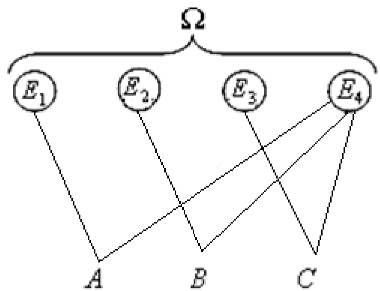


Рис. 1.11.2

б) Нехай в результаті іншої серії випробувань з тими самими множиною Ω, сукупністю підмножин S і подіями A, B отримали $\widetilde{P}_n^*(AB)=0$ (в множину AB не попадали жодного разу), $\widetilde{P}_n^*(A)=\frac{1}{2}$ (в половині всіх випробувань серії попадали в множину A), $\widetilde{P}_n^*(B)=\frac{1}{4}$ (в четвертій частині всіх випробувань серії попадали в множину B), але біла кулька з номерами 5, 6, 7 не була вибрана жодного разу. Тоді, очевидно,

$$\tilde{P}_n^*(AB) = 0 \ne \tilde{P}_n^*(A) \cdot \tilde{P}_n^*(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

і тому відносно ймовірнісної міри $\tilde{P}_n^*(A)$, $A \in S$, розглядувані події A і B залежні.

Приклад 1.11.2. Нехай $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ (Рис. 1.11.2). При цьому відомо, що

$$P_n^*(\{E_1\}) = \frac{1}{4},\ P_n^*(\{E_2\}) = \frac{1}{4},\ P_n^*(\{E_3\}) = \frac{1}{4},\ P_n^*(\{E_4\}) = \frac{1}{4}.$$

Нехай події A, B, C визначені так: $A = \{E_1, E_4\}$, $B = \{E_2, E_4\}$, $C = \{E_3, E_4\}$.

Тоді $P_n^*(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P_n^*(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P_n^*(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Оскільки $AB = \{E_4\}$, $AC = \{E_4\}$, $BC = \{E_4\}$, то

$$P_n^*(AB) = \frac{1}{4} = P_n^*(A)P_n^*(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},\ P_n^*(AC) = \frac{1}{4} = P_n^*(A)P_n^*(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

$$P_n^*(BC) = \frac{1}{4} = P_n^*(B)P_n^*(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Таким чином події A, B, C відносно розглядуваної ймовірнісної міри P_n^* попарно незалежні. При цьому подія A відбувалася в половині всіх n випробувань, а також в половині тих випробувань, коли відбувалася подія B, оскільки

$$P_n^*(A) = \frac{1}{2},\ P_n^*(A/B) = \frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Те саме можна сказати про безумовні статистичні ймовірності $P_n^*(B)$, $P_n^*(C)$ та умовні статистичні ймовірності $P_n^*(B/A)$, $P_n^*(A/C)$, $P_n^*(C/A)$, $P_n^*(B/C)$, $P_n^*(C/B)$.

Разом з тим $ABC = \{E_4\}$, тому

$$P_n^*(ABC) = \frac{1}{4} \ne P_n^*(A)P_n^*(B)P_n^*(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Той факт, що, наприклад, подія A залежить від добутку подій B і C, очевидний, оскільки у всіх тих випробуваннях, коли відбувалася подія BC (добуток подій B і C), відбувалася і подія A, тобто

$$P_n^*(A/BC)=1\left(=\frac{P_n^*(ABC)}{P_n^*(BC)}=\frac{1/4}{1/4}\right).$$

Оскільки $P_n^*(A/BC)=1\neq P_n^*(A)=\frac{1}{2}$, то подія A залежить від добутку подій B і C.

Отже, в розглядуваному випадку події A, B, C попарно незалежні, але залежні в сукупності.

Задачі

1.11.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Будь-які події A і B є незалежними, якщо $P_n^*(A)=0$ або $P_n^*(B)=0$.
2. Події A, B і C незалежні в сукупності, якщо вони попарно незалежні.
3. Твердження, обернене до 8, є правильним.
4. Якщо події незалежні відносно однієї ймовірнісної міри, то вони незалежні і відносно будь-якої іншої ймовірнісної міри.

1.11.2. Нехай $\Omega=\{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}=\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$ – простір елементарних подій, що відповідає одночасному підкиданню двох монет, причому $P_n^*(\{E_k\})=\frac{1}{4},\ k\in\overline{1,4}$. До простору подій S включено всі підмножини множини Ω (разом з $\varnothing$). Подія A полягає у випаданні герба на першій монеті, подія B – випадання герба на другій монеті.

1. Чи є події A і B незалежними відносно заданої міри P_n^*?

2. Чи можна визначити ймовірнісну міру P_n^* так, щоб A і B стали незалежними (чи залежними) подіями?

1.11.3. Нехай A і B події з попередньої задачі. Чи існує подія C така, що події A, B і C – незалежні в сукупності відносно заданої міри P_n^*?

1.12. Формула повної статистичної ймовірності. Формула Байєса

Нехай простір Ω елементарних подій поділено на m підмножин $H_1, H_2, ..., H_m$ таких, що $H_i\in S$, $H_iH_j=\varnothing$ при $i\neq j$,

$H_1 + H_2 + ... + H_m = \Omega$, і нехай $A -$ подія, $A \subset \Omega$, $A \in S$ (Рис. 1.12.1). Надалі H_i називатимемо *гіпотезами*. Оскільки

$$A = A \cdot \Omega = A(H_1 + H_2 + ... + H_m) = AH_1 + AH_2 + ... + AH_m,$$

причому $AH_i \cdot AH_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, то за властивістю адитивності статистичної ймовірності і формулою (1.10.2) маємо:

$$P_n^*(A) = P_n^*(AH_1 + AH_2 + ... + AH_m) = P_n^*(AH_1) + P_n^*(AH_2) + ... + P_n^*(AH_m) =$$
$$= P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1) + P_n^*(H_2)P_n^*(A/H_2) + ... + P_n^*(H_m)P_n^*(A/H_m).$$

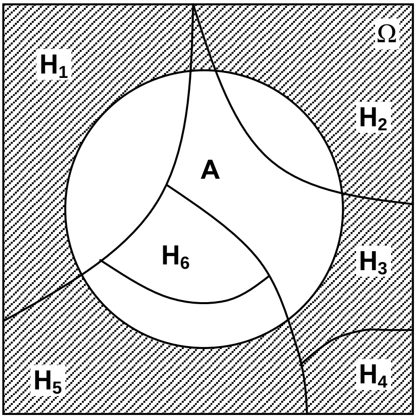


Рис. 1.12.1

Таким чином,

$$P_n^*(A) = \sum_{i=1}^{m} P_n^*(H_i) P_n^*(A/H_i) \qquad (1.12.1)$$

Цю формулу називають *формулою повної статистичної ймовірності*.

Отже, якщо відомі або легко знаходяться статистичні ймовірності $P_n^*(H_i)$ гіпотез H_i, а також відомі або легко знаходяться умовні статистичні ймовірності $P_n^*(A/H_i)$ події A за кожною з гіпотез H_i, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, тоді статистичну ймовірність $P_n^*(A)$ події A можна обчислити за формулою (1.12.1).

Приклад 1.12.1. Є дві скриньки, в яких є білі і чорні кульки. Випробування полягає в тому, що навмання вибирається скринька, а з неї навмання вибирається кулька, яка потім повертається в скриньку. Із *n* випробувань m_1 разів була вибрана перша скринька, при цьому в $k_1<m_1$ цих випадків кулька була біла, і $m_2 = n - m_1$ разів була вибрана друга скринька, при цьому в $k_2<m_2$ випадків кулька була біла.

Природно вважати, що простір елементарних подій $\Omega = \{(1,б),(1,ч),(2,б),(2,ч)\}$, де елементарна подія $E_{kб} = (k,б)$, $k \in \overline{1,2}$, означає, що з k-тої скриньки вийнято білу кульку. Подія $H_k = \{(k,б),(k,ч)\}$ означає, що кульку вийнято з k-тої скриньки, $k \in \overline{1,2}$. За умовою задачі $P_n^*(H_1) = \frac{m_1}{n}$, $P_n^*(H_2) = \frac{m_2}{n}$. Очевидно $H_1 \cdot H_2 = \varnothing$ і $H_1 + H_2 = \Omega$.

Нехай подія $A = \{(1,б),(2,б)\}$ – поява білої кульки. За умовою задачі $P_n^*(A/H_1) = \frac{k_1}{m_1}$, $P_n^*(A/H_2) = \frac{k_2}{m_2}$.

Тому за формулою (1.12.1) статистична ймовірність (відносна частота) появи білої кульки в цих n випробуваннях дорівнює

$$P_n^*(A) = P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1) + P_n^*(H_2)P_n^*(A/H_2) = \frac{m_1}{n}\cdot\frac{k_1}{m_1} + \frac{m_2}{n}\cdot\frac{k_2}{m_2}.$$

Якщо в умовах, коли відомі $P_n^*(H_i)$ і $P_n^*(A/H_i)$, потрібно визначити, чому дорівнює $P_n^*(H_i/A)$, тобто відносну частоту відбування події H_i серед тих випробувань, коли відбувалася подія A, то, виходячи з означення умовної статистичної ймовірності та формули повної статистичної ймовірності, дістанемо:

$$P_n^*(H_i/A) = \frac{P_n^*(AH_i)}{P_n^*(A)} = \frac{P_n^*(H_i)P_n^*(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{m} P_n^*(H_i)P_n^*(A/H_i)}.$$

Останню формулу називають *формулою Байєса*.

Приклад 1.12.2. При багатократному передаванні телеграфних повідомлень за допомогою двох знаків “•” (крапка) і “–” (тире) було з’ясовано, що відносна частота спотворення знака “•” дорівнює $\frac{2}{5}$, а відносна частота спотворення знака “–” дорівнює $\frac{2}{3}$. Крім того було помічено, що у повідомленнях, які треба передавати, відносна частота появи знака “•” дорівнює $\frac{5}{8}$, а відносна частота появи знака “▬” дорівнює $\frac{3}{8}$. Потрібно обчислити відносну частоту випадків, коли передавали знак “•”, серед тих випадків, коли було прийнято знак “•”.

Природно вважати, що простором елементарних подій є $\Omega = \{$“••”, “•▬”, “▬•”, “▬ ▬”$\}$, де кожній елементарній події $E \in \Omega$ відповідає сукупність двох знаків: першим вказано переданий знак, а другим – прийнятий.

Нехай подія $A = \{$“••”, “▬•”$\}$ полягає в тому, що прийнято знак “•”. Така подія може відбутися як за умови, що передавали знак “•”, так і за умови, що передавали знак “▬”. Отже є дві гіпотези: $H_1 = \{$“••”, “•▬”$\}$ – передавали знак “•”, $H_2 = \{$“▬•”, “▬ ▬”$\}$ – передавали знак “▬”. Очевидно $H_1 H_2 = \varnothing$, $H_1 + H_2 = \Omega$. За умовами задачі $P_n^*(H_1) = \frac{5}{8}$, $P_n^*(H_2) = \frac{3}{8}$. Крім того, оскільки відносна частота спотворення знака “•” дорівнює $\frac{2}{5}$, а знака “▬” – $\frac{2}{3}$, то подія A за гіпотези H_1 відбувається тоді, коли знак “•” не спотворюється, тобто $P_n^*(A/H_1) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$, а за гіпотези H_2 подія A відбувається, коли спотворюється знак “▬”, тобто $P_n^*(A/H_2) = \frac{2}{3}$.

Тоді за формулою повної статистичної ймовірності одержуємо

$$P_n^*(A) = P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1) + P_n^*(H_2)P_n^*(A/H_2) = \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3} = \frac{5}{8}.$$

Щоб визначити статистичну ймовірність того, що передавали знак “•”, за умови, що прийнято знак “•”, тобто $P_n^*(H_1/A)$, скористаємось означенням умовної статистичної ймовірності $P_n^*(A/B) = \frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}$ або формулою Байєса.

Для розглядуваного випадку дістанемо:

$$P_n^*(H_1/A) = \frac{P_n^*(AH_1)}{P_n^*(A)} = \frac{P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1)}{P_n^*(A)} =$$

$$= \frac{P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1)}{P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1)+P_n^*(H_2)P_n^*(A/H_2)} = \frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}.$$

Задачі

1.12.1. Перевірити чи правильні твердження:

1. Якщо $H_1 + H_2 + ... + H_m = \Omega$, то H_i – гіпотези.

2. Якщо $H_i \cdot H_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то H_i – гіпотези.

3. До простору подій S входять разом з неможливою подією $\varnothing$ лише всеможливі об'єднання $\bigcup_{i\in I} H_i$, $I \subset \{1, 2, ..., m\}$, гіпотез H_i.

4. Сума умовних статистичних ймовірностей $P_n^*(A/H_i)$, $i \in \overline{1,k}$, може бути більшою, ніж 1.

5. Для кожної гіпотези H_i існує подія A така, що $P_n^*(H_i / A) = P_n^*(H_i)$.

6. Кожна гіпотеза у даному ймовірнісному просторі (Ω, S, P_n^*) має єдину статистичну ймовірність, яка не залежить від того, відбулася чи ні якась подія A.

7. Кожна гіпотеза у даному ймовірнісному просторі (Ω, S, P_n^*) може мати багато різних умовних статистичних ймовірностей.

1.12.2. За даними прикладу 1.12.2 обчислити:

а) відносну частоту випадків, коли передавали знак "**–**", серед тих випадків, коли було прийнято знак "•";

б) відносну частоту випадків, коли передавали знак "•", серед тих випадків, коли було прийнято знак "**–**";

в) відносну частоту випадків, коли передавали знак "**–**", серед тих випадків, коли було прийнято знак "**–**".

РОЗДІЛ 2. РОЗПОДІЛИ СТАТИСТИЧНИХ ЙМОВІРНОСТЕЙ

2.1. Поняття розподілу статистичних ймовірностей на множині елементарних подій

Нехай Ω – деякий простір елементарних подій, S – відповідний простір подій, $P_n^*(A)$, $A \in S$, – ймовірнісна міра, визначена на елементах сукупності *S*, які є підмножинами множини Ω, тобто $A \subset \Omega$ і $A \in S$, отже задано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*).

Тоді говорять, що тим самим задано *розподіл статистичних ймовірностей* (ймовірнісної міри) $P_n^*(A)$ на множині Ω, оскільки задано, чому дорівнює статистична ймовірність попадання в кожну підмножину $A \subset \Omega$, таку, що $A \in S$, тобто задано $P_n^*(A)$ для кожного $A \in S$. Іншими словами, задано, яка статистична ймовірність $P_n^*(A)$ припадає на кожну підмножину $A \subset \Omega$ із сукупності *S*, чим і задано розподіл статистичних ймовірностей.

Приклад 2.1.1. Нехай множину Ω поділено на підмножини H_1, H_2, …, H_k, такі, що $H_i H_j = \varnothing$, якщо $i \neq j$, тобто в підмножинах H_i і H_j немає спільних елементів, коли $i \neq j$, а $H_1 + H_2 + ... + H_k = \Omega$. Нехай сукупність *S* підмножин множини Ω містить порожню множину $\varnothing$, всі підмножини H_1, H_2, …, H_k, а також всеможливі об'єднання цих підмножин по дві, по три і т.д., по *k*-1, всіх *k* підмножин. В такому разі говорять, що *простір подій S породжений поділом множини* Ω *на підмножини* H_1, H_2, …, H_k такі, що $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$.

Якщо при цьому задано $P_n^*(H_i)$, $i \in \{1, 2, ..., k\}$, такі, що $0 \le P_n^*(H_i) \le 1$, $\sum_{i=1}^{k} P_n^*(H_i) = 1$, то тим самим задано $P_n^*(A)$ для довільного $A \in S$. При цьому, якщо $A = \bigcup_{i \in I} H_i$, де $I \subset \{1, 2, ..., k\}$ – деяка непорожня підмножина індексів із множини $\{1, 2, ..., k\}$, то $P_n^*(A) = \sum_{i \in I} P_n^*(H_i)$. В такому разі говорять, що *на множині* Ω

задано розподіл статистичних ймовірностей за підмножинами H_i такий, що статистична ймовірність попадання в множину H_i дорівнює $P_n^*(H_i)$ (або іншими словами – на множину H_i припадає статистична ймовірність $P_n^*(H_i)$).

Якщо H_i одноелементні підмножини множини Ω, $H_i = \{E_i\}$, $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_k\}$, тоді S буде найбагатшим (найширшим) простором подій і міститиме всі підмножини множини Ω разом з порожньою $\varnothing$ та самою множиною Ω. При цьому *S* містить разом з $\varnothing$ і Ω всі події виду $\{E_i\}$, $i \in \{1, 2, ..., k\}$, та всеможливі підмножини множини Ω – двохелементні, триелементні і т.д., (*k*-1)-елементні, а для довільного $A = \bigcup_{i \in I} \{E_i\}$, $I \subset \{1, 2, ..., k\}$, буде $P_n^*(A) = P_n^*(\bigcup_{i \in I} \{E_i\}) = \sum_{i \in I} P_n^*(\{E_i\})$. В такому разі одержується *розподіл статистичних ймовірностей* $P_n^*(H_i) = P_n^*(\{E_i\})$ *на множині* Ω *за елементарними подіями* $E_i \in \Omega$.

Якщо множина Ω є множиною точок деякого координатного простору (наприклад, числової прямої – одновимірного координатного простору, площини – двохвимірного координатного простору тощо), тоді елементарні події $E \in \Omega$ будуть ототожнюватися з деякими точками відповідного координатного простору.

Розглянемо *дискретний простір* Ω елементарних подій такий, що містить скінченну кількість елементів, які можна занумерувати скінченною кількістю натуральних чисел від 1 до *k*. Отже, $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_k\}$. В геометричній інтерпретації кожну елементарну подію $E_i \in \Omega$ можна ототожнювати з деякою точкою на числовій прямій, тобто з деяким дійсним числом x_i, $i \in \{1, 2, ..., k\}$, причому числа x_i попарно різні: $x_i \neq x_j$, коли $i \neq j$. Тому можна вважати, що $\Omega_1 = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, причому $x_1 < x_2 < ... < x_k$. В такий спосіб здійснюється перехід від безкоординатного простору до координатного.

Приклад 2.1.2. Якщо ототожнювати випадання білої грані при підкиданні кубика з числом 1, випадання зеленої – з числом 2, випадання червоної – з числом 3, за умови, що кожну грань пофарбовано в один з трьох кольорів – білий, зелений, червоний, то замість простору $\Omega = \{\text{білий}, \text{зелений}, \text{червоний}\}$, можна розглядати простір $\Omega = \{1, 2, 3\}$.

Приклад 2.1.3. Нехай експеримент полягає у підкиданні монети до першого випадання герба. Тоді замість простору елементарних подій $\Omega = \{\,Г,\ ЦГ, ЦЦГ, ЦЦЦГ, \ldots\}$ можна розглядати простір $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Припустимо, що проведено n випробувань, в результаті яких спостережені елементарні події $E_{\text{сп}\,i} \in \Omega$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, замість яких можна розглядати відповідні числові значення $x_{\text{сп}\,i}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ці значення $x_{\text{сп}\,i}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, називають *спостереженими значеннями*. Якщо їх впорядкувати за величиною, то отримується так званий *варіаційний ряд*, члени якого називаються *варіантами*.

Якщо n_i – абсолютна частота відбування події $\{E_i\}$, тобто елементарна подія E_i спостерігалася в n випробуваннях n_i разів, причому $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, то число n_i є абсолютною частотою появи і значення x_i, а число $P_n^*(\{E_i\}) = \dfrac{n_i}{n} = P_n^*(\{x_i\})$ – статистична ймовірність або відносна частота відбування події $\{E_i\}$, а отже і події $\{x_i\}$.

Табл. 2.1.1

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Табл. 2.1.2

x_i	x_1	x_2	...	x_k
$P_n^*(\{x_i\})$	$P_n^*(\{x_1\})$	$P_n^*(\{x_2\})$	$\cdots$	$P_n^*(\{x_k\})$

Таблицями виду 2.1.1 і 2.1.2 задають відповідно *ряд розподілу абсолютних частот* та *ряд розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот)* на дискретній множині $\Omega = \{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$ або, що те саме, на множині точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, за елементарними подіями. Говорять також, що таблицями 2.1.1 і 2.1.2 задано *дискретний розподіл частот* (відповідно абсолютних та відносних) за елементарними подіями. При цьому якщо $A = \bigcup_{i \in I} \{x_i\},\ I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$, то $P_n^*(A) = \sum_{i \in I} P_n^*(\{x_i\})$.

Для полегшення підрахунку чисел n_i, а отже і чисел $P_n^*(\{x_i\})$, спостережені значення $x_{\text{сп}\,i}$ розташовують у порядку їх зростання, в результаті чого одержують *варіаційний ряд*.

Приклад 2.1.4. Варіаційний ряд для спостережених значень

$$5, 6, 6, 6, 4, 3, 5, 2, 6, 4, 5, 6, 3, 3, 5$$

має вигляд

$$2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6,$$

а відповідні ряди розподілу абсолютних частот та статистичних ймовірностей (відносних частот) подані в таблицях 2.1.3 і 2.1.4.

Табл. 2.1.3

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	0	1	3	2	4	5

Табл. 2.1.4

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_n^*(\{x_i\})$	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

У фізичній інтерпретації ряд розподілу абсолютних частот можна розглядати як цілочисельний розподіл маси n на множині точок $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$, а ряд розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) – як розподіл відповідної нормованої (одиничної) маси на тій самій множині.

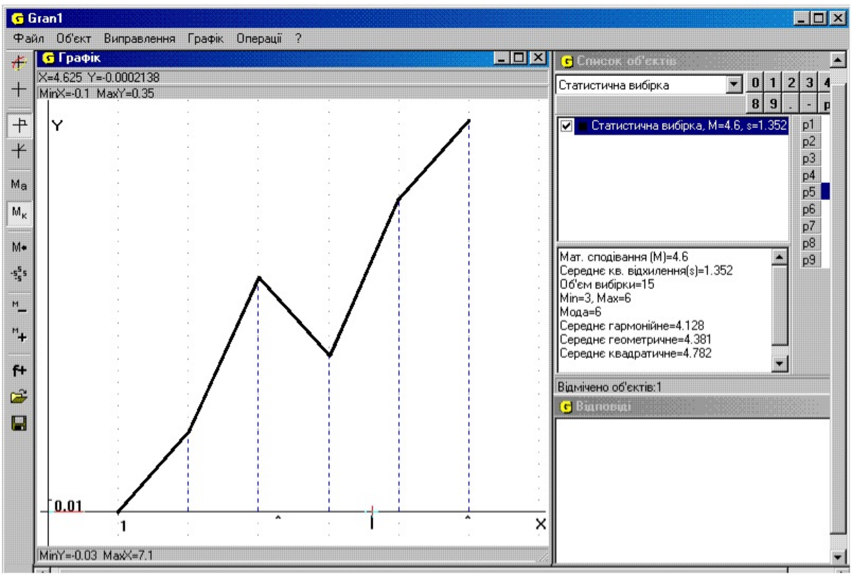


Рис. 2.1.1

Оскільки для будь-якої події $A \subset \Omega$ $P_n^*(A) = \sum_{E_i \in A} P_n^*(\{E_i\})$, то з фізичної точки зору $P_n^*(A)$ – це частина одиничної маси, що припадає на всі точки із множини A, за умови, що на множині $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_k\}$ одинична маса розподілена так, що на точку E_i припадає маса $P_n^*(\{E_i\})$.

Якщо точки $(x_i, P_n^*(\{x_i\}))$ зобразити на координатній площині і з'єднати відрізками прямих, то так отриману ламану з вершинами у вказаних точках називають *многокутником розподілу статистичних ймовірностей* або *полігоном відносних частот*.

Приклад 2.1.5. На Рис. 2.1.1 зображено полігон відносних частот, що визначається за таблицею 2.1.4.

Задачі

2.1.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Елементарні події довільної множини Ω можна ототожнювати з натуральними числами.
2. Спостережені елементарні події E_i – це те саме, що й спостережені значення x_i .
3. В заданій серії з n випробувань кожне спостережене і неспостережене значення має свою абсолютну і відносну частоти.
4. Будь-якими таблицями виду 2.1.1 та 2.1.2 задають дискретний розподіл частот.
5. За варіаційним рядом цілком визначається дискретний розподіл частот.
6. Сукупність чисел 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 5 можна вважати варіаційним рядом.
7. Статистичні ймовірності можна інтерпретувати як маси.
8. Кожен простір елементарних подій є дискретним.
9. Через полігон відносних частот цілком визначається дискретний розподіл частот.

2.1.2. 1. Побудувати варіаційний ряд спостережених значень, що відповідають спостереженим відхиленням точки падіння снаряда від цілі: -50, 20, -10, 20, 10, 20, -50, -20, -10, 40, -20,-30, -10, 10, 20, -40, 50, -10, 10, 50.

2. Використовуючи одержаний варіаційний ряд з 2.1.2.1, побудувати ряди розподілу абсолютних частот та статистичних ймовірностей (відносних частот) на множині можливих значень {-50, -40, -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, 40, 50}.

3. Побудувати многокутник розподілу статистичних ймовірностей для розподілу з 2.1.2.2.

4. Підрахувати статистичну ймовірність відбування події A, яка полягає в тому, що віддаль точки падіння снаряда від цілі не перевищує 20.

2.2. Щільність розподілу статистичних ймовірностей

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), де простір подій S породжений поділом множини Ω на підмножини H_1, H_2, …, H_k, $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$. Підкреслимо, що як події розглядатимемо лише всеможливі об'єднання підмножин H_i, тобто множини виду $A = \bigcup_{i \in I} H_i$, $I \subset \{1, 2, ..., k\}$. Очевидно $A \subset \Omega$ і $A \in S$ при довільному $I \subset \{1, 2, ..., k\}$ (зокрема $I = \varnothing$). Нехай на S окрім ймовірнісної міри P_n^* задано також деяку міру $m(A)$, $A \in S$, для якої $0 < m(\Omega) < \infty$, $0 < m(H_i) < \infty$, $i \in \overline{1, k}$.

Наприклад, мірою $m(A)$, $A \in S$, можуть бути кількості точок в множинах $A \in S$, довжини лінійних фігур $A \in S$, якщо Ω – множина точок на прямій, площі фігур $A \in S$, якщо Ω – множина точок двохвимірного координатного простору, об'єми фігур $A \in S$ в тривимірному просторі, маси фізичних тіл тощо.

Тоді відношення $\dfrac{P_n^*(H_i)}{m(H_i)}$ природно назвати *середньою щільністю* статистичної ймовірності (ймовірнісної міри) $P_n^*(A)$ у множині H_i відносно міри $m(A)$, $A \in S$.

Введемо до розгляду функцію

$$f_n^*(E) = \frac{P_n^*(H_i)}{m(H_i)}, \; E \in H_i, \; i \in \{1, 2, ..., k\},$$

визначену для всіх $E \in \Omega$.

Таку функцію природно назвати *усередненою* або *середньою щільністю відносно міри m розподілу статистичних ймовірностей* (ймовірнісної міри P_n^*) *на множині* Ω *за підмножинами* H_i.

Із виразу $f_n^*(E)=\dfrac{P_n^*(H_i)}{m(H_i)}$, $E\in H_i$, $i\in\{1,2,...,k\}$, отримуємо

$$P_n^*(H_i)=f_n^*(E)m(H_i),\ E\in H_i,\ i\in\{1,2,...,k\}.$$

Звідси для $A=\bigcup\limits_{i\in I}H_i$, $H_iH_j=\varnothing$, коли $i\neq j$, $I\subset\{1,2,...,k\}$,

$$P_n^*(A)=P_n^*(\bigcup_{i\in I}H_i)=\sum_{i\in I}P_n^*(H_i)=\sum_{i\in I,E\in H_i}f_n^*(E)m(H_i).$$

Вираз $\sum\limits_{i\in I,E\in H_i}f_n^*(E)m(H_i)$ називають інтегралом від функції $f_n^*(E)$ на множині A за мірою m і позначають як $\int\limits_A f_n^*(E)m(dE)$.

Очевидно, функція $f_n^*(E)$ має такі властивості:

1. $f_n^*(E)\geq 0$.
2. $\int\limits_\Omega f_n^*(E)m(dE)=1$.

Приклад 2.2.1. Нехай на столі є чотири поля: H_1 – біле, H_2 – зелене, H_3 – червоне, H_4 – жовте. Всі поля однакової міри: $m(H_1)=m(H_2)=m(H_3)=m(H_4)$. В ці поля навмання кидали 100 кульок. Нехай в результаті на білому полі виявилось 60 кульок, на зеленому – 30 кульок, на червоному – 6, на жовтому – 4 кульки.

Тоді природно вважати, що на білому полі кульки розташовані щільніше, ніж на зеленому, червоному, жовтому, на зеленому щільніше, ніж на червоному і жовтому, на червоному щільніше, ніж на жовтому.

В розглядуваному випадку на множині Ω можна задати функцію

$$\hat{f}_{100}(E)=\begin{cases}\dfrac{60}{m(H_1)}, & \text{якщо } E\in H_1,\\ \dfrac{30}{m(H_2)}, & \text{якщо } E\in H_2,\\ \dfrac{6}{m(H_3)}, & \text{якщо } E\in H_3,\\ \dfrac{4}{m(H_4)}, & \text{якщо } E\in H_4,\end{cases}$$

яка характеризуватиме щільність відносно міри $m(H_i)$ розподілу кульок на множині Ω за полями H_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, якщо щільністю розподілу кульок на множині Ω називати кількість кульок, яка припадає на кожну одиницю міри множини Ω в різних полях H_i, де

$$m(\Omega) = m\left(\bigcup_{i=1}^{4} H_i\right) = m(H_1) + m(H_2) + m(H_3) + m(H_4),$$

а функція

$$f_n^*(E) = \begin{cases} \dfrac{60/100}{m(H_1)}, & \text{якщо } E \in H_1, \\ \dfrac{30/100}{m(H_2)}, & \text{якщо } E \in H_2, \\ \dfrac{6/100}{m(H_3)}, & \text{якщо } E \in H_3, \\ \dfrac{4/100}{m(H_4)}, & \text{якщо } E \in H_4, \end{cases}$$

характеризуватиме щільність відносно міри $m(H_i)$ розподілу статистичних ймовірностей за полями H_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, на тій самій множині Ω.

Приклад 2.2.2. Нехай $\Omega = H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + H_6 + H_7$ і H_i є подіями із простору *S*, породженого поділом H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7 множини Ω на підмножини H_i, $i \in \overline{1,7}$, $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{7} H_i = \Omega$ (Рис. 2.2.1). Нехай проведено 100 випробувань, в кожному з яких із множини Ω навмання вибирали одну точку, і нехай одержано результати:

$$k_{100}(\Omega) = 100,\ k_{100}(H_1) = 5,\ k_{100}(H_2) = 8,\ k_{100}(H_3) = 18,$$
$$k_{100}(H_4) = 36,\ k_{100}(H_5) = 20,\ k_{100}(H_6) = 10,\ k_{100}(H_7) = 3.$$

Знайдемо відповідні статистичні ймовірності:

$$P_{100}^*(H_1) = \frac{5}{100},\ P_{100}^*(H_2) = \frac{8}{100},$$

$$P_{100}^*(H_3) = \frac{18}{100},\ P_{100}^*(H_4) = \frac{36}{100},$$

$$P_{100}^{*}(H_5)=\frac{20}{100},\ P_{100}^{*}(H_6)=\frac{10}{100},\ P_{100}^{*}(H_7)=\frac{3}{100}.$$

Якщо додатково задано міри $m(H_i)>0$, $i\in\overline{1,7}$, тоді щільність відносно міри m розподілу статистичних ймовірностей за подіями H_i набуває вигляду

$$f_n^{*}(E)=\frac{P_n^{*}(H_i)}{m(H_i)},\ E\in H_i,\ i\in\overline{1,7}.$$

Звідси

$$P_n^{*}(H_i)=f_n^{*}(E)\cdot m(H_i)=\int\limits_{H_i} f_n^{*}(E)\cdot m(dE),\ E\in H_i.$$

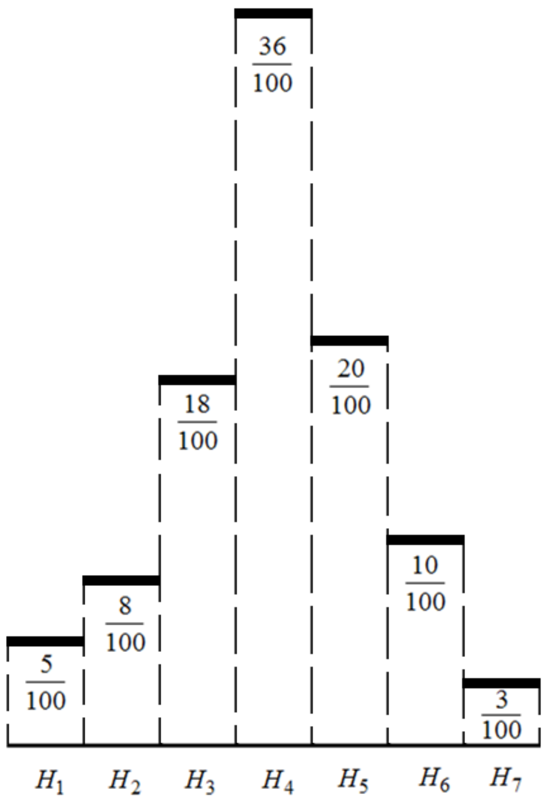


Рис. 2.2.1

Якщо Ω – відрізок числової осі довжиною 7 одиниць, H_i – інтервали довжиною 1, $m(H_i)$ – довжина інтервала H_i, тоді в геометричному тлумаченні $P_n^*(H_i) = f_n^*(E) \cdot m(H_i)$ буде площею прямокутника з основою H_i і висотою $f_n^*(E)$, тобто $P_n^*(H_i) = \int\limits_{H_i} f_n^*(E) m(dE)$, а для $A = \bigcup\limits_{i \in I} H_i$, $I \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, буде

$$P_n^*(A) = \sum_{i \in I} P_n^*(H_i) = \sum_{i \in I} \int\limits_{H_i} f_n^*(E) m(dE) = \int\limits_{A} f_n^*(E) m(dE) \ -$$

сума площ прямокутників з висотами $f_n^*(E)$, $E \in H_i$, над інтервалами H_i, з яких складено множину *A* (Рис. 2.2.1).

На Рис. 2.2.1 подано графік функції $f_n^*(E)$, яка набуває сталих значень на проміжках H_i, $i \in \{1, 2, ..., 7\}$.

Приклад 2.2.3. Нехай в квадратну мішень (Рис. 2.2.2) виконано 100 пострілів, і одержано кількості $k_{100}(H_i)$ влучень у частини H_i, $i \in \overline{1, 25}$, цієї мішені:

$k_{100}(H_1) = 1$, $k_{100}(H_2) = 2$, $k_{100}(H_3) = 3$, $k_{100}(H_4) = 2$,
$k_{100}(H_5) = 1$, $k_{100}(H_6) = 2$, $k_{100}(H_7) = 4$, $k_{100}(H_8) = 8$,
$k_{100}(H_9) = 4$, $k_{100}(H_{10}) = 2$, $k_{100}(H_{11}) = 3$, $k_{100}(H_{12}) = 8$,
$k_{100}(H_{13}) = 20$, $k_{100}(H_{14}) = 8$, $k_{100}(H_{15}) = 3$, $k_{100}(H_{16}) = 2$,
$k_{100}(H_{17}) = 4$, $k_{100}(H_{18}) = 8$, $k_{100}(H_{19}) = 4$, $k_{100}(H_{20}) = 2$,
$k_{100}(H_{21}) = 1$, $k_{100}(H_{22}) = 2$, $k_{100}(H_{23}) = 3$, $k_{100}(H_{24}) = 2$,
$k_{100}(H_{25}) = 1$.

Нехай $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{25} H_i$, а підмножини мішені H_i однакової міри $m(H_i)$, $i \in \{1, 2, ..., 25\}$, вважатимемо попарно несумісними подіями із простору *S*, породженого поділом H_1, H_2, …, H_{25} множини Ω на підмножини H_i, $i \in \{1, 2, ..., 25\}$, $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$. Тоді відповідні статистичні ймовірності дорівнюють:

$$P_{100}^*(H_1)=\frac{1}{100},\quad P_{100}^*(H_2)=\frac{2}{100},\quad P_{100}^*(H_3)=\frac{3}{100},\quad P_{100}^*(H_4)=\frac{2}{100},$$

$$P_{100}^*(H_5)=\frac{1}{100},\quad P_{100}^*(H_6)=\frac{2}{100},\quad P_{100}^*(H_7)=\frac{4}{100},\quad P_{100}^*(H_8)=\frac{8}{100},$$

$$P_{100}^*(H_9)=\frac{4}{100},\quad P_{100}^*(H_{10})=\frac{2}{100},\quad P_{100}^*(H_{11})=\frac{3}{100},\quad P_{100}^*(H_{12})=\frac{8}{100},$$

$$P_{100}^*(H_{13})=\frac{20}{100},\quad P_{100}^*(H_{14}=\frac{8}{100},\quad P_{100}^*(H_{15})=\frac{3}{100},\quad P_{100}^*(H_{16})=\frac{2}{100},$$

$$P_{100}^*(H_{17})=\frac{4}{100},\quad P_{100}^*(H_{18})=\frac{8}{100},\quad P_{100}^*(H_{19})=\frac{4}{100},\quad P_{100}^*(H_{20})=\frac{2}{100},$$

$$P_{100}^*(H_{21})=\frac{1}{100},\quad P_{100}^*(H_{22})=\frac{2}{100},\quad P_{100}^*(H_{23})=\frac{3}{100},\quad P_{100}^*(H_{24})=\frac{2}{100},$$

$$P_{100}^*(H_{25})=\frac{1}{100}.$$

H_{21}	H_{22}	H_{23}	H_{24}	H_{25}
H_{16}	H_{17}	H_{18}	H_{19}	H_{20}
H_{11}	H_{12}	H_{13}	H_{14}	H_{15}
H_6	H_7	H_8	H_9	H_{10}
H_1	H_2	H_3	H_4	H_5

Рис. 2.2.2 а)

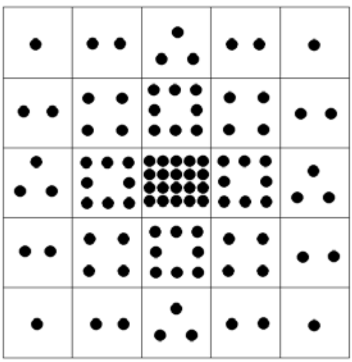


Рис. 2.2.2 б)

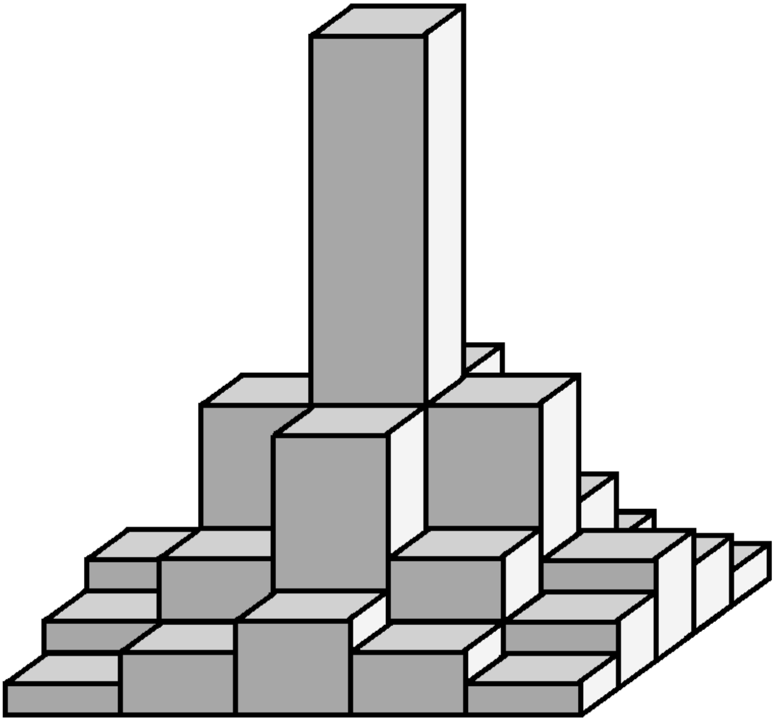


Рис. 2.2.3

Як видно з Рис. 2.2.2 а), та Рис. 2.2.2 б) точки влучення у множині H_{13} розташовані набагато щільніше, ніж в множинах H_1, H_2 і т.д. Тому природно назвати відношення статистичної ймовірності (а також і абсолютної частоти) попадання в множину H_i до міри цієї множини щільністю статистичної ймовірності (а також і точок влучення) у множині H_i відносно міри $m(H_i)$.

Таким чином, якщо

$$f_n^*(E) = \frac{P_n^*(H_i)}{m(H_i)},\ E \in H_i,\ i \in \{1, 2, ..., 25\},$$

то

$$P_n^*(H_i) = f_n^*(E) \cdot m(H_i) = \int_{H_i} f_n^*(E) \cdot m(dE),\ E \in H_i,\ i \in \{1, 2, ..., 25\},$$

а для довільного $A = \bigcup_{i \in I} H_i$, $I \subset \{1, 2, ..., 25\}$, за аналогією з попереднім, будемо мати ймовірнісну міру $P_n^*(A)$:

$$P_n^*(A)=\sum_{i\in I}P_n^*(H_i)=\sum_{i\in I}\int_{H_i}f_n^*(E)m(dE)=\int_A f_n^*(E)m(dE).$$

Якщо Ω квадрат із стороною довжиною 5 одиниць, H_i, $i\in\overline{1,25}$, – квадрат із стороною 1, тоді в геометричному тлумаченні $P_n^*(H_i)=f_n^*(E)\cdot m(H_i)$, $E\in H_i$, $i\in\overline{1,25}$, – об’єм прямого паралелепіпеда із основою H_i і висотою $f_n^*(E)$, $E\in H_i$, тобто

$$P_n^*(H_i)=\int_{H_i}f_n^*(E)m(dE),$$

а $P_n^*(A)=\sum_{i\in I}P_n^*(H_i)=\sum_{i\in I}\int_{H_i}f_n^*(E)m(dE)=\int_A f_n^*(E)m(dE)$ – сума об’ємів прямих паралелепіпедів з основами H_i, з яких складено множину A, і висотами $f_n^*(E)$, $E\in H_i$ (Рис. 2.2.3).

Приклад 2.2.4. В коробці є 100 кульок – білі, жовті, зелені, червоні, оранжеві, по 20 кульок кожного кольору. В результаті деякої серії випробувань, в кожному з яких із коробки навмання діставали одну кульку, фіксували її колір, після чого кульку повертали в коробку, з’ясувалося, що білі кульки діставали в 5% всіх випробувань, жовті в 15% випробувань, зелені в 40% випробувань, червоні в 25% випробувань, оранжеві – в 15% випробувань.

Нехай H_1 – множина білих кульок, H_2 – множина жовтих кульок, H_3 – множина зелених кульок, H_4 – множина червоних кульок, H_5 – множина оранжевих кульок. Нехай міра $m(H_i)$ множини H_i – кількість кульок у множині H_i.

Тоді $m(\Omega)=100$, $m(H_1)=20$, $m(H_2)=20$,

$$m(H_3)=20,\ m(H_4)=20,\ m(H_5)=20,$$

$$P_n^*(H_1)=0{,}05,\ P_n^*(H_2)=0{,}15,\ P_n^*(H_3)=0{,}40,$$

$$P_n^*(H_4)=0{,}25,\ P_n^*(H_5)=0{,}15.$$

$$f_n^*(E)=\begin{cases}\dfrac{0{,}05}{20}, & \text{коли } E\in H_1,\\ \dfrac{0{,}15}{20}, & \text{коли } E\in H_2,\\ \dfrac{0{,}40}{20}, & \text{коли } E\in H_3,\\ \dfrac{0{,}25}{20}, & \text{коли } E\in H_4,\\ \dfrac{0{,}15}{20}, & \text{коли } E\in H_5.\end{cases}$$

Таким чином кількість попадань у множину H_3 найбільша, а оскільки всі $m(H_i)$ однакові, то попадання у множину H_3 виявляються найчастішими, точки влучення у множині H_3 виявляються розташованими найщільніше в порівнянні з множинами H_1, H_2, H_4, H_5, тобто на кожну підмножину одиничної міри множини H_3 в середньому припадає більше точок влучення, ніж на кожну підмножину одиничної міри в множинах H_1, H_2, H_4, H_5.

Задачі

2.2.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Щільність розподілу статистичних ймовірностей може набувати від'ємних значень.

2. Щільність розподілу статистичних ймовірностей може набувати значень, більших за 1.

3. Величина $\sum\limits_{i\in I,\,E\in H_i} f_n^*(E)m(H_i)$ може набувати значень, більших за 1.

4. Функція $f_n^*(E)=\dfrac{P_n^*(H_i)}{m(H_i)}$, $E\in H_i$, може набувати різних значень при різних $E\in H_i$.

5. Якщо $A=\bigcup\limits_{i\in I} H_i$, $I\subset\{1,2,\ldots,k\}$, $\bigcup\limits_{i=1}^{k} H_i=\Omega$, то $P_n^*(A)=$ $=\sum\limits_{i\in I,\,E\in H_i} f_n^*(E)m(H_i)$.

2.2.2. 1. В мішень в тірі виконано 100 пострілів. При цьому влучення за межі мішені неможливе. Радіус мішені – 55 см. Якщо віддаль точки влучення від центра мішені не перевищує 5 см, стрільцеві нараховується 10 очок, якщо віддаль точки влучення від центра мішені в межах від 5 см до 10 см – 9 очок, якщо віддаль в межах від 10 см до 15 см – 8 очок, і т.д., якщо віддаль точки влучення від центра мішені більша, ніж 50 см – 0 очок.

Після виконання 100 пострілів з'ясувалось, що стрілець 10 очок отримував 40 разів, 9 очок – 20 разів, 8 очок – 10 разів, 7 очок – 5 разів, 6 очок – 8 разів, 5 очок – 5 разів, 4 очки – 5 разів, 3 очки – 2 рази, 2 очки – 3 рази, 1 очко – 1 раз, 0 очок – 1 раз.

Побудувати графік щільності розподілу статистичних ймовірностей на заданій множині Ω, якщо Ω – відрізок [0, 55), H_i – відрізки [5(*i*-1), 5*i*), $i \in \{1, 2, ..., 11\}$.

2. За даними 2.2.2.1 обчислити статистичну ймовірність того, що стрілець при виконанні пострілів отримував не менше, ніж 7 очок.

2.3. Інтервальний розподіл статистичних ймовірностей на неперервній множині точок

Розглянемо множину Ω елементарних подій, яку можна ототожнювати з числовим проміжком $\langle a;b \rangle$ (тобто проміжком виду $[a,b]$, або $[a,b)$, або $(a,b]$, або (a,b)). Таку *множину* Ω називають *континуальною* або *неперервною*. В цьому випадку кожне число $x \in < a;b >$, яке ототожнюється з певною елементарною подією, теоретично може бути спостереженим значенням в результаті експерименту, що пов'язаний з множиною Ω.

Приклад 2.3.1. Нехай випробування – це постріл в круглу мішень радіуса $r = 1$, а кожна елементарна подія ототожнюється з відстанню точки влучення від центра мішені. При цьому попадання кулі за межі мішені неможливе. Тоді $\Omega = [0;1)$ – неперервна множина елементарних подій, кожна з яких ототожнюється з певним числом (точкою) $x \in [0;1)$.

Надалі вважатимемо, що $\Omega = [a;b)$, $-\infty < a < b < \infty$.

Поділимо проміжок $\Omega = [a;b)$ точками $a_0 = a$, $a_i = a_{i-1} + h$, $h = \dfrac{b-a}{k} > 0$, $i \in \overline{1, k}$, на k проміжків $[a_{i-1}; a_i)$ однакової довжини. Число $h = \dfrac{b-a}{k}$ називається *кроком поділу*. Для кожного $i \in \overline{1, k}$ підрахуємо кількість спостережених значень $x_{\text{сп}\, j}$, що попадають у проміжок $[a_{i-1};a_i)$. Дістанемо числа n_i – *абсолютні частоти попадання спостережених значень* $x_{\text{сп}\,j}$ *у проміжки* $[a_{i-1};a_i)$, причому $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Число $P_n^*([a_{i-1};a_i)) = \frac{n_i}{n}$ називають *статистичною ймовірністю* або *відносною частотою* попадання спостережених значень $x_{\text{сп}\,j}$, $j \in \overline{1,n}$, у проміжок $[a_{i-1};a_i)$, $i \in \overline{1,k}$. При цьому якщо $A = \bigcup_{i \in I} [a_{i-1}, a_i)$, $I \subset \{1, 2, ..., k\}$, то $P_n^*(A) = \sum_{i \in I} P_n^*([a_{i-1}, a_i))$. Як події розглядатимемо разом з $\varnothing$ лише всеможливі об'єднання проміжків $[a_{i-1};a_i)$ по одному, по два, по три і т.д., по $k-1$, всіх k проміжків $[a_{i-1},a_i)$, тобто розглядатимемо простір подій *S*, породжений поділом множини $\Omega = [a,b)$ на підмножини $H_i = [a_{i-1},a_i)$, $i \in \overline{1,k}$.

Таблицями виду 2.3.1 задають *інтервальний розподіл абсолютних частот*, а таблицями виду 2.3.2 задають *інтервальний розподіл статистичних ймовірностей* (*відносних частот*) на множині $\Omega = [a, b)$ за підмножинами $[a_{i-1},a_i)$, $i \in \overline{1,k}$.

Табл. 2.3.1

$[a_{i-1};a_i)$	$[a_0;a_1)$	$[a_1;a_2)$	...	$[a_{k-1};a_k)$
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Табл. 2.3.2

$[a_{i-1};a_i)$	$[a_0;a_1)$	$[a_1;a_2)$	...	$[a_{k-1};a_k)$
$P_n^*([a_{i-1};a_i))$	$P_n^*([a_0;a_1))$	$P_n^*([a_1;a_2))$	...	$P_n^*([a_{k-1};a_k))$

Для складання цих таблиць, як і у дискретному випадку, спостережені значення записують у вигляді варіаційного ряду.

У фізичній інтерпретації інтервальний розподіл абсолютних частот – це розподіл маси *n* за проміжками $[a_{i-1},a_i)$, $i \in \overline{1,k}$, а інтервальний розподіл статистичних ймовірностей (відносних частот) – це розподіл одиничної маси за вказаними проміжками.

Приклад 2.3.2. Нехай $\Omega = [0;1)$ з прикладу 2.3.1 і виконано $n = 100$ пострілів, результати яких наведено у таблицях 2.3.3 і 2.3.4. Цими таблицями описуються конкретні інтервальні розподіли абсолютних і відносних частот.

Табл. 2.3.3

$[a_{i-1};a_i)$	$\left[0;\frac{1}{10}\right)$	$\left[\frac{1}{10};\frac{2}{10}\right)$	$\left[\frac{2}{10};\frac{3}{10}\right)$	$\left[\frac{3}{10};\frac{4}{10}\right)$	$\left[\frac{4}{10};\frac{5}{10}\right)$
n_i	50	20	10	10	4

	$\left[\frac{5}{10};\frac{6}{10}\right)$	$\left[\frac{6}{10};\frac{7}{10}\right)$	$\left[\frac{7}{10};\frac{8}{10}\right)$	$\left[\frac{8}{10};\frac{9}{10}\right)$	$\left[\frac{9}{10};1\right)$
	0	2	1	2	1

Табл. 2.3.4

$[a_{i-1};a_i)$	$\left[0;\frac{1}{10}\right)$	$\left[\frac{1}{10};\frac{2}{10}\right)$	$\left[\frac{2}{10};\frac{3}{10}\right)$	$\left[\frac{3}{10};\frac{4}{10}\right)$	$\left[\frac{4}{10};\frac{5}{10}\right)$
$P^*_{100}([a_{i-1};a_i))$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.04

	$\left[\frac{5}{10};\frac{6}{10}\right)$	$\left[\frac{6}{10};\frac{7}{10}\right)$	$\left[\frac{7}{10};\frac{8}{10}\right)$	$\left[\frac{8}{10};\frac{9}{10}\right)$	$\left[\frac{9}{10};1\right)$
	0	0.02	0.01	0.02	0.01

Розглянемо функцію $f_n^*(x)$, що набуває значень $\frac{1}{h}P_n^*([a_{i-1};a_i))$ на проміжках $[a_{i-1};a_i)$, $i\in\overline{1,k}$, де $h=\frac{b-a}{k}$, $a_0=a$, $a_i=a_{i-1}+h=a+i\cdot h$, $i\in\overline{1,k}$. Графік такої функції називають *гістограмою* інтервального розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот), який визначається за табл. 2.3.2.

Функцію $f_n^*(x)$ називають *усередненою* (або *середньою*) *щільністю розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) на проміжку* $[a;b)$ за інтервалами $[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,k}$.

У фізичній інтерпретації $f_n^*(x)$ – це усереднена щільність розподілу одиничної маси на проміжку $[a;b)$ за інтервалами $[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,k}$, оскільки на кожному інтервалі $[a_{i-1};a_i)$ значення $f_n^*(x)$ одержується як маса $P_n^*([a_{i-1};a_i))$, що припадає на цей інтервал, поділена на довжину інтервала $h=a_i-a_{i-1}$, тобто як *середня щільність* маси на інтервалі $[a_{i-1};a_i)$.

Приклад 2.3.3. Якщо інтервальний розподіл статистичних ймовірностей задано таблицею 2.3.4, то усереднена щільність цього розподілу має вигляд:

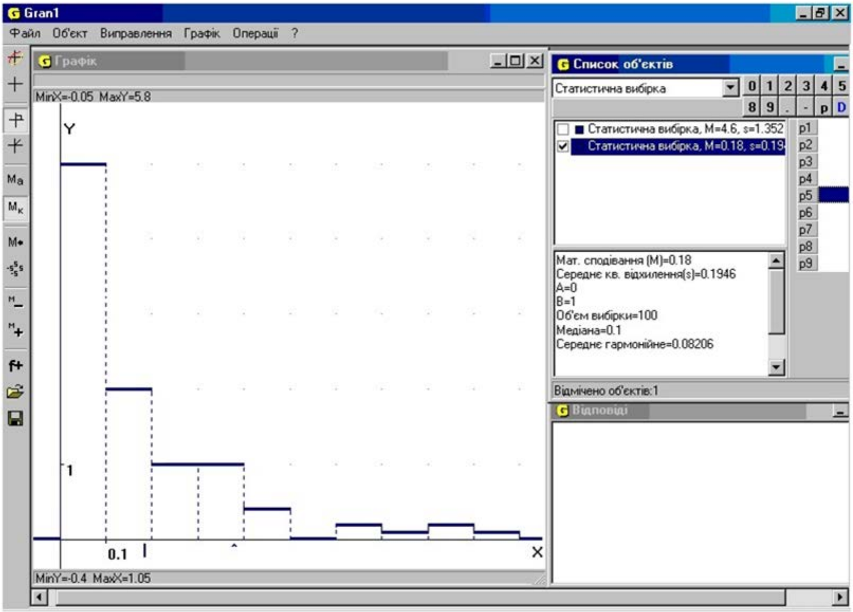


Рис. 2.3.1

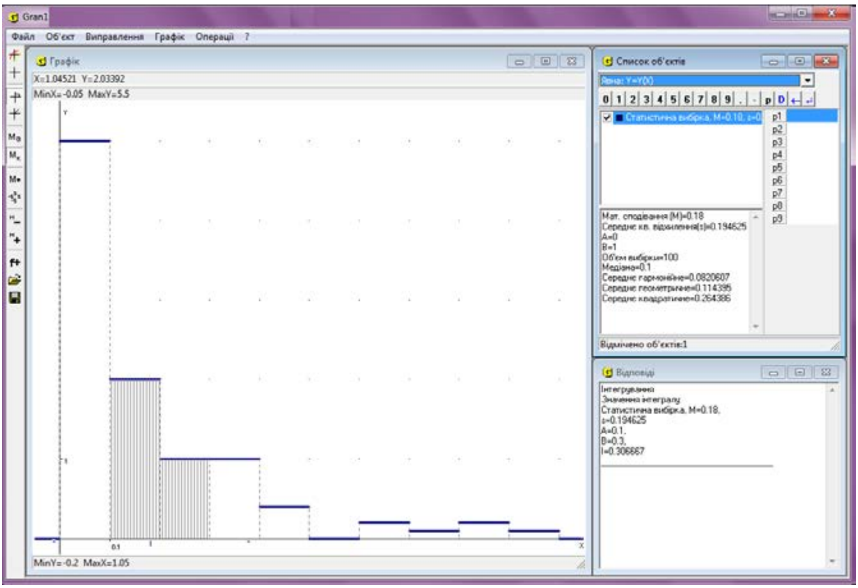


Рис. 2.3.2

$$f_n^*(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x<0,\\ 5, & \text{коли } 0\le x<0.1,\\ 2, & \text{коли } 0.1\le x<0.2,\\ 1, & \text{коли } 0.2\le x<0.3,\\ 1, & \text{коли } 0.3\le x<0.4,\\ 0.4, & \text{коли } 0.4\le x<0.5,\\ 0, & \text{коли } 0.5\le x<0.6,\\ 0.2, & \text{коли } 0.6\le x<0.7,\\ 0.1, & \text{коли } 0.7\le x<0.8,\\ 0.2, & \text{коли } 0.8\le x<0.9,\\ 0.1, & \text{коли } 0.9\le x<1,\\ 0, & \text{коли } x\ge 1.\end{cases}$$

На Рис. 2.3.1 зображено гістограму цього інтервального розподілу статистичних ймовірностей. Оскільки при $x\in[a_{i-1};a_i)$ $P_n^*([a_{i-1};a_i))=f_n^*(x)h$ – це площа прямокутника з основою $[a_{i-1};a_i)$ і висотою $f_n^*(x)$, то

$$P_n^*([a_{i-1};\,a_i))=f_n^*(x)\cdot h=\int\limits_{[a_{i-1};\,a_i)} f_n^*(x)dx=\int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)dx.$$

Отже, з геометричної точки зору $P_n^*([a_{i-1};\,a_i))$ – це площа вказаного прямокутника, а статистична ймовірність $P_n^*(A)$ попадання спостережених значень в множину *A*, що є об'єднанням деяких проміжків $[a_{i-1};a_i)$: $A=\bigcup\limits_{i\in I}[a_{i-1},a_i)$, $I\subset\{1,2,...,k\}$, визначається за рівністю

$$P_n^*(A)=\sum_{i\in I}P_n^*([a_{i-1},a_i))=\sum_{i\in I}\int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)dx=\int\limits_A f_n^*(x)dx.$$

Останнє число називають інтегралом від функції $f_n^*(x)$ на множині *A* за мірою, яка є довжиною.

Щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей має такі властивості:

1. $f_n^*(x)\ge 0$, $x\in(-\infty,+\infty)$;   2. $\int\limits_{\Omega} f_n^*(x)dx=1$.

Приклад 2.3.4. Якщо в експерименті, описаному у прикладі 2.3.2, подія A – це попадання у множину точок, які віддалені від центра мішені на відстань, меншу, ніж 0.30, і не меншу, ніж 0.10, тоді $P_n^*(A) = \int\limits_{[0.10;\,0.30)} f_n^*(x)dx = 0.3$ – інтеграл від функції $f_n^*(x)$ на проміжку [0.10, 0.30), що дорівнює сумі площ заштрихованих прямокутників на Рис. 2.3.2, і значення цього інтеграла є ймовірнісною мірою попадання у множину A.

Нагадаємо, що як події разом з порожньою множиною $\varnothing$ розглядаються лише всеможливі об'єднання інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,k}$, тобто множини виду $A = \bigcup\limits_{i \in I} [a_{i-1}, a_i)$, $I \subset \{1, 2, ..., k\}$, які є підмножинами множини $\Omega = [a, b)$, а також елементами простору подій S, породженого поділом множини $\Omega = [a, b)$ на підмножини $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,k}$.

Задачі

2.3.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожен простір Ω елементарних подій можна вважати неперервною множиною.
2. Неперервна множина Ω ототожнюється з певним проміжком $[a; b)$.
3. Для неперервної множини Ω статистичні ймовірності подій $A \subset \Omega$, $A \in S$, визначаються так само, як і для дискретної множини Ω.
4. Щоб описати інтервальний розподіл статистичних ймовірностей, підраховують абсолютні та відносні частоти попадання спостережених значень у проміжки, які попарно не перетинаються і об'єднання яких дорівнює Ω.
5. Гістограма – це графік щільності інтервального розподілу статистичних ймовірностей.
6. Якщо відома щільність $f_n^*(x)$ інтервального розподілу статистичних ймовірностей за інтервалами $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \{1, 2, ..., k\}$, то можна визначити статистичну ймовірність попадання в будь-яку підмножину $A = \bigcup\limits_{i \in I} [a_{i-1}, a_i)$, $I \subset \{1, 2, ..., k\}$, множини Ω, складену з інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$.

2.3.2. 1. Побудувати варіаційний ряд спостережених значень відхилень точки падіння снаряда від цілі:

-52, -50, 47, 20, 17, 10, 14, 20,-50, -5, -20, 2, -27, -10, -15, 40, -19, 45, 34, -20, -29, -30, 15, -10, 10, 12, 14, 20, -33, -40, 50, 48, -10, 14, 10, -32, 50, -22, 43, 2, -5, 7, 14, -8, -5, 0, 23, -40, 17, 3.

2. Використовуючи одержаний варіаційний ряд з 2.3.2.1, побудувати інтервальні розподіли абсолютних і відносних частот (статистичних ймовірностей), взявши інтервали довжиною 10 з центрами в точках –50, -40, -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, 40, 50.

3. За даними з 2.3.2.2 визначити функцію $f_n^*(x)$ і побудувати її графік.

4. Використовуючи $f_n^*(x)$ з 2.3.2.3, визначити ймовірнісну міру P_n^* влучення точки падіння снаряда в інтервал:

а) (-35, 35); б) (-25, 25); в) (-5, 55).

2.4. Узагальнені статистичні ймовірності

Використовуючи функцію $f_n^*(x)$, можна ввести нову ймовірнісну міру $\widetilde{P}_n^*([\alpha,\beta))$ для довільних проміжків $[\alpha,\beta)\subset(-\infty,+\infty)$. Сукупністю таких проміжків породжується новий простір подій $\widetilde{S}\supset S$.

Нехай $\Omega=[a,b)=\bigcup\limits_{i=1}^{k}[a_{i-1},a_i)$, сукупність S подій породжена поділом множини Ω на підмножини $[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,k}$, тобто $A=\bigcup\limits_{i\in I}[a_{i-1},a_i)\in S$, $I\subset\{1,2,...,k\}$.

Нехай $[\alpha,\beta)\subset(-\infty,\infty)$, $[\alpha,\beta)\in\widetilde{S}$,

$$m_*([\alpha,\beta))=\max_{\bigcup[a_{i-1},a_i)\subset[\alpha,\beta)\cap\Omega}P_n^*\left(\bigcup[a_{i-1},a_i)\right),$$

$$m^*([\alpha,\beta))=\min_{[\alpha,\beta)\cap\Omega\subset\bigcup[a_{i-1},a_i)}P_n^*\left(\bigcup[a_{i-1},a_i)\right).$$

Покладемо

$$\widetilde{P}_n^*([\alpha,\beta))=m_*([\alpha,\beta))+\frac{1}{2}(m^*([\alpha,\beta))-m_*([\alpha,\beta)))=$$

$$=\frac{m_*([\alpha,\beta))+m^*([\alpha,\beta))}{2}.$$

Очевидно

$$m^*([\alpha,\beta)) - m_*([\alpha,\beta)) \le c \cdot 2h,$$

де $h = a_i - a_{i-1} > 0$, $i \in \overline{1,k}$, $c = \max\limits_{x\in[a,b)} f_n^*(x) < \infty$,

$$P_n^*\left(\bigcup_{i\in I}[a_{i-1},a_i)\right) = \sum_{i\in I} P_n^*([a_{i-1},a_i)) = \sum_{i\in I}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)dx,\ I \subset \{1,2,...,k\}.$$

При цьому

$$m_*([\alpha,\beta)) \le \widetilde{P}_n^*([\alpha,\beta)) \le m_*([\alpha,\beta)) + ch,$$

тобто

$$0 \le \widetilde{P}_n^*([\alpha,\beta)) - \max_{\bigcup[a_{i-1},a_i)\subset[\alpha,\beta)\cap\Omega} P_n^*\left(\bigcup[a_{i-1},a_i)\right) \le ch.$$

Очевидно, коли $h \to 0$, то

$$m^*([\alpha,\beta)) - m_*([\alpha,\beta)) =$$

$$= \min_{[\alpha,\beta)\cap\Omega\subset\bigcup[a_{i-1},a_i)} P_n^*\left(\bigcup[a_{i-1},a_i)\right) - \max_{\bigcup[a_{i-1},a_i)\subset[\alpha,\beta)\cap\Omega} P_n^*\left(\bigcup[a_{i-1},a_i)\right) \to 0,$$

$$\widetilde{P}_n^*([\alpha,\beta)) \to \max_{\bigcup[a_{i-1},a_i)\subset[\alpha,\beta)\cap\Omega} P_n^*\left(\bigcup[a_{i-1},a_i)\right).$$

Оскільки при довільних $[\alpha,\beta) \subset (-\infty,\infty)$ $0 \le m_*([\alpha,\beta)) \le$ $\le m^*([\alpha,\beta)) \le 1$, то коли $m_*([\alpha,\beta)) = 1$, природно покласти $\widetilde{P}_n^*([\alpha,\beta)) = 1$. Зокрема коли $\Omega \subset [\alpha,\beta)$, тоді буде $m_*([\alpha,\beta)) = 1$. Якщо $[\alpha,\beta) \cap \Omega = \varnothing$, тоді природно покласти $m^*([\alpha,\beta)) = 0$, $\widetilde{P}_n^*([\alpha,\beta)) = 0$.

Використовуючи функцію $f_n^*(x)$, можна ввести ймовірнісну міру $\widetilde{P}_n^*$ на просторі подій $\widetilde{S}$ і в інший спосіб, поклавши $\widetilde{P}_n^*([\alpha,\beta)) = \int_\alpha^\beta f_n^*(x)dx$ для довільних проміжків $[\alpha,\beta) \subset (-\infty,\infty)$.

Ймовірнісну міру $\widetilde{P}_n^*$, визначену на сукупності $\widetilde{S}$ підмножин множини $\widetilde{\Omega} = (-\infty,\infty)$ за мірою P_n^*, визначеною на сукупності *S*, будемо називати *узагальненою статистичною ймовірністю*, для якої функція $f_n^*(x)$ також називається *щільністю розподілу узагальнених статистичних імовірностей*. Очевидно, що коли $A \in S$, тоді $\widetilde{P}_n^*(A) = P_n^*(A)$.

Говорять, що міра $\widetilde{P}_n^*$ є продовженням міри P_n^* із сукупності подій S на сукупність $\tilde{S}$.

Зауважимо, що міру P_n^* можна продовжити із сукупності S підмножин множини Ω на сукупність $\tilde{S}$ і іншими способами, а не лише вказаними.

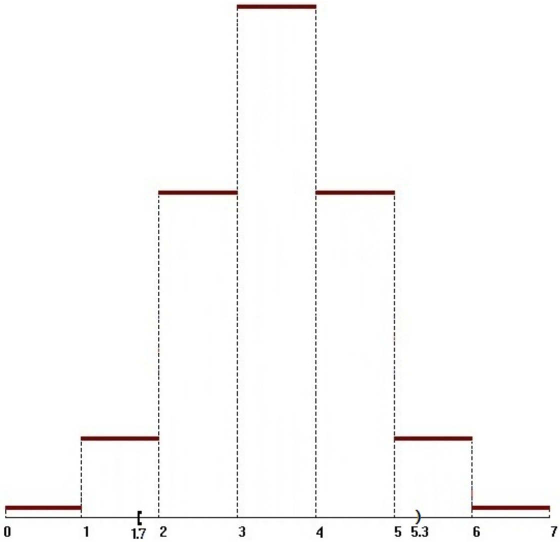


Рис. 2.4.1

Приклад 2.4.1. Нехай задано інтервальний розподіл статистичних імовірностей на множині $\Omega=[0,7)$ за інтервалами $[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,7}$, $a_0=0$, $h=a_i-a_{i-1}=1$:

Табл. 2.4.1

$[a_{i-1},a_i)$	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)	[5, 6)	[6, 7)
$P_n^*([a_{i-1},a_i))$	0.006	0.061	0.242	0.382	0.242	0.061	0.006

Тоді усереднена щільність $f_n^*(x)$ такого інтервального розподілу ймовірностей матиме вигляд:

$$f_n^*(x)=\begin{cases}0.006, & \text{коли } [0,1)\bigcup[6,7),\\ 0.061, & \text{коли } [1,2)\bigcup[5,6),\\ 0.242, & \text{коли } [2,3)\bigcup[4,5),\\ 0.382, & \text{коли } [3,4).\end{cases}$$

Графік функції $f_n^*(x)$ подано на Рис. 2.4.1.

Якщо $[\alpha, \beta) = [1.7, 5.3)$, тоді за попереднім

$$m_* = \max_{\bigcup[a_{i-1}, a_i) \subset [\alpha, \beta) \cap \Omega} P_n^*(\bigcup[a_{i-1}, a_i)) = P_n^*([2,3) \bigcup [3,4) \bigcup [4,5)) =$$

$$= P_n^*([2,3)) + P_n^*([3,4)) + P_n^*([4,5)) = 0.242 + 0.382 + 0.242 = 0.866;$$

$$m^* = \min_{[\alpha, \beta) \cap \Omega \subset \bigcup[a_{i-1}, a_i)} P_n^*(\bigcup[a_{i-1}, a_i)) = P_n^*([1,2) \bigcup [2,3) \bigcup [3,4) \bigcup [4,5) \bigcup$$

$$\bigcup [5,6)) == P_n^*([1,2)) + P_n^*([2,3)) + P_n^*([3,4)) + P_n^*([4,5)) + P_n^*([5,6)) =$$

$$= 0.061 + 0.242 + 0.382 + 0.242 + 0.061 = 0.988;$$

$$m^* - m_* = 0.988 - 0.866 = 0.122;$$

$$\widetilde{P}_n^*([1.7, 5.3)) = m_* + \frac{1}{2}(m^* - m_*) = 0.866 + 0.61 = 0.927.$$

Зауважимо, що інтервальний розподіл статистичних імовірностей, наведений в табл. 2.4.1, міг бути отриманий за розподілом, поданим в табл. 2.4.2, чи за будь яким іншим розподілом таким, що статистичні ймовірності попадання в інтервали $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,7}$, $a_0 = 0$, $h = a_i - a_{i-1} = 1$, вказані в Табл. 2.4.1, набувають вказаних в цій таблиці значень.

Приклад 2.4.2. Нехай задано інтервальний розподіл статистичних імовіностей на множині $\Omega = [0, 7)$ за інтервалами $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,35}$, $a_0 = 0$, $h = a_i - a_{i-1} = 0.2$:

Табл. 2.4.2

$[a_{i-1}, a_i)$	[0, 0.2)	[0.2, 0.4)	[0.4, 0.6)	[0.6, 0.8)	[0.8, 1.0)
$P_n^*([a_{i-1}, a_i))$	0.000	0.000	0.001	0.002	0.003

[1.0, 1.2)	[1.2, 1.4)	[1.4, 1.6)	[1.6, 1.8)	[1.8, 2.0)
0.005	0.007	0.011	0.016	0.022

[2.0, 2.2)	[2.2, 2.4)	[2.4, 2.6)	[2.6, 2.8)	[2.8, 3.0)
0.030	0.039	0.048	0.058	0.067

[3.0, 3.2)	[3.2, 3.4)	[3.4, 3.6)	[3.6, 3.8)	[3.8, 4.0)
0.073	0.078	0.080	0.078	0.073

[4.0, 4.2)	[4.2, 4.4)	[4.4, 4.6)	[4.6, 4.8)	[4.8, 5.0)
0.067	0.058	0.048	0.039	0.030

[5.0, 5.2)	[5.2, 5.4)	[5.4, 5.6)	[5.6, 5.8)	[5.8, 6.0)
0.022	0.016	0.011	0.007	0.005

[6.0, 6.2)	[6.2, 6.4)	[6.4, 6.6)	[6.6, 6.8)	[6.8, 7.0)
0.003	0.002	0.001	0.000	0.000

Тоді усереднена щільність $f_n^*(x)$ такого інтервального розподілу статистичних імовірностей матиме вигляд

$$f_n^*(x)=\begin{cases} 0.000, & \text{коли } x\in[0,0.2)\bigcup[0.2,0.4)\bigcup[6.6,6.8)\bigcup[6.8,7.0), \\ 0.005, & \text{коли } x\in[0.4,0.6)\bigcup[6.4,6.6), \\ 0.010, & \text{коли } x\in[0.6,0.8)\bigcup[6.2,6.4), \\ 0.015, & \text{коли } x\in[0.8,1.0)\bigcup[6.0,6.2), \\ 0.025, & \text{коли } x\in[1.0,1.2)\bigcup[5.8,6.0), \\ 0.035, & \text{коли } x\in[1.2,1.4)\bigcup[5.6,5.8), \\ 0.055, & \text{коли } x\in[1.4,1.6)\bigcup[5.4,5.6), \\ 0.080, & \text{коли } x\in[1.6,1.8)\bigcup[5.2,5.4), \\ 0.110, & \text{коли } x\in[1.8,2.0)\bigcup[5.0,5.2), \\ 0.150, & \text{коли } x\in[2.0,2.2)\bigcup[4.8,5.0), \\ 0.195, & \text{коли } x\in[2.2,2.4)\bigcup[4.6,4.8), \\ 0.240, & \text{коли } x\in[2.4,2.6)\bigcup[4.4,4.6), \\ 0.290, & \text{коли } x\in[2.6,2.8)\bigcup[4.2,4.4), \\ 0.335, & \text{коли } x\in[2.8,3.0)\bigcup[4.0,4.2), \\ 0.365, & \text{коли } x\in[3.0,3.2)\bigcup[3.8,4.0), \\ 0.390, & \text{коли } x\in[3.2,3.4)\bigcup[3.6,3.8), \\ 0.400, & \text{коли } x\in[3.4,3.6). \end{cases}$$

Графік цієї функції $f_n^*(x)$ подано на Рис. 2.4.2.

Якщо $[\alpha,\beta)=[1.7,5.3)$, тоді

$$m_*=\max_{\bigcup[a_{i-1},a_i)\subset[\alpha,\beta)\bigcap\Omega} P_n^*(\bigcup[a_{i-1},a_i))=P_n^*([1.8,2.0)\bigcup[2.0,2.2)\bigcup$$
$$\bigcup[2.2,2.4)\bigcup[2.4,2.6)\bigcup[2.6,2.8)\bigcup[2.8,3.0)\bigcup[3.0,3.2)\bigcup[3.2,3.4)\bigcup$$
$$\bigcup[3.4,3.6)\bigcup[3.6,3.8)\bigcup[3.8,4.0)\bigcup[4.0,4.2)\bigcup[4.2,4.4)\bigcup[4.4,4.6)\bigcup$$
$$\bigcup[4.6,4.8)\bigcup[4.8,5.0)\bigcup[5.0,5.2))=0.022+0.030+0.039+0.048+$$
$$+0.058+0.067+0.073+0.078+0.080+0.078+0.073+0.067+$$
$$+0.058+0.048+0.039+0.030+0.022=0.910\,;$$

$$m^*=\min_{[\alpha,\beta)\bigcap\Omega\subset\bigcup[a_{i-1},a_i)} P_n^*(\bigcup[a_{i-1},a_i))=P_n^*([1.6,1.8)\bigcup[1.8,2.0)\bigcup$$
$$\bigcup[2.0,2.2)\bigcup[2.2,2.4)\bigcup[2.4,2.6)\bigcup[2.6,2.8)\bigcup[2.8,3.0)\bigcup[3.0,3.2)\bigcup$$
$$\bigcup[3.2,3.4)\bigcup[3.4,3.6)\bigcup[3.6,3.8)\bigcup[3.8,4.0)\bigcup[4.0,4.2)\bigcup[4.2,4.4)\bigcup$$
$$\bigcup[4.4,4.6)\bigcup[4.6,4.8)\bigcup[4.8,5.0)\bigcup[5.0,5.2)\bigcup[5.2,5.4))=$$

$= 0.016 + 0.022 + 0.030 + 0.039 + 0.048 + 0.058 + 0.067 + 0.073 +$
$+ 0.078 + 0.080 + 0.078 + 0.073 + 0.067 + 0.058 + 0.048 + 0.039 +$
$+ 0.030 + 0.022 + 0.016 = 0.942$;
$m^* - m_* = 0.942 - 0.910 = 0.032$;
$\widetilde{P}_n^*([1.7, 5.3)) = m_* + \frac{1}{2}(m^* - m_*) = 0.910 + 0.016 = 0.926$.

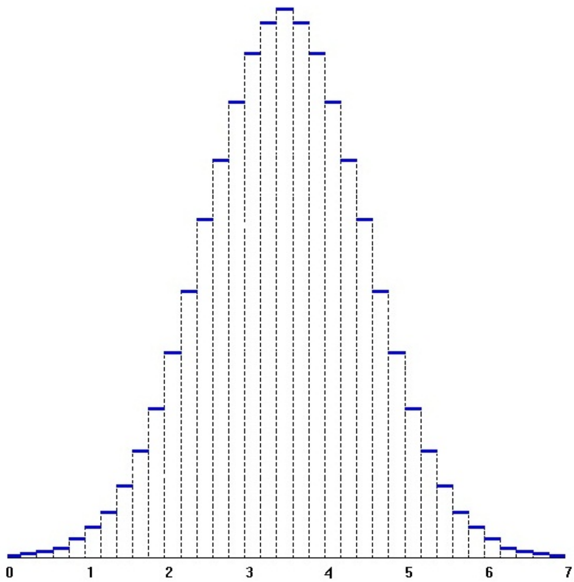


Рис. 2.4.2

Оскільки $m_* \le m^*$, бо $\bigcup_{i \in I_1} [a_{i-1}, a_i) \subset [\alpha, \beta) \cap \Omega \subset \bigcup_{i \in I_2} [a_{i-1}, a_i)$, де $I_1 \subset \{1, 2, ..., k\}$, $I_2 \subset \{1, 2, ..., k\}$, $I_1 \subset I_2$, то

$$m_* \le \widetilde{P}_n^*([\alpha, \beta)) \le \frac{1}{2}(m_* + m^*) \le m^*.$$

Як видно із прикладів 2.4.1, 2.4.2, із зменшенням довжини $h = a_i - a_{i-1}$ інтервала $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1, k}$, різниця $m^* - m_*$ також зменшується.

Приклад 2.4.3. Нехай задано інтервальний розподіл статистичних імовірностей на множині $\Omega = [0, 7)$ за інтервалами $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1, 35}$, $a_0 = 0$, $h = a_i - a_{i-1} = 0.2$, усереднена щільність

$f_n^*(x)$ якого має вигляд (як і в прикладі 2.4.1):

$$f_n^*(x)=\begin{cases}0.006, & \text{коли } [0,1)\bigcup[6,7),\\ 0.061, & \text{коли } [1,2)\bigcup[5,6),\\ 0.242, & \text{коли } [2,3)\bigcup[4,5),\\ 0.382, & \text{коли } [3,4).\end{cases}$$

При цьому на інтервалах $[\tilde{a}_{i-1},\tilde{a}_i)$, $i\in\overline{1,7}$, $\tilde{a}_0=0$, довжиною $\tilde{h}=\tilde{a}_i-\tilde{a}_{i-1}=1$ статистичні ймовірності розподілені рівномірно за інтервалами $[a_{i-1},a_i)$ довжиною $h=a_i-a_{i-1}=0.2$, тобто якщо $[a_{i-1},a_i)\subset[\tilde{a}_{k-1},\tilde{a}_k)$, $k\in\overline{1,7}$, $[a_{j-1},a_j)\subset[\tilde{a}_{k-1},\tilde{a}_k)$, $i\neq j$, то $P_n^*([a_{i-1},a_i))=P_n^*([a_{j-1},a_j))$.

Графік розглядуваної функції подано на Рис. 2.4.3.

Якщо $[\alpha,\beta)=[1.7,5.3)$, тоді (див. Рис. 2.4.3, а також приклади 2.4.1, 2.4.2)

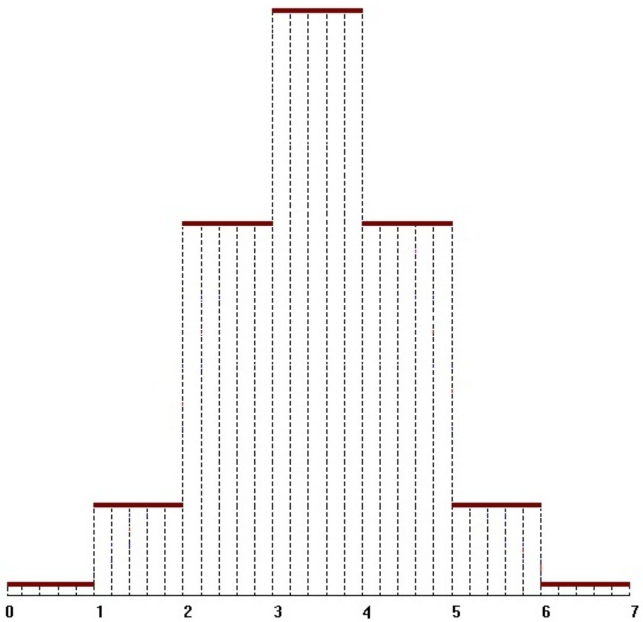


Рис. 2.4.3

$$m_* = \max_{\bigcup[a_{i-1},a_i)\subset[\alpha,\beta)\cap\Omega} P_n^*(\bigcup[a_{i-1},a_i)) = P_n^*([1.8, 2.0)\bigcup[2.0, 3.0)\bigcup$$
$$\bigcup[3.0, 4.0)\bigcup[4.0, 5.0)\bigcup[5.0, 5.2)) = P_n^*([1.8, 2.0)) + P_n^*([2.0, 3.0)) +$$
$$+ P_n^*([3.0, 4.0)) + P_n^*([4.0, 5.0)) + P_n^*([5.0, 5.2)) = 0.0122 + 0.2420 +$$
$$+ 0.3820 + 0.2420 + 0.0122 = 0.0244 + 0.8660 = 0.8904;$$
$$m^* = \min_{[\alpha,\beta)\cap\Omega\subset\bigcup[a_{i-1},a_i)} P_n^*(\bigcup[a_{i-1},a_i)) = P_n^*([1.6, 1.8)\bigcup[1.8, 2.0)\bigcup$$
$$\bigcup[2.0, 3.0)\bigcup[3.0, 4.0)\bigcup[4.0, 5.0)\bigcup[5.0, 5.2)\bigcup[5.2, 5.4)) = 0.0122 +$$
$$+ 0.0122 + 0.2420 + 0.3820 + 0.2420 + 0.0122 + 0.0122 = 0.0488 +$$
$$+ 0.8660 = 0.9148;$$
$$m^* - m_* = 0.9148 - 0.8904 = 0.0244;$$
$$\widetilde{P}_n^*([1.7, 5.3)) = m_* + \frac{1}{2}(m^* - m_*) = 0.8904 + 0.0122 = 0.9026.$$

Приклад 2.4.4. Нехай задано інтервальний розподіл статистичних ймовірностей на множині $\Omega = [0, 7)$ такий самий, як і в прикладі 2.4.3, і нехай $[\alpha, \beta) = [1, 6)$.

Тоді
$$m_* = \max_{\bigcup[a_{i-1},a_i)\subset[\alpha,\beta)\cap\Omega} P_n^*(\bigcup[a_{i-1},a_i)) = P_n^*([1, 2)\bigcup[2, 3)\bigcup[3, 4)\bigcup[4, 5)\bigcup$$
$$\bigcup[5, 6)) = 0.061 + 0.242 + 0.0382 + 0.242 + 0.061 = 0.988,$$
оскільки
$$[1, 2)\bigcup[2, 3)\bigcup[3, 4)\bigcup[4, 5)\bigcup[5, 6) \subset [1, 6),$$
$$m^* = \min_{[\alpha,\beta)\cap\Omega\subset\bigcup[a_{i-1},a_i)} P_n^*(\bigcup[a_{i-1},a_i)) = P_n^*([1, 2)\bigcup[2, 3)\bigcup[3, 4)\bigcup[4, 5)\bigcup$$
$$\bigcup[5, 6)) = 0.061 + 0.242 + 0.382 + 0.242 + 0.061 = 0.988,$$
оскільки
$$[1, 6) \subset [1, 2)\bigcup[2, 3)\bigcup[3, 4)\bigcup[4, 5)\bigcup[5, 6).$$
Таким чином $m_* = m^*$.

В розглядуваному випадку
$$[1, 6) = [1, 2)\bigcup[2, 3)\bigcup[3, 4)\bigcup[4, 5)\bigcup[5, 6) \in S,$$
$$\widetilde{P}_n^*([1, 6)) = m_* + \frac{1}{2}(m^* - m_*) = m_* = m^* = P_n^*([1, 6)) = 0.988.$$

Оскільки при довільних $[\alpha, \beta) \subset (-\infty, \infty)$ $0 \le m_* \le m^* \le 1$, то коли $m_* = 1$, природно покласти $\widetilde{P}_n^*([\alpha, \beta)) = 1$. Зокрема коли $\Omega \subset [\alpha, \beta)$, тоді буде $m_* = 1$. Якщо $[\alpha, \beta) \bigcap \Omega = \varnothing$, тоді природно покласти $m^* = 0$, $\widetilde{P}_n^*([\alpha, \beta)) = 0$.

Зауважимо, що ймовірнісні міри P_n^*, розглянуті в прикладах 2.4.1, 2.4.3, є гіпотетичні, знайдені за припущенням, що щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на проміжках $[0,1)$, $[1,2)$, $[2,3)$, $[3,4)$, $[4,5)$, $[5,6)$, $[6,7)$, набуває сталих значень відповідно 0.006, 0.061, 0.242, 0.382, 0.242, 0.061, 0.006, і значення 0 за межами проміжка $[0,7)$, що в дійсності може виявитись не так.

Якщо статистичні ймовірності попадання у будь-які підмножини V і W множини G однакові, коли міри цих підмножин однакові, тобто $P_n^*(V) = P_n^*(W)$, *коли* $m(V) = m(W)$, *тоді розподіл статистичних ймовірностей на множині G називається рівномірним.*

При цьому, якщо множина *G* дискретна (скінченна), тоді як міру $m(V)$ підмножини $V \subset G$ розглядатимемо кількість елементів у множині *V*, якщо ж множина *G* є деякий відрізок на числовій прямій чи деяка область на площині (в двохвимірному просторі) чи в просторі (тривимірному), тоді як міру $m(V)$ множини $V \subset G$ розглядатимемо відповідно суму довжин інтервалів, з яких складено *V*, чи суму площ областей, з яких складено *V*, чи суму об'ємів просторових областей, з яких складено *V*, і т.д.

Зокрема, розподіли статистичних ймовірностей на множинах Ω, розглянутих в прикладах 2.4.1-2.4.3, не є рівномірними.

Якщо розглянути інтервали $[i-1, i)$, $i \in \overline{1,7}$ із прикладу 2.4.1 і поділити кожен з них на 5 інтервалів довжиною 0.2, як це зроблено в прикладі 2.4.3, то статистичні ймовірності попадання в інтервали $[i-1, i)$ довжиною 1 залишаються такими самими, як і задані в інтервальному розподілі із прикладу 2.4.1, і (за припущенням) усереднена щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = [0,7)$ на кожному інтервалі $[i-1, i)$, $i \in \overline{1,7}$, набуває сталих значень, відповідно 0.006, 0.061, 0.242, 0.382, 0.242, 0.061, 0.006, тобто за припущенням статистичні ймовірності на кожному інтервалі $[i-1, i)$, $i \in \overline{1,7}$ розподілені рівномірно із щільністю $f_n^*(x)$, а тому (за припущенням) статистичні імовірності попадання у дві, складені із підінтервалів довжиною 0.2, підмножини $[\alpha, \beta) \subset [i-1, i)$ і $[\gamma, \delta) \subset [i-1, i)$, $i \in \overline{1,7}$, однакові, тобто $P_n^*([\alpha,\beta)) = P_n^*([\gamma,\delta))$, коли міри (довжини) цих множин $[\alpha,\beta)$ і $[\gamma,\delta)$ однакові, тобто $m([\alpha,\beta)) = m([\gamma,\delta))$, або, що те саме, однакові кількості інтервалів довжиною 0.2, з яких складені множини $[\alpha,\beta)$ і $[\gamma,\delta)$.

Однак припущення про рівномірність розподілу статистичних ймовірностей на інтервалах $[i-1,i)$, $i \in \overline{1,7}$, може виявитись таким, що не узгоджується із реальним розподілом статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \bigcup_{i=1}^{7}[i-1,i)$.

Приклад 2.4.5. Якщо усереднена щільність $f_n^*(x)$ задана у вигляді (Рис. 2.4.4):

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x \notin [0,5), \\ 0.05, & \text{коли} \quad x \in [0,1) \bigcup [4,5), \\ 0.20, & \text{коли} \quad x \in [1,2) \bigcup [3,4), \\ 0.5, & \text{коли} \quad x \in [2,3). \end{cases}$$

то насправді розподіл може мати вигляд, поданий в табл. 2.4.3.

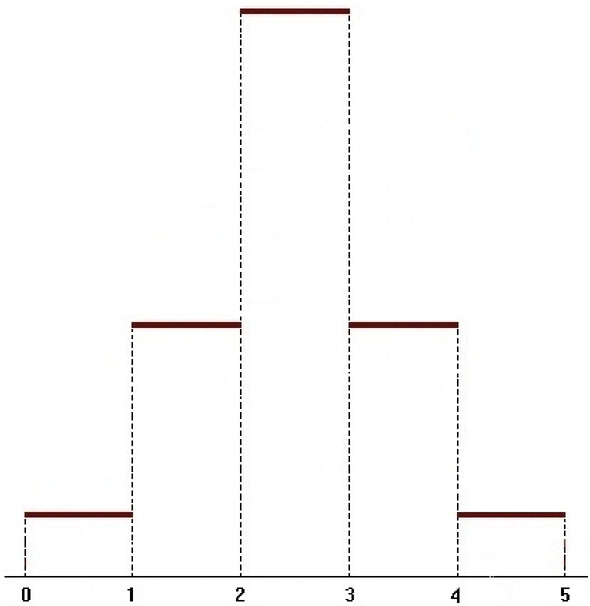


Рис. 2.4.4

Табл. 2.4.3

$[a_{i-1},a_i)$	[0; 0.2)	[0.2; 0.4)	[0.4; 0.6)	[0.6; 0.8)	[0.8; 1.0)
$P_n^*([a_{i-1},a_i))$	0.02	0	0.03	0	0
	[1; 1.2)	[1.2; 1.4)	[1.4; 1.6)	[1.6; 1.8)	[1.8; 2.0)
	0.05	0.05	0	0.05	0.05
	[2; 2.2)	[2.2; 2.4)	[2.4; 2.6)	[2.6; 2.8)	[2.8; 3.0)
	0.10	0.12	0.08	0.11	0.09
	[3; 3.2)	[3.2; 3.4)	[3.4; 3.6)	[3.6; 3.8)	[3.8; 4.0)
	0.05	0.05	0.10	0	0
	[4; 4.2)	[4.2; 4.4)	[4.4; 4.6)	[4.6; 4.8)	[4.8; 5.0)
	0.03	0.01	0.01	0	0

На Рис. 2.4.5 подано графік усередненої щільності $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega=[0,5)$ за інтервалами $[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,25}$, довжиною 0.2, за припущення, що на інтервалах $[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,25}$, статистичні ймовірності розподілені рівномірно.

Можна навести багато інших варіантів розподілів статистичних ймовірностей, за якими одержується один і той самий інтервальний розподіл статистичних ймовірностей за інтервалами $[a_{i-1},a_i)$ з однією і тією самою усередненою щільністю $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей, наведеною в прикладах 2.4.1, 2.4.3, 2.4.5.

Зокрема, може виявитись, що інтервальний розподіл статистичних ймовірностей, розглянутий в прикладі 2.4.5, одержаний за дискретним розподілом статистичних ймовірностей на множині $\{0.5;1.5;2.5;3.5;4.5\}$ із статистичними ймовірностями попадання у вказані точки відповідно 0.05, 0.20, 0.50, 0.20, 0.05, або на множині {0.20; 0.40; 0.60; 0.80; 1.00; 1.20; 1.40; 1.60; 1.80; 2.00; 2.20; 2.40; 2.60; 2.80; 3.00; 3.20; 3.40; 3.60; 3.80; 4.00; 4.20; 4.40; 4.60; 4.80; 5.00} із статистичними ймовірностями попадання у вказані точки відповідно 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.04, 0.04, 0.04, 0.04, 0.04, 0.10, 0.10, 0.10, 0.10, 0.10, 0.04, 0.04, 0.04, 0.04, 0.04, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01. Очевидно, можливі і інші розподіли статистичних ймовірностей на множині $\Omega=[0;5)$, за яких буде одержуватися один і той самий інтервальний розподіл статистичних ймовірностей на множині $\Omega=[0;5)$ за інтервалами $[i-1,i)$, $i\in\overline{1,5}$, з однією і тією самою усередненою щільністю

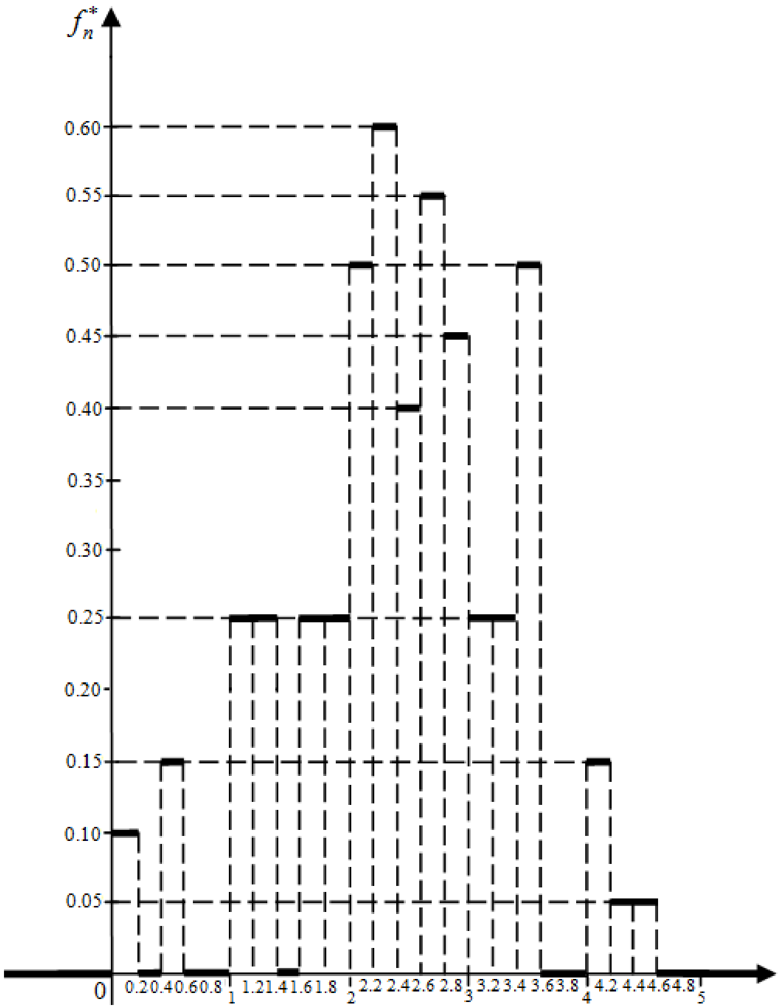


Рис. 2.4.5

$f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей, наведеною в прикладі 2.4.5.

Подібних прикладів можна навести як завгодно багато.

Зауважимо, що якщо не збережено варіаційний ряд, в якому зафіксовано місцеположення на числовій осі всіх спостережених точок, і не проводити додаткових спостережень для уточнення розподілу статистичних ймовірностей, то за заданим інтервальним розподілом статистичних ймовірностей побудувати новий інтервальний розподіл з дрібнішими інтервалами неможливо, якщо не робити припущення про те, що усереднена щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на заданих інтервалах стала і не змінюється з подрібненням заданих інтервалів, чи якихось інших припущень. Якщо ж таке припущення зробити, тоді новий інтервальний розподіл з дрібнішими інтервалами, як і наявний, будуть гіпотетичними, які можуть виявитись такими, що не цілком узгоджуються із спостереженими даними, зафіксованими у варіаційному ряді.

Разом з тим за заданим інтервальним розподілом статистичних ймовірностей можна побудувати новий інтервальний розподіл з укрупненими інтервалами, одержаними як об'єднання кількох заданих інтервалів, при цьому статистичні ймовірності попадання в укрупнені інтервали одержуються як суми статистичних ймовірностей попадання в інтервали, через об'єднання яких утворено укрупнений інтервал.

Задачі

2.4.1. Задано інтервальний розподіл статистичних імовірностей

$[a_{i-1}, a_i)$	$[0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$
$P_n^*([a_{i-1}, a_i))$	0.05	0.20	0.50	0.20	0.05

Визначити $\tilde{P}_n^*([\alpha, \beta))$, коли: $[\alpha,\beta)=[-1,6)$; $[\alpha,\beta)=[2.1,2.9)$; $[\alpha,\beta)=[0.5,1.5)$; $[\alpha,\beta)=[-5,-1)$; $[\alpha,\beta)=[7,15)$; $[\alpha,\beta)=[-2,3)$; $[\alpha,\beta)=[2,9)$.

2.5. Деякі числові характеристики дискретного розподілу статистичних ймовірностей в одновимірному координатному просторі

Приклад 2.5.1. Розглянемо в одновимірному координатному просторі два розподіли статистичних ймовірностей:

a)

x_i	0	1	2
$P_n^*(\{x_i\})$	0.1	0.8	0.1

b)

$x_i^/$	100	101	102
$P_n^*(\{x_i^/\})$	0.1	0.8	0.1

Ці розподіли відрізняються тим, що кожне із значень $x_i^/$ в розподілі *b*) на 100 більше, ніж в розподілі *a*). В розподілі *a*) статистичні ймовірності розподілені на множині із трьох точок x_1=0, x_2=1, x_3=2, що віддалені не далі, ніж на відстані, рівній 1, від точки x=1, а в розподілі b) статистичні ймовірності розподілені так само на множині із трьох точок $x_1^/$ =100, $x_2^/$ =101, $x_3^/$ =102, що віддалені не далі, ніж на відстані 1 від точки $x^/$ =101. Точки $\overline{x}$ =1 та $\overline{x}^/$ =101 природно назвати центрами розсіювання статистичних ймовірностей відповідно для розподілів a) та b). За ними характеризуються значення, навколо яких зосереджуються спостережені значення.

Нехай проведено n спостережень, в результаті яких дістали спостережені значення $x_{\text{сп}\,1}$, $x_{\text{сп}\,2}$, ..., $x_{\text{сп}\,n}$, на основі яких визначено дискретні розподіли абсолютних частот та відповідних статистичних ймовірностей, подані в таблицях 2.5.1. та 2.5.2.

Табл. 2.5.1

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Табл. 2.5.2

x_i	x_1	x_2	...	x_k
$P_n^*(\{x_i\})$	$P_n^*(\{x_1\})$	$P_n^*(\{x_2\})$	...	$P_n^*(\{x_k\})$

Точку, абсциса якої дорівнює середньому арифметичному спостережених значень:

$$m_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{\text{сп}\,i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{k} x_i P_n^*(\{x_i\}),$$

називають *центром розсіювання* (чи розподілу) статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$. Очевидно, центр розсіювання буде знаходитися якомога ближче до точок, на які припадає основна маса статистичних ймовірностей. Часто m_n^* позначають також через $\overline{x}$.

Важливою характеристикою розподілу статистичних ймовірностей, окрім центра розсіювання, є також величина, за якою характеризують розсіювання (чи скупченість) статистичних ймовірностей навколо центра розсіювання. До таких характеристик відносяться *дисперсія* розподілу статистичних ймовірностей, а також *середнє квадратичне відхилення.*

Дисперсією дискретного розподілу статистичних ймовірностей називають число

$$D_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{\text{сп } i} - m_n^*)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - m_n^*)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(x_i - m_n^*)^2 P_n^*(\{x_i\}).$$

Середнім квадратичним відхиленням називають число $\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*}$.

Приклад 2.5.2. Нехай є два розподіли:

c)

x_i	-1	0	1
$P_n^*(\{x_i\})$	0.1	0.8	0.1

,

d)

x_i'	-10	0	10
$P_n^*(\{x_i'\})$	0.1	0.8	0.1

.

Очевидно для кожного з цих розподілів $m_n^* = 0$, але в розподілі *d*) розсіювання статистичних ймовірностей навколо центра розсіювання $m_n^* = 0$ помітно більше, ніж в розподілі *c*).

Розглянуті характеристики досить важливі при опрацюванні результатів спостережень. Чим менше розсіювання (дисперсія), тим точнішим, вірогіднішим і надійнішим є усереднений результат спостережень (m_n^*) при достатньо великій кількості спостережень.

В фізичній інтерпретації центр розсіювання є центром мас одиничної маси, розподіленої на множині точок $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ так, що на точку x_i припадає маса $P_n^*(\{x_i\})$, а дисперсія – це момент інерції цієї одиничної маси відносно центра розсіювання.

Приклад 2.5.3. Якщо розподіл статистичних ймовірностей визначається за таблицею 2.4.3.

Табл. 2.4.3

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_n^*(\{x_i\})$	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

то $$m_n^* = 1\cdot 0 + 2\cdot\frac{1}{15} + 3\cdot\frac{3}{15} + 4\cdot\frac{2}{15} + 5\cdot\frac{4}{15} + 6\cdot\frac{5}{15} =$$

$$= \frac{1}{15}(1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 3 + 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 5) = \frac{69}{15} = 4\frac{3}{5},$$

$$D_n^* = \frac{1}{15}\left[\left(1-4\frac{3}{5}\right)^2\cdot 0+\left(2-4\frac{3}{5}\right)^2\cdot 1+\left(3-4\frac{3}{5}\right)^2\cdot 3+\right.$$

$$\left.+\left(4-4\frac{3}{5}\right)^2\cdot 2+\left(5-4\frac{3}{5}\right)^2\cdot 4+\left(6-4\frac{3}{5}\right)^2\cdot 5\right]\approx 1.7,$$

$$\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*}\approx 1.3.$$

Задачі

2.5.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. В безкоординатному просторі числові характеристики розподілу статистичних ймовірностей можна визначити через щільність їх розподілу.
2. Для кожного дискретного розподілу статистичних ймовірностей існує центр розсіювання.
3. Координата центра розсіювання статистичних ймовірностей є натуральним числом, коли усі спостережені значення – натуральні числа.
4. Для обчислення дисперсії треба спочатку обчислити координату центра розсіювання статистичних ймовірностей.

2.5.2. 1. Знайти центр розсіювання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретного розподілу статистичних ймовірностей $P_n^*(\{x_i\})$:

а)

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P_n^*(\{x_i\})$	0.10	0.20	0.40	0.10	0.10	0.07	0.03

б)

x_i	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$P_n^*(\{x_i\})$	0.02	0.10	0.70	0.08	0.04	0.03	0.01	0.01	0.01

в)

x_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P_n^*(\{x_i\})$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

г)

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P_n^*(\{x_i\})$	0.30	0.10	0.08	0.04	0.08	0.10	0.30

2.6. Деякі числові характеристики інтервального розподілу статистичних ймовірностей в одновимірному координатному просторі

Центром розсіювання статистичних ймовірностей на відрізку $[a,b)$ для інтервального розподілу, що описується усередненою щільністю $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = [a;b)$ за інтервалами $[a_{i-1};a_i)$, $i \in \overline{1,k}$, називають точку на осі *Ox,* абсциса якої дорівнює

$$\bar{x} = \int_a^b x\, f_n^*(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{a_{i-1}}^{a_i} x\, f_n^*(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{a_{i-1}}^{a_i} x \frac{P_n^*([a_{i-1};a_i))}{h} dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i P_n^*([a_{i-1};a_i)) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} \bar{x}_i k_n([a_{i-1},a_i)) \approx$$

$$\approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{x_{\text{сп}\,j} \in [a_{i-1},a_i)} x_{\text{сп}\,j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{\text{сп}\,i} = m_n^*,$$

де $h = a_i - a_{i-1}$, $\bar{x}_i = \int_{a_{i-1}}^{a_i} x \frac{1}{h} dx = \frac{a_i^2 - a_{i-1}^2}{2h} = \frac{a_{i-1} + a_i}{2}$, і це число $\bar{x}_i$ наближено дорівнює середньому арифметичному спостережених значень $x_{cn\,j}$, що потрапили в проміжок $[a_{i-1};a_i)$, $k_n([a_{i-1},a_i))$ – кількість спостережених значень $x_{cn\,j}$, що потрапили в проміжок $[a_{i-1},a_i)$.

Дисперсією інтервального розподілу статистичних ймовірностей із усередненою щільністю $f_n^*(x)$, $x \in [a;b)$, ($f(x) = 0$, коли $x \overline{\in} [a,b)$), називають число

$$D_n^* = \int_a^b (x - m_n^*)^2 f_n^*(x)\,dx,$$

а число $\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*}$ – називають *середнім квадратичним відхиленням* відповідного інтервального розподілу.

У фізичній інтерпретації центр розсіювання є центром мас одиничної маси, розподіленої на проміжку $[a;b)$ за інтервалами $[a_{i-1},a_i)$ із усередненою щільністю $f_n^*(x)$, а дисперсія – момент інерції цієї маси відносно центра розсіювання.

Приклад 2.6.1. Для розподілу, що визначається за табл. 2.6.1:

Табл. 2.6.1

$[a_{i-1};a_i)$	$\left[0;\frac{1}{10}\right)$	$\left[\frac{1}{10};\frac{2}{10}\right)$	$\left[\frac{2}{10};\frac{3}{10}\right)$	$\left[\frac{3}{10};\frac{4}{10}\right)$	$\left[\frac{4}{10};\frac{5}{10}\right)$
$P_{100}^*([a_{i-1};a_i))$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.04
	$\left[\frac{5}{10};\frac{6}{10}\right)$	$\left[\frac{6}{10};\frac{7}{10}\right)$	$\left[\frac{7}{10};\frac{8}{10}\right)$	$\left[\frac{8}{10};\frac{9}{10}\right)$	$\left[\frac{9}{10};1\right)$
	0	0.02	0.01	0.02	0.01

маємо:

$$m_n^* = 0.05\cdot 0.5 + 0.15\cdot 0.2 + 0.25\cdot 0.1 + 0.35\cdot 0.1 + 0.45\cdot 0.04 + \\ + 0.55\cdot 0 + 0.65\cdot 0.02 + 0.75\cdot 0.01 + 0.85\cdot 0.02 + 0.95\cdot 0.01 \approx 0.18,$$

Обчислюючи дисперсію D_n^*, одержимо:

$$D_n^* = \int_a^b (x-m_n^*)^2 f_n^*(x)dx = \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} (x-m_n^*)^2 f_n^*(x)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} (x-m_n^*)^2 \frac{P_n^*([a_{i-1},a_i))}{h} dx = \sum_{i=1}^k \frac{P_n^*([a_{i-1},a_i))}{h} \int_{a_{i-1}}^{a_i} (x-m_n^*)^2 dx .$$

Якщо довжини проміжків $[a_{i-1},a_i)$ досить малі, то значення інтеграла $\int_{a_{i-1}}^{a_i} (x-m_n^*)^2 dx$ наближено дорівнює значенню підінтегральної функції в середній точці проміжка $[a_{i-1},a_i)$, тобто в точці $x = \frac{a_{i-1}+a_i}{2}$, помноженому на довжину проміжка $h = a_i - a_{i-1}$, тому $\int_{a_{i-1}}^{a_i} (x-m_n^*)^2 dx \approx \left(\frac{a_{i-1}+a_i}{2} - m_n^*\right)^2 \cdot h$, звідки

$$D_n^* \approx \sum_{i=1}^k P_n^*([a_{i-1},a_i))\left(\frac{a_{i-1}+a_i}{2} - m_n^*\right)^2 .$$

Для розподілу, заданого таблицею 2.6.1, одержимо

$$D_n^* \approx (0.05-0.18)^2\cdot 0.50 + (0.15-0.18)^2\cdot 0.20 + (0.25-0.18)^2\cdot 0.10 + \\ + (0.35-0.18)^2\cdot 0.10 + (0.45-0.18)^2\cdot 0.04 + (0.55-0.18)^2\cdot 0.00 + \\ + (0.65-0.18)^2\cdot 0.02 + (0.75-0.18)^2\cdot 0.01 + (0.85-0.18)^2\cdot 0.02 + \\ + (0.95-0.18)^2\cdot 0.01 \approx 0.0375,$$

$$\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*} \approx \sqrt{0.0375} \approx 0.194 .$$

Задачі

2.6.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. В безкоординатному просторі координату центра розсіювання статистичних ймовірностей можна визначити, поділивши множину Ω на підмножини H_i, $i \in \overline{1,n}$.

2. В координатному просторі для кожного інтервального розподілу статистичних ймовірностей існує центр розсіювання.

3. Якщо $x_{\text{сп}\, j}$, $j \in \overline{1,\, n}$, – спостережені значення, а $\bar{x}$ – координата центра розсіювання статистичних ймовірностей, то

$$\min_{1\le j\le n} x_{\text{сп}\ j} \le \bar{x} \le \max_{1\le j\le n} x_{\text{сп}\ j}.$$

4. Для обчислення дисперсії спочатку треба обчислити координату центра розсіювання статистичних ймовірностей.

2.6.2. Знайти центр розсіювання та дисперсію інтервального розподілу статистичних ймовірностей:

а) заданого таблицею:

$[a_{i-1}, a_i)$	[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,5)	[5, 6)
$P_n^*([a_{i-1}, a_i))$	0.10	0.70	0.10	0.06	0.03	0.01

б) заданого усередненою щільністю розподілу:

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0.20 \text{ при } x \in [0,1) \\ 0.50 \text{ при } x \in [1,2) \\ 0.20 \text{ при } x \in [2,3) \\ 0.10 \text{ при } x \in [3,4) \\ 0 \quad\ \text{ при } x \,\overline{\in}\, [0,4) \end{cases}$$

2.7. Повторні випробування

Нехай задано простір елементарних подій Ω і деякий простір подій *S*, тобто сукупність *S* підмножин множини Ω, що задовольняє вимоги 1_s-3_s, а також задана ймовірнісна міра P_n^*, визначена на *S*. Нехай $A \in S$, $A \subset \Omega$ – деяка подія, і проводиться велика кількість серій по *m* випробувань, в кожному з яких спостерігають, відбувається подія *A* чи ні. Нехай за результатами досить великої кількості *n* разів по *m* випробувань встановлено, що і в першому із *m* випробувань, і в другому, і в третьому, і т.д., і в *m*-му подія *A* відбувається з однією і тією самою статистичною ймовірністю $P_n^*(A) = p$, і не відбувається з статистичною ймовірністю $P_n^*(\overline{A}) = 1 - P_n^*(A) = 1 - p = q$. Потрібно визначити ймовірнісну міру події, яка полягає в тому, що подія A у вказаній серії із m випробувань відбувається s разів.

Позначимо через E_i, $i = 1, 2, ..., m$, елементарну подію, яка відбувалася в i-му випробуванні. Тоді впорядкований набір $\tilde{E} = (E_1, E_2, ..., E_m)$ елементарних подій, кожна з яких є елементом множини Ω, можна розглядати як окремий наслідок всієї серії із m випробувань, яку також можна розглядати як окреме (комбіноване) випробування, що проводиться n разів. Наслідок $\tilde{E} = (E_1, E_2, ..., E_m)$ такої серії із m випробувань є елементом декартового добутку множини Ω, помноженої саму на себе m разів, тобто m-го декартового степеня множини Ω, який позначимо через $\tilde{\Omega} = \Omega^m$. Якщо при цьому i-та координата елемента $\tilde{E} \in \tilde{\Omega}$ належить до множини $A \subset \Omega$, то це означає, що при проведенні i-го випробування із серії із m вказаних випробувань подія A відбулася.

Множину $\tilde{\Omega} = \Omega^m$ всіх наслідків серії із m випробувань можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega} = \Omega^m &= (A + \overline{A})^m = (A + \overline{A}) \times (A + \overline{A}) \times \ldots \times (A + \overline{A}) = \\
&= \overline{A} \times \overline{A} \times \overline{A} \times \ldots \times \overline{A} \times \overline{A} + \overline{A} \times \overline{A} \times \overline{A} \times \ldots \times \overline{A} \times A + \\
&+ \overline{A} \times \overline{A} \times \overline{A} \times \ldots \times A \times \overline{A} + \overline{A} \times \overline{A} \times \overline{A} \times \ldots \times A \times A + \qquad (2.7.1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ A \times A \times A \times \ldots \times A \times \overline{A} + A \times A \times A \times \ldots \times A \times A.
\end{aligned}$$

Очевидно кількість доданків в сумі (2.7.1) дорівнює 2^m (стільки, скільки існує m-розрядних двійкових кодів, бо якщо на місці $\overline{A}$ записати 0, на місці A записати 1 і опустити знаки множення і знаки додавання, то отримаємо набір всіх m-розрядних двійкових кодів).

В геометричному тлумаченні доданки в сумі (2.7.1) являють собою m-вимірні паралелепіпеди, утворені як всеможливі декартові добутки множин A і $\overline{A}$ по m співмножників.

На Рис. 2.7.1 показано всеможливі декартові добутки множин A і $\overline{A}$ по 2 співмножники:

$$\Omega^2 = (A + \overline{A}) \times (A + \overline{A}) = \overline{A} \times \overline{A} + \overline{A} \times A + A \times \overline{A} + A \times A.$$

Введемо позначення:

$$H_0 = \overline{A} \times \overline{A} \times \overline{A} \times \ldots \times \overline{A} \times \overline{A},$$

$$
\begin{aligned}
&H_1 = \overline{A} \times \overline{A} \times \overline{A} \times \ldots \times \overline{A} \times A, \\
&H_2 = \overline{A} \times \overline{A} \times \overline{A} \times \ldots \times A \times \overline{A}, \\
&H_3 = \overline{A} \times \overline{A} \times \overline{A} \times \ldots \times A \times A, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&H_{2^m-2} = A \times A \times A \times \ldots \times A \times \overline{A}, \\
&H_{2^m-1} = A \times A \times A \times \ldots \times A \times A,
\end{aligned}
\qquad (2.7.2)
$$

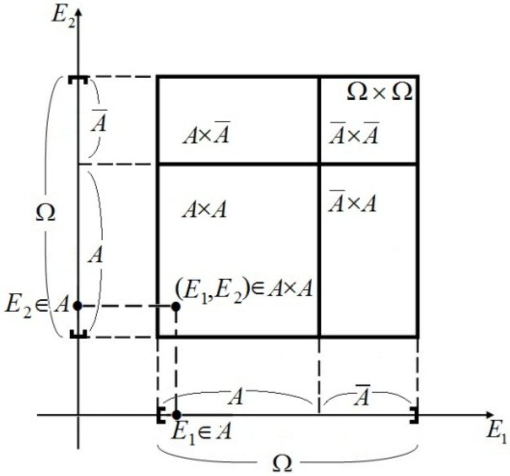


Рис. 2.7.1

Тоді об’єднання $\bigcup\limits_{i=0}^{2^m-1} H_i$ паралелепіпедів H_i, $i \in \overline{0, 2^m - 1}$, буде дорівнювати Ω^m (див. 2.7.1), і крім того $H_i \bigcap H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$. Розглянемо сукупність $\widetilde{S}$ підмножин множини $\widetilde{\Omega} = \Omega^m$, породжену поділом множини $\widetilde{\Omega} = \Omega^m$ на підмножини H_i, $i \in \overline{0, 2^m - 1}$, а всеможливі об’єднання $\bigcup\limits_{i \in I} H_i$, $I \subset \{0, 1, 2, \ldots, 2^m - 1\}$ будемо розглядати як події, що можуть відбутися при проведенні серії із m випробувань, кожна з яких розглядається як окреме випробування з можливими наслідками $(E_1, E_2, \ldots, E_m) \in \widetilde{\Omega} = \Omega^m$.

За припущенням при кожному i-му випробуванні в серії із m випробувань подія A відбувається із статистичною ймовірністю p, тобто $\widetilde{P}_n^*(\Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega \times A \times \Omega \times \ldots \times \Omega) = p$, де в добутку із m

співмножників $\Omega\times\Omega\times\ldots\times\Omega\times A\times\Omega\times\ldots\times\Omega$ на *i*-му місці знаходиться множник *A*, а на всіх інших місцях множник Ω, а міра $\widetilde{P}_n^*$ визначена на сукупності $\widetilde{S}$ підмножин множини $\widetilde{\Omega}=\Omega^m$. Якщо замість множника A поставити множник $\overline{A}$, тоді буде $\widetilde{P}_n^*(\Omega\times\Omega\times\ldots\times\Omega\times\overline{A}\times\Omega\times\ldots\times\Omega)=q=1-p$.

Позначимо декартовий добуток $\Omega\times\Omega\times\ldots\times\Omega\times A\times\Omega\times\ldots\times\Omega$, де множник *A* знаходиться на *i*-му місці, через A_i, і через $\overline{A}_i$, якщо множник A замінити на $\overline{A}$. При цьому $\widetilde{P}_n^*(A_i)=p$, $\widetilde{P}_n^*(\overline{A}_i)=q$, $A_i\in\widetilde{S}$, $\overline{A}_i\in\widetilde{S}$, де міра $\widetilde{P}_n^*$ визначена на просторі подій $\widetilde{S}$, породженому поділом множини $\widetilde{\Omega}=\Omega^m$ на підмножини H_i, $i\in\overline{0,2^m-1}$ (див. формули 2.7.2 і Рис. 2.7.1).

Оскільки за припущенням подія $A_i\in\widetilde{S}$ відбувається з статистичною ймовірністю p при будь якому $i\in\overline{1,m}$, і не відбувається з статистичною ймовірністю $q=1-p$ (тобто $p=\widetilde{P}_n^*(A_i)$, $A_i\in\widetilde{S}$, $q=\widetilde{P}_n^*(\overline{A}_i)$, $\overline{A}_i\in\widetilde{S}$), то добуток подій

$$\begin{aligned} A_1A_2\ldots A_s\overline{A}_{s+1}\ldots\overline{A}_m &= (A\times\Omega\times\ldots\times\Omega)\bigcap(\Omega\times A\times\Omega\times\ldots\times\Omega)\bigcap \\ &\bigcap\ldots\bigcap(\Omega\times\Omega\times\ldots\times\Omega\times A\times\Omega\times\ldots\times\Omega)\bigcap \qquad (2.7.3) \\ &\bigcap(\Omega\times\Omega\times\ldots\times\Omega\times\overline{A}\times\Omega\times\ldots\times\Omega)\bigcap\ldots\bigcap(\Omega\times\Omega\times\ldots\times\Omega\times\overline{A}) \end{aligned}$$

відбувається із статистичною ймовірністю

$$\widetilde{P}_n^*(A_1A_2\ldots A_s\overline{A}_{s+1}\ldots\overline{A}_m)=p\cdot p\cdot\ldots\cdot p\cdot q\cdot q\cdot\ldots\cdot q=p^sq^{m-s},$$

де в добутку 2.7.3 в перших *s* співмножниках знаходиться множник *A* на *i*-му місці, $i\in\overline{1,s}$, а на всіх інших місцях – множник Ω, а в наступних $m-s$ співмножниках на *i*-му місці знаходиться множник $\overline{A}$, $i\in\overline{s+1,m}$, і на всіх інших місцях – множник Ω.

Аналогічно для будь якого H_i, $i\in\overline{0,2^m-1}$, в якому множник *A* у відповідний декартовий добуток входить *s* разів, а інші *m* разів входить множник $\overline{A}$, будемо мати $\widetilde{P}_n^*(H_i)=p^sq^{m-s}$.

Очевидно таких декартових добутків H_i (див. формули 2.7.2) буде стільки, скількома способами із множини із *m* місць можна вибрати *s* місць для літери *A* (а отже і решту $m-s$ місць для літери $\overline{A}$), тобто кількість таких декартових добутків H_i, в які множник A входить s разів і решту ($m-s$) разів входить множник $\overline{A}$, дорівнює кількості різних невпорядкованих s-елементних підмножин в m-елементній множині. Такі невпорядковані s-елементні підмножини m-елементної множини називаються комбінаціями із m елементів по s елементів, їх кількість позначається через C_m^s і обчислюється за формулою

$$C_m^s = \frac{m(m-1)(m-2)...(m-(s-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot s} =$$
$$= \frac{m(m-1)(m-2)...\cdot 2\cdot 1}{(1\cdot 2\cdot 3...s)(m-s)(m-s-1)...\cdot 2\cdot 1} = \frac{m!}{s!(m-s)!}.$$

Якщо через $B_{m,s}$ позначити подію, яка полягає в тому, що подія A відбувається s разів в серії із вказаних m випробувань, то подію $B_{m,s}$ через A_i і $\overline{A}_j$, $i \neq j$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $j \in \{1, 2, ..., m\}$, можна подати так

$$B_{m,s} = A_1 A_2 \ldots A_s \overline{A}_{s+1} \overline{A}_{s+2} \ldots \overline{A}_m + \overline{A}_1 A_2 \ldots A_s A_{s+1} \overline{A}_{s+2} \ldots \overline{A}_m + \ldots +$$
$$+ \overline{A}_1 \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{m-s} A_{m-s+1} A_{m-s+2} \ldots A_m,$$

тобто подія $B_{m,s}$ відбувається, коли подія A в серії із m випробувань відбувається s разів за одним із вказаних варіантів. Очевидно, доданки в сумі $B_{m,s}$ попарно несумісні. Тому, враховуючи, що статистична ймовірність кожного такого доданку дорівнює $p^s q^{m-s}$, одержимо

$$\widetilde{P}_n^*(B_{m,s}) = C_m^s p^s q^{m-s}, \; s \in \{0, 1, 2, ..., m\}. \qquad (2.7.1)$$

Формулу (2.7.1) називають формулою Бернуллі.

Зауважимо, що $B_{m,s}$ є підмножиною декартового добутку $\widetilde{\Omega} = \Omega \times \Omega \times ... \times \Omega$ множини $\Omega = A + \overline{A}$, помноженої m разів самої на себе, тобто m-го декартового степеня множини Ω.

Наприклад, (див. Рис. 2.7.1), якщо $m = 2$, тоді

$$\widetilde{\Omega} = \Omega \times \Omega = (A + \overline{A}) \times (A + \overline{A}) = A \times A + A \times \overline{A} + \overline{A} \times A + \overline{A} \times \overline{A},$$
$$B_{2,2} = A \times A, \; B_{2,1} = A \times \overline{A} + \overline{A} \times A, \; B_{2,0} = \overline{A} \times \overline{A},$$

якщо $m = 3$, тоді

$$\widetilde{\Omega} = \Omega \times \Omega \times \Omega = A \times A \times A + A \times A \times \overline{A} + A \times \overline{A} \times A +$$
$$+ \overline{A} \times A \times A + A \times \overline{A} \times \overline{A} + \overline{A} \times A \times \overline{A} + \overline{A} \times \overline{A} \times A + \overline{A} \times \overline{A} \times \overline{A},$$
$$B_{3,3} = A \times A \times A, \; B_{3,2} = A \times A \times \overline{A} + A \times \overline{A} \times A + \overline{A} \times A \times A,$$

$$B_{3,1} = A \times \overline{A} \times \overline{A} + \overline{A} \times A \times \overline{A} + \overline{A} \times \overline{A} \times A\,,\ B_{3,0} = \overline{A} \times \overline{A} \times \overline{A}\,.$$

Якщо як наслідки розглядуваної серії із m випробувань розглядати кількість відбувань події A в такій серії, тоді за формулою Бернуллі можна отримати розподіл статистичних ймовірностей на множині таких наслідків, поданий в табл. 2.7.1.

Табл. 2.7.1

s	0	1	2	…	m-1	m
$\widetilde{P}_n^*(B_{m,s}) = C_m^s p^s q^{m-s}$	$C_m^0 p^0 q^m$	$C_m^1 p^1 q^{m-1}$	$C_m^2 p^2 q^{m-2}$	…	$C_m^{m-1} p^{m-1} q^1$	$C_m^m p^m q^0$

Зауважимо, що статистичні ймовірності за формулою Бернуллі (2.7.1) обчислюються так само, як і члени розкладу бінома Ньютона $(p+q)^m$ за степенями p і q: $(p+q)^m = \sum_{s=0}^{m} C_m^s p^s q^{m-s}$.

Наприклад,

$$(p+q)\cdot(p+q) = pp + pq + qp + qq\,,$$

$$(p+q)\cdot(p+q)\cdot(p+q) =$$

$$= ppp + pqp + qpp + qqp + ppq + pqq + qpq + qqq \text{ і т.д.}$$

Тому розподіл імовірнісної міри $\widetilde{P}_n^*$, поданий в табл. 2.7.1, називають біноміальними.

Приклад 2.7.1. Якщо $P_n^*(A) = \frac{1}{2}$ і $m = 10$, то ряд розподілу статистичних ймовірностей на множині наслідків серії із 10 випробувань стосовно кількості відбувань події A в такій серії матиме вигляд

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\widetilde{P}_n^*(B_{10,s})$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

Многокутник цього розподілу статистичних ймовірностей зображено на Рис. 2.7.2.

Якщо подія B полягає в тому, що кількості появ події A в серії із m випробувань є елементами множини $I \subset \{0,1,2,...,m-1,m\}$, тоді статистична ймовірність $\widetilde{P}_n^*(B)$ такої події B обчислюватиметься за формулою

$$\widetilde{P}_n^*(B) = \sum_{s \in I} \widetilde{P}_n^*(B_{m,s}) = \sum_{s \in I} C_m^s p^s q^{m-s} .$$

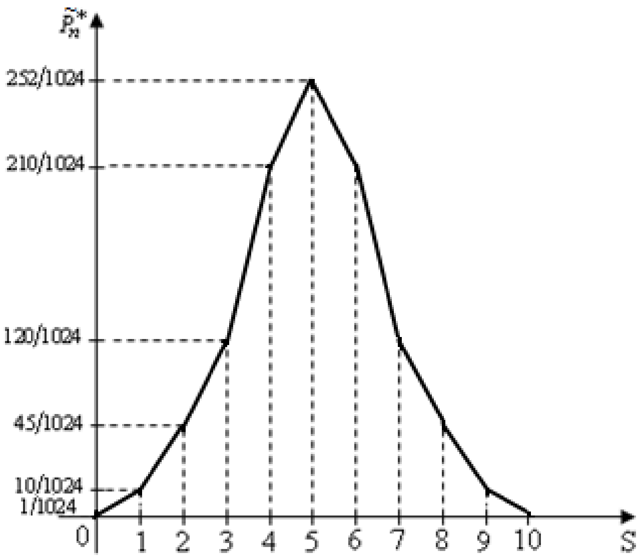


Рис. 2.7.2

Зокрема, якщо подія B полягає в тому, що кількість появ події A в серії із m випробувань буде знаходитись в межах від m_1 до m_2 включно, тоді статистична ймовірність події B обчислюватиметься за формулою

$$\widetilde{P}_n^*(B) = \sum_{s=m_1}^{m_2} \widetilde{P}_n^*(B_{m,s}) = \sum_{s=m_1}^{m_2} C_m^s p^s q^{m-s} .$$

Наприклад, якщо за даними прикладу 2.7.1 необхідно обчислити статистичну ймовірність події B, яка полягає в тому, що подія A в розглядуваній серії із 10 випробувань відбудеться непарну кількість разів, тобто $I = \{1,3,5,7,9\}$, тоді

$$\widetilde{P}_n^*(B) = \sum_{s \in I} C_{10}^s \left(\frac{1}{2}\right)^s \left(\frac{1}{2}\right)^{10-s} = C_{10}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^9 + C_{10}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 +$$

$$+ C_{10}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_{10}^7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_{10}^9 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{10}{1024} + \frac{120}{1024} +$$

$$+\frac{252}{1024}+\frac{120}{1024}+\frac{10}{1024}=\frac{512}{1024}=\frac{1}{2}.$$

Якщо ж необхідно обчислити статистичну ймовірність події B, яка полягає в тому, що в розглядуваній серії із 10 випробувань подія A відбудеться не менше, ніж 4, і не більше, ніж 6 разів, тоді

$$\widetilde{P}_n^*(B)=\sum_{s=4}^{6}C_{10}^{s}\left(\frac{1}{2}\right)^{s}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-s}=\frac{210}{1024}+\frac{252}{1024}+\frac{210}{1024}=\frac{672}{1024}.$$

Задачі

2.7.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Серії із m випробувань можуть бути пов’язані з різними просторами елементарних подій.
2. Повторні випробування пов’язані з довільною серією з m випробувань.
3. Повторні випробування пов’язані з одним і тим самим простором елементарних подій.

2.7.2. Знайти статистичну ймовірність того, що у серії з m випробувань подія A відбувається принаймні один раз, якщо статистична ймовірність відбування цієї події у кожному випробуванні дорівнює $p=P_n^*(A)>0$.

2.7.3. Знайти статистичну ймовірність того, що у серії із 9 підкидань монети герб випадає:

а) 5 разів;

б) 4 рази,

вважаючи, що при кожному підкиданні $P_n^*(\{\Gamma\})=\frac{1}{2}$.

Порівняти ці статистичні ймовірності.

Побудувати многокутник розподілу статистичних ймовірностей $\widetilde{P}_n^*(B_{9,s})$, $s\in\overline{0,\,9}$.

РОЗДІЛ 3. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

3.1. Відповідність між множинами

Нехай задано дві множини *V* і *W* елементів деякої природи.

Означення. *Відповідністю X між множинами V і W називають деяку підмножину X множини впорядкованих пар* (v,w), *де* $v \in V$, $w \in W$.

Означення. *Множину всіх впорядкованих пар* (v,w), *таких, що* $v \in V$, $w \in W$, *називають декартовим добутком множин V і W, який позначають* $V \times W$.

При цьому якщо $(v,w) \in X$, то кажуть, що елемент $w \in W$ поставлено у відповідність елементові $v \in V$ за відповідністю *X*.

Означення. *Множину Q тих елементів* $w \in W$, *що поставлені у відповідність елементові* $v \in V$ *за відповідністю X, називають образом елемента* $v \in V$ *за відповідністю X і пишуть* $Q = X(v)$, $v \in V$, $Q = X(v) \subset W$.

Цей образ $Q = X(v) \subset W$ може містити довільну кількість елементів із *W*, зокрема бути порожнім.

Означення. *Образом множини* $G \subset V$ *за відповідністю X називають об'єднання образів всіх елементів множини G, тобто* $X(G) = \bigcup\limits_{v \in G} X(v)$.

Означення. *Прообразом елемента* $w \in W$ *за відповідністю X називають множину всіх елементів із V, яким поставлено у відповідність елемент* $w \in W$.

Таку множину елементів із *V* позначають через $X^{-1}(w)$.

Означення. *Прообразом множини* $Q \subset W$ *елементів із W за відповідністю X називають об'єднання прообразів всіх елементів із Q, тобто* $X^{-1}(Q) = \bigcup\limits_{w \in Q} X^{-1}(w)$.

Приклад 3.1.1. Нехай є дві множини
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ і $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$.

Тоді множина пар

$$\{(v_1,w_1),(v_1,w_2),(v_1,w_3),(v_1,w_4),(v_1,w_5),(v_1,w_6),$$
$$(v_2,w_1),(v_2,w_2),(v_2,w_3),(v_2,w_4),(v_2,w_5),(v_2,w_6),$$
$$(v_3,w_1),(v_3,w_2),(v_3,w_3),(v_3,w_4),(v_3,w_5),(v_3,w_6),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(v_7, w_1), (v_7, w_2), (v_7, w_3), (v_7, w_4), (v_7, w_5), (v_7, w_6)\}$$

буде декартовим добутком $V \times W$ множин V і W (Рис. 3.1.1).

Множиною пар $X = \{(v_1, w_1), (v_2, w_2), (v_3, w_3), (v_4, w_3), (v_5, w_4), (v_6, w_5), (v_7, w_5)\}$ визначається відповідність X між множинами V і W (Рис. 3.1.1). При цьому

$$X(v_1) = \{w_1\},\ X(v_2) = \{w_2\},\ X(v_3) = \{w_3\},\ X(v_4) = \{w_3\},$$
$$X(v_5) = \{w_4\},\ X(v_6) = \{w_5\},\ X(v_7) = \{w_5\},$$
$$X^{-1}(w_1) = \{v_1\},\ X^{-1}(w_2) = \{v_2\},\ X^{-1}(w_3) = \{v_3, v_4\},\ X^{-1}(w_4) = \{v_5\},$$
$$X^{-1}(w_5) = \{v_6, v_7\},\ X^{-1}(w_6) = \varnothing.$$

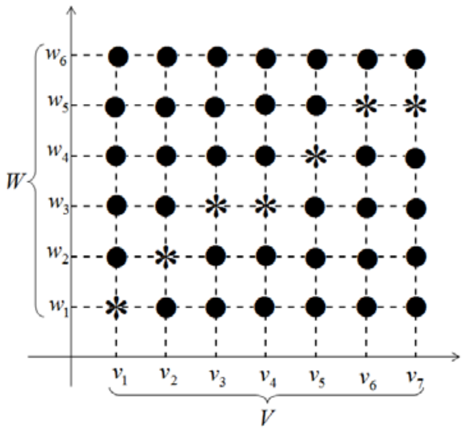


Рис. 3.1.1

Якщо за відповідністю X кожному елементові v із V ставиться у відповідність єдиний елемент w із W, тоді говорять, що відповідність X однозначна. Таку відповідність називають *відображенням* множини V у множину W або *функцією* і пишуть $X\colon V \to W$, або $X(v) = w$, $v \in V$, $w \in W$. Якщо при цьому $X(v_1) \neq X(v_2)$, коли $v_1 \neq v_2$, тоді говорять, що відображення взаємнооднозначне і пишуть $X\colon V \leftrightarrow W$. Множини V і W при цьому називають *еквівалентними*, а відповідність X^{-1} при цьому є відображенням $X^{-1}\colon W \to V$, оберненим до відображення $X\colon V \to W$.

У прикладі 3.1.1 відповідність X є відображенням множини V у множину W, тобто функцією $w = X(v)$, $v \in V$. Разом з тим відповідність X^{-1} в цьому прикладі не є відображенням (функцією), бо за відповідністю X^{-1} не кожному елементові із W ставиться у відповідність єдиний елемент із V (наприклад, $X^{-1}(w_3)=\{v_3,v_4\}$, $X^{-1}(w_5)=\{v_6,v_7\}$).

Зауважимо, що якщо відповідність X не взаємнооднозначна, то не обов'язково для довільного $G\subset V$ має місце рівність $X^{-1}(X(G))=G$.

Наприклад (див. Рис. 3.1.1), в розглянутому прикладі 3.1.1 $X(v_6)=w_5$, $X^{-1}(w_5)=X^{-1}(X(v_6))=\{v_6,v_7\}\neq\{v_6\}$. Аналогічно не завжди має місце рівність $X(X^{-1}(Q))=Q$ для довільного $Q\subset W$.

Якщо відповідність X однозначна, то для довільних $w_1\in W$ і $w_2\in W$, $w_1\neq w_2$, прообрази елементів w_1 і w_2 не перетинаються (не містять спільних елементів), тобто $X^{-1}(w_1)\bigcap X^{-1}(w_2)=\varnothing$. Так само, якщо $Q_1\subset W$, $Q_2\subset W$ – дві непорожні підмножини із W такі, що $Q_1\bigcap Q_2=\varnothing$, то $X^{-1}(Q_1)\bigcap X^{-1}(Q_2)=\varnothing$, коли X є відображенням, тобто однозначною відповідністю. Якщо відображення X взаємнооднозначне, тобто відображення X^{-1}, як і X, однозначне, то образи двох непорожніх множин $G_1\subset V$ і $G_2\subset V$ таких, що не містять спільних елементів, тобто $G_1\bigcap G_2=\varnothing$, також не містять спільних елементів, тобто $X(G_1)\bigcap X(G_2)=\varnothing$.

Приклад 3.1.2. Учневі пропонується випадковим чином обрати приз. Для цього він повинен навмання обрати одну із 12 кульок, серед яких 2 зелених, 3 червоних, 3 білих, 2 блакитних, 1 жовта, 1 чорна.

При цьому серед призів є годинник, калькулятор, м'яч, книга, блокнот, олівці, альбом (Рис. 3.1.2).
Якщо учень вибере зелену кульку, він одержить годинник,
якщо учень вибере червону кульку, він одержить олівці і альбом,
якщо учень вибере білу кульку, він одержить калькулятор,
якщо учень вибере блакитну кульку, він одержить олівці і блокнот,
якщо учень вибере жовту кульку, він одержить м'яч,
якщо учень вибере чорну кульку, він не одержує приз.

Нехай V={зелена, червона, біла, блакитна, жовта, чорна} – множина варіантів вибрати кульку якогось із вказаних шести кольорів, W={годинник, калькулятор, м'яч, книга, блокнот, олівці, альбом} – множина призів. Тоді одержимо

X({зелена})={годинник},

X({червона})={олівці, альбом},

X({біла})={калькулятор},

X({блакитна})={блокнот, олівці},

X({жовта})={м’яч},

X({чорна})=$\varnothing$.

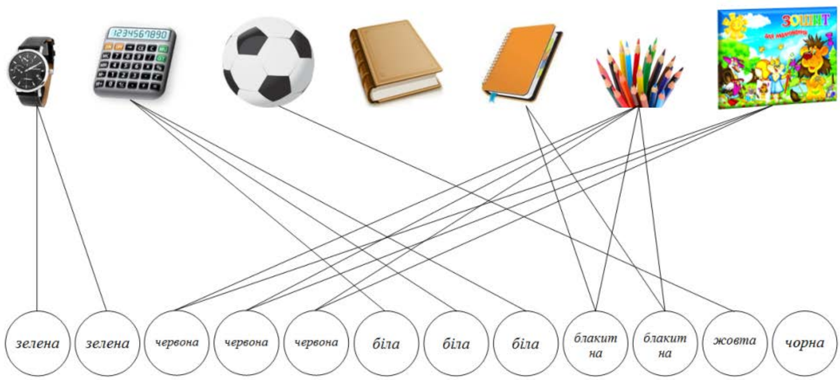


Рис. 3.1.2

При цьому X({червона})$\bigcap X$({блакитна})={олівці, альбом}$\bigcap$

$\bigcap$ {блокнот, олівці}={олівці} $\neq \varnothing$,

перетини всіх інших пар образів елементів множини V порожні.

Прообразами елементів множини W в даному прикладі будуть:

X^{-1}({годинник})={зелена},

X^{-1}({калькулятор})={біла},

X^{-1}({м’яч})={жовта},

X^{-1}({книга})=$\varnothing$,

X^{-1}({блокнот})={блакитна},

X^{-1}({олівці})={червона, блакитна},

X^{-1}({альбом})={червона}.

При цьому X^{-1}({олівці})$\bigcap$ X^{-1}({блокнот})={блакитна},

X^{-1}({олівці})$\bigcap$ X^{-1}({альбом })={червона},

перетини всіх інших пар прообразів елементів множини W порожні.

В розглядуваному випадку відповідність X між елементами множин V та W неоднозначна. Тому X не є відображенням (функцією).

Приклад 3.1.3. Учневі пропонується випадковим чином обрати собі один із трьох призів – калькулятор, м’яч, книга. Для цього він повинен навмання вибрати одну із семи кульок, серед яких біла, червона, зелена, жовта, блакитна, рожева, коричнева. Якщо учень вибере червону або блакитну кульку, він одержить калькулятор; якщо учень вибере білу або жовту кульку, він одержить м’яч; якщо учень вибере зелену, або рожеву, або коричневу кульку, він одержить книгу (див. Рис. 3.1.3).

Нехай *V*={біла, червона, зелена, жовта, блакитна, рожева, коричнева} – множина варіантів вибрати одну кульку якогось із вказаних семи кольорів, *W*={калькулятор, м'яч, книга} – множина призів.

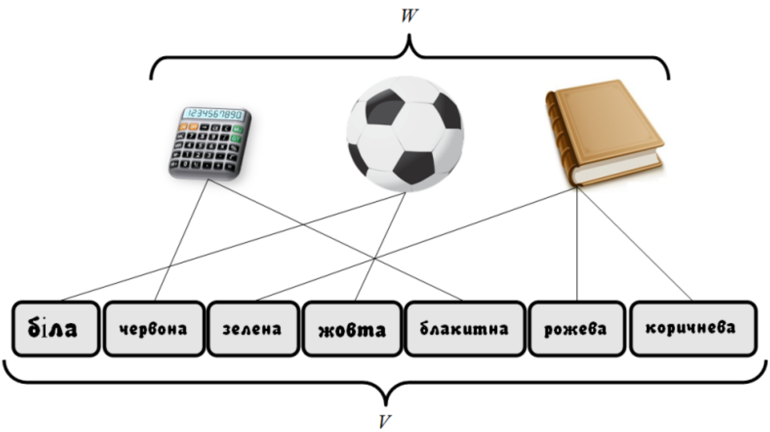


Рис. 3.1.3

Тоді одержимо:

X({біла})=*X*({жовта})={м’яч},

X^{-1}({м’яч})={біла, жовта},

X({червона})=*X*({блакитна})={калькулятор},

X^{-1}({калькулятор})={червона, блакитна},

X({зелена})=*X*({рожева})=*X*({коричнева})={книга},

X^{-1}({книга})={зелена, рожева, коричнева},

X({біла, жовта})={м’яч},

X({червона, блакитна})={калькулятор},

X({біла, жовта} ∪ {червона, блакитна})={м’яч} ∪ {калькулятор}=
={м’яч, калькулятор},

X^{-1}({м'яч, книга})= X^{-1}({м'яч})$\cup$ X^{-1}({книга})=
={біла, жовта}$\cup${зелена, рожева, коричнева}=
={біла, жовта, зелена, рожева, коричнева},
X^{-1}({калькулятор, книга})= X^{-1}({калькулятор})$\cup$ X^{-1}({книга})=
={червона, блакитна}$\cup${зелена, рожева, коричнева}=
={червона, блакитна, зелена, рожева, коричнева},
X^{-1}({калькулятор, м'яч})= X^{-1}({калькулятор})$\cup$ X^{-1}({м'яч})=
={червона, блакитна}$\cup${біла, жовта}=
={червона, блакитна, біла, жовта},
X^{-1}({м'яч, книга})$\cap$ X^{-1}({калькулятор, книга})=
={біла, жовта, зелена, рожева, коричнева}$\cap${червона, блакитна, зелена, рожева, коричнева}={зелена, рожева, коричнева}=
= X^{-1}({книга}),
X^{-1}({м'яч, книга})$\cap$ X^{-1}({калькулятор, м'яч})=
={біла, жовта, зелена, рожева, коричнева}$\cap$
$\cap${червона, блакитна, біла, жовта}={біла, жовта}= X^{-1}({м'яч}),
X^{-1}({калькулятор, книга})$\cap$ X^{-1}({калькулятор, м'яч})=
={червона, блакитна, зелена, рожева, коричнева}$\cap$
$\cap${червона, блакитна, біла, жовта}={червона, блакитна}=
= X^{-1}({калькулятор}).

Легко бачити, що прообрази будь яких двох різних підмножин із W, які не містять спільних елементів (не перетинаються), також не містять спільних елементів (не перетинаються).

В даному прикладі відповідність X між елементами множин V={біла, червона, зелена, жовта, блакитна, рожева, коричнева} та W={калькулятор, м'яч, книга} однозначна, оскільки кожному елементові із множини V ставиться у відповідність єдиний елемент із множини W. Тому відповідність X є відображенням (функцією). Разом з тим відповідність X^{-1}, обернена до X, не є однозначною, оскільки в множині W є елементи, яким за відповідністю X^{-1} ставиться у відповідність не один, а кілька елементів:
X^{-1}({м'яч})={біла, жовта}, X^{-1}({калькулятор})={червона, блакитна}, X^{-1}({книга})={зелена, рожева, коричнева}.

Тому відповідність X^{-1} не є відображенням (функцією).

3.2. Поняття випадкової величини

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) і на множині Ω елементарних подій задано дійсну функцію $X(E), E \in \Omega$, за якою кожному елементові E множини Ω ставиться у відповідність деяке дійсне число $x = X(E)$. Це число $x = X(E)$ (чи відповідна точка на числовій осі) є *образом* елемента E. При цьому може трапитись, що одне і те саме число x поставлене у відповідність кільком елементарним подіям (чи навіть нескінченній їх кількості, якщо, наприклад, задана функція набуває одного і того самого значення, тобто стала, на деякому відрізку).

Множина всіх точок (елементарних подій) $E \in \Omega$, яким поставлено у відповідність на числовій осі одну і ту саму точку x, є *прообразом* точки x. Прообраз точки x позначають символами $X^{-1}(x)$.

Очевидно, щоб знайти прообраз точки x, потрібно знайти множину всіх розв'язків рівняння $X(E) = x$.

Образом деякої множини $A \subset \Omega$ є об'єднання образів всіх елементів множини A, тобто $\bigcup\limits_{E \in A} X(E)$, яке позначають через $X(A)$. Зокрема $X(\Omega) = \Omega_X$ – це множина значень функції $X(E)$, $E \in \Omega$.

Прообразом деякої множини G *точок* є об'єднання прообразів всіх елементів множини G, тобто $\bigcup\limits_{x \in G} X^{-1}(x)$, яке позначають через $X^{-1}(G)$.

Нехай S_X – деяка сукупність підмножин G множини $\Omega_X = X(\Omega)$, яка задовольняє вимоги 1_s-3_s:

1_s. $\Omega_X \in S_X$;

2_s. Якщо $G \in S_X$, то і $\overline{G} = \Omega_X \setminus G \in S_X$;

3_s. Якщо $G_i \in S_X$, $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, то і $\bigcup\limits_{i \in I} G_i \in S_X$, $I \subset \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Означення. *Функцію* $X(E)$, $E \in \Omega$, *називають* S/S_X*-вимірною функцією або* S/S_X*-випадковою величиною, якщо для будь-якої підмножини* $G \in S_X$ *виявляється* $X^{-1}(G) \in S$.

Оскільки при цьому значення $X(E)$ належить до множини

$G \in S_X$ тоді й тільки тоді, коли $E \in X^{-1}(G) \in S$, то статистична ймовірність (відносна частота) P_{nX}^* попадання значень $X(E)$ у множину $G \in S_X$ дорівнює статистичній ймовірності (відносній частоті) $P_n^*(X^{-1}(G))$ попадання елементарних подій $E \in \Omega$ у множину $X^{-1}(G) \in S$, тобто $P_{nX}^*(G) = P_n^*(X^{-1}(G))$, $G \in S_X$, $X^{-1}(G) \in S$.

Зауважимо, що P_{nX}^* задовольняє умови 1_p-3_p стосовно S_X. Тому $(\Omega_X, S_X, P_{nX}^*)$ є *ймовірнісним простором*. При цьому говорять, що *ймовірнісна міра* P_{nX}^* *породжується (генерується)* S / S_X*-випадковою величиною* X *за ймовірнісною мірою* P_n^*, а ймовірнісний простір $(\Omega_X, S_X, P_{nX}^*)$ при заданому S_X породжується (генерується) S / S_X-випадковою величиною X із ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*).

Зауважимо, що коли $S_X = \{\varnothing, \Omega_X\}$, то тоді будь-яка функція $X(E)$, $E \in \Omega$, буде S / S_X-вимірною для будь-якого ймовірнісного простору (Ω, S, P).

Зауважимо також, що коли S – найширша сукупність підмножин множини Ω, $S = \{A : A \subset \Omega\}$, тобто S містить будь які підмножини множини Ω, зокрема і порожню $\varnothing$, то тоді будь яка дійсна функція, задана на Ω, буде S / S_X-вимірною для будь якої сукупності S_X підмножин множини Ω_X, яка задовольняє вимоги 1_s-3_s.

Приклад 3.2.1. Нехай

$$\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\},\ H_1 = \{"1","2","3","4"\},\ H_2 = \{"5"\},$$

$$H_3 = \{"6"\},\ P_n^*(H_1) = 0.10,\ P_n^*(H_2) = 0.30,\ P_n^*(H_3) = 0.60,$$

$$S = \{\varnothing, H_1, H_2, H_3, H_1 + H_2, H_1 + H_3, H_2 + H_3, H_1 + H_2 + H_3 = \Omega\}.$$

Тоді (Ω, S, P_n^*) – ймовірнісний простір.

Нехай на множині $\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\}$ задана функція $X(E)$ наступним чином: $X(E) = 1$, якщо $E \in \{"1","2","3","4"\}$; $X(E) = 2$, якщо $E \in \{"5"\}$; $X(E) = 3$, якщо $E \in \{"6"\}$.

Якщо елементарні події "1", "2", "3", "4", "5", "6" подати як точки на числовій осі Ox, то графічно зазначену залежність можна подати так, як показано на Рис. 3.2.1.

Таким чином $X(\Omega) = \Omega_X = \{1, 2, 3\}$.

Розглянемо таку сукупність S_X підмножин множини $X(\Omega)$:

$$S_X = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Очевидно, ця сукупність задовольняє вимоги $1_s - 3_s$.

Оскільки одне і те саме число 1 поставлено у відповідність елементарним подіям і "1", і "2", і "3", і "4", прообразом точки 1 є множина $X^{-1}(\{1\}) = H_1 = \{"1","2","3","4"\} \in S$. Це означає, що статистична ймовірність (відносна частота) того, що функція $X(E)$ набуває значення 1, дорівнює статистичній ймовірності (відносній частоті) попадання в підмножину $H_1 = \{"1","2","3","4"\} \in S$, тобто дорівнює 0.10 (бо значення 1 функція $X(E)$ набуває тоді, коли на верхній грані кубика випадає одна з цифр "1", або "2", або "3", або "4").

Аналогічно прообразом точки 2 є одноелементна множина $X^{-1}(\{2\}) = H_2 = \{"5"\} \in S$, тому статистична ймовірність того, що $X(E)$ набуває значення 2, дорівнює статистичній ймовірності випадання цифри "5" на верхній грані кубика, тобто дорівнює 0.30. Прообразом точки 3 є одноелементна множина $X^{-1}(\{3\}) = H_3 = \{"6"\} \in S$, а тому статистична ймовірність того, що функція $X(E)$ набуває значення 3, дорівнює статистичній ймовірності випадання цифри "6" на верхній грані кубика, тобто дорівнює 0.60.

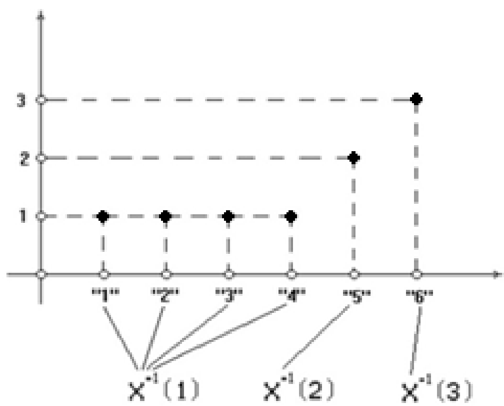


Рис. 3.2.1

Тепер легко знайти статистичні ймовірності попадання значень $X(E)$ у різні підмножини G множини $X(\Omega) = \Omega_X = \{1, 2, 3\}$, $G \in S_X$. Очевидно, статистична ймовірність попадання значень $X(E)$:

– у підмножину $\{1,2\} \in S_X$ така сама, як статистична ймовірність попадання елементарних подій E в підмножину

$$X^{-1}(\{1,2\}) = X^{-1}(\{1\}) \bigcup X^{-1}(\{2\}) = \{"1","2","3","4"\} \bigcup \{"5"\} =$$
$$= \{"1","2","3","4","5"\} \in S,$$

тобто дорівнює 0.40;

– у підмножину $\{1,3\} \in S_X$ така сама, як в підмножину

$$X^{-1}(\{1,3\}) = X^{-1}(\{1\}) \bigcup X^{-1}(\{3\}) = \{"1","2","3","4"\} \bigcup \{"6"\} =$$
$$= \{"1","2","3","4","6"\} \in S,$$

тобто дорівнює 0.70;

– у підмножину $\{2,3\} \in S_X$ така сама, як в підмножину

$$X^{-1}(\{2,3\}) = X^{-1}(\{2\}) \bigcup X^{-1}(\{3\}) = \{"5"\} \bigcup \{"6"\} = \{"5","6"\} \in S,$$

тобто дорівнює 0.90;

– у підмножину $\{1,2,3\} \in S_X$ така сама, як в підмножину

$$X^{-1}(\{1,\ 2,\ 3\}) = X^{-1}(\{1\}) \bigcup X^{-1}(\{2\}) \bigcup X^{-1}(\{3\}) =$$
$$= \{"1","2","3","4"\} \bigcup \{"5"\} \bigcup \{"6"\} = \{"1","2","3","4","5","6"\} = \Omega \in S,$$

тобто дорівнює 1.00.

Як бачимо, прообрази всіх підмножин $G \in S_X$ належать до простору подій S, тобто $X^{-1}(G) \in S$, коли $G \in S_X$, а тому функція $X(E)$, $E \in \Omega$, є S/S_X-вимірною, тобто S/S_X-випадковою величиною.

Таким чином на сукупності

$$S_X = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

підмножин множини $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ визначено ймовірнісну міру $P^*_{nX}(G)$, $G \in S_X$. Очевидно S_X задовольняє вимоги 1_s-3_s, а $P^*_{nX}(G)$, $G \in S_X$, задовольняє вимоги 1_p-3_p стосовно S_X:

1_p. $P^*_{nX}(A) \ge 0$, $G \in S_X$.

2_p. Якщо $G_i \in S_X$, $i \in 1,2,3,\dots$, $G_i G_j = \varnothing$ при $i \ne j$, то

$$P^*_{nX}(\bigcup_i G_i) = \sum_i P^*_{nX}(G_i).$$

3р. $P_{nX}^*(\Omega_X)=1$.

Тому $(\Omega_X, S_X, P_{nX}^*)$ є ймовірнісним простором.

Зауважимо, що коли в наведеному прикладі замість розглянутої сукупності S_X обрати сукупність

$$S_X^{(1)}=\{\varnothing,\{1,2\},\{3\},\Omega_X\},\ \text{або}\ S_X^{(2)}=\{\varnothing,\{1\},\{2,3\},\Omega_X\},$$

$$\text{або}\ S_X^{(3)}=\{\varnothing,\{2\},\{1,3\},\Omega_X\}\ \text{тощо},$$

кожна з яких входить до S_X, тобто $S_X^{(i)}\subset S_X$, то очевидно розглядувана функція $X(E)$, $E\subset\Omega$, буде і $S/S_X^{(1)}$-вимірною, і $S/S_X^{(2)}$-вимірною, і $S/S_X^{(3)}$-вимірною і т.д., а також S/S_X-вимірною. Це надає можливість обирати різні сукупності S_X залежно від конкретних умов і потреб.

Приклад 3.2.2. Нехай ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) той самий, що і в попередньому прикладі, а на множині $\Omega=\{"1","2","3","4","5","6"\}$ задано функцію $X(E)$ наступним чином: $X(E)=1$, якщо $E\in\{"1","3","5"\}$, тобто якщо на верхній грані кубика випадає непарна цифра, і $X(E)=2$, якщо $E\in\{"2","4","6"\}$, тобто якщо на верхній грані кубика випадає парна цифра (Рис. 3.2.2).

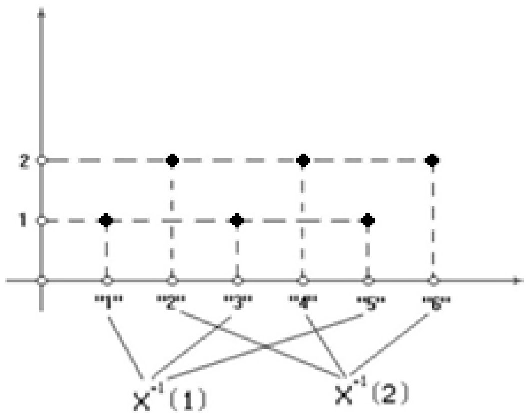


Рис. 3.2.2

В цьому випадку $X(\Omega)=\Omega_X=\{1,2\}$.

Розглянемо таку найширшу сукупність S_X підмножин множини $X(\Omega)=\{1,2\}$: $S_X=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.

Оскільки $X^{-1}(\{1\})=\{"1","3","5"\}\,\overline{\in}\,S$, так само, як і $X^{-1}(\{2\})=\{"2","4","6"\}\,\overline{\in}\,S$, то в даному прикладі функція $X(E)$, задана на множині $\Omega=\{"1","2","3","4","5","6"\}$, не є S/S_X-вимірною відносно так заданих S_X і (Ω,S,P), тобто не є S/S_X-випадковою величиною. Для так заданої функції $X(E)$, $E\in\Omega$, на заданому ймовірнісному просторі (Ω,S,P_n^*) неможливо визначити статистичну ймовірність (відносну частоту)

$$P_{nX}^*(\{1\})=P_n^*(X^{-1}(\{1\}))=P_n^*(\{"1","3","5"\}) \text{ чи}$$

$$P_{nX}^*(\{2\})=P_n^*(X^{-1}(\{2\}))=P_n^*(\{"2","4","6"\}),$$

бо множини

$$X^{-1}(\{1\})=\{"1","3","5"\}\,\overline{\in}\,S \text{ і } X^{-1}(\{2\})=\{"2","4","6"\}\,\overline{\in}\,S$$

виявляються невимірними відносно заданої на S ймовірнісної міри $P_n^*(A)$, $A\in S$, і статистичні ймовірності попадання в такі підмножини за заданих умов визначити неможливо.

Зауважимо, що коли в останньому прикладі розглянути таку сукупність S_{1X} підмножин множини $X(\Omega)$: $S_{1X}=\{\varnothing,\{1,2\}\}$, тоді функція $X(E)$, $E\in\Omega$, виявляється S/S_{1X}-вимірною, бо $X^{-1}(\varnothing)=\varnothing\in S$, $X^{-1}(\{1,2\})=\Omega\in S$ і

$$P_{nX}^*(\varnothing)=P_n^*(X^{-1}(\varnothing))=P_n^*(\varnothing)=0,$$

$$P_{nX}^*(\{1,2\})=P_n^*(X^{-1}(\{1,2\}))=P_n^*(\Omega)=1.$$

Оскільки значення $X(E)$ належить до множини $G\in S_X$ лише тоді, коли $E\in X^{-1}(G)\in S$, то статистична ймовірність $P_{nX}^*(G)$ попадання значень $X(E)$ у множину $G\in S_X$ дорівнює статистичній ймовірності $P_n^*(X^{-1}(G))$ попадання елементарних подій $E\in\Omega$ у множину $X^{-1}(G)\in S$, тобто $P_{nX}^*(G)=P_n^*(X^{-1}(G))$.

Приклад 3.2.3. Нехай $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $S=\{\varnothing,\ \Omega,\ \{1,2,3,4\},\ \{5\},\ \{6\},\ \{1,2,3,4,5\},\ \{1,2,3,4,6\},\ \{5,6\}\}$, а $X(E)=1$, коли $E\in\{1,2\}$, $X(E)=2$, коли $E\in\{3,4\}$, $X(E)=3$, коли $E\in\{5,6\}$. Тоді $\Omega_X=\{1,2,3\}$.

Знайдемо сукупність $\widetilde{S}_X$ підмножин G множини Ω_X таку, що матиме місце $X^{-1}(G) \in S$ для кожного $G \in \tilde{S}_X$, тобто $\tilde{S}_X = \{G \subset \Omega_X : X^{-1}(G) \in S\}$.

Оскільки

$$X^{-1}(1) = \{1, 2\} \,\overline{\in}\, S, \ X^{-1}(2) = \{3, 4\} \,\overline{\in}\, S, \ X^{-1}(3) = \{5, 6\} \in S,$$

$$X^{-1}(\{1, 2\}) = X^{-1}(1) \bigcup X^{-1}(2) = \{1, 2, 3, 4\} \in S,$$

то $\tilde{S}_X = \{\varnothing, \Omega_X, \{1, 2\}, \{3\}\}$.

Таким чином, дана функція є $S / \tilde{S}_X$-вимірною, тобто $S / \tilde{S}_X$-випадковою величиною. Для даної функції існує єдиний нетривіальний простір $S_X = \tilde{S}_X$, для якого функція $X(E)$, $E \in \Omega$, є S / S_X-вимірною. При цьому $S_X = \tilde{S}_X$ не співпадає із найширшою сукупністю підмножин множини Ω_X.

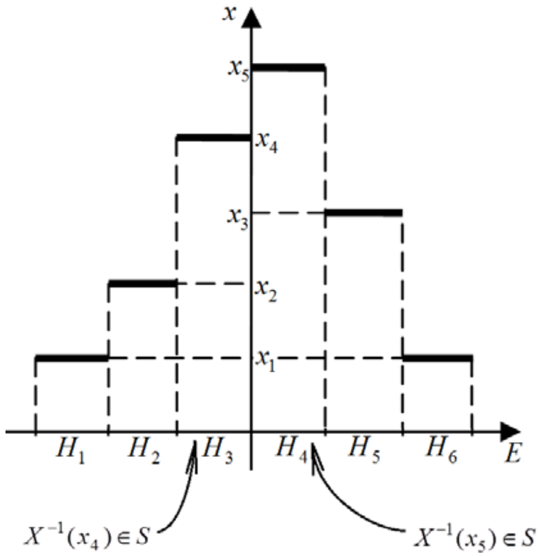


Рис. 3.2.3

Приклад 3.2.4. Нехай $\Omega = \bigcup_{i=1}^{6} H_i$, $H_i H_j = \varnothing$, $i \neq j$ (Рис. 3.2.3), простір подій $S = \{\varnothing, H_1, ..., H_6, H_1 + H_2, ..., \Omega\}$ – породжений поділом множини Ω на підмножини H_i, $i \in \overline{1, 6}$, $P_n^*(H_i)$, $i \in \overline{1, 6}$, –

задані.

Нехай на множині Ω задана кусково-стала функція $X_1(E)$, $E \in \Omega$: $X_1(\Omega) = \Omega_{X_1} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, яка на кожній із множин H_i набуває сталого значення (Рис. 3.2.3).

Оскільки прообрази всіх елементів x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 множини Ω_{X_1} належать до породженої підмножинами H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6 сукупності S підмножин множини Ω: $X_1^{-1}(x_1) = H_1 \bigcup H_6$, $X_1^{-1}(x_2) = H_2$, $X_1^{-1}(x_3) = H_5$, $X_1^{-1}(x_4) = H_3$, $X_1^{-1}(x_5) = H_4$, то можна визначити статистичні ймовірності попадання в множини $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_3\}$, $\{x_4\}$, $\{x_5\}$, а тому і в будь-які підмножини множини Ω_{X_1}, звідки слідує, що функція $X_1(E)$, $E \in \Omega$, буде S/S_{X_1}-вимірною, тобто S/S_{X_1}-випадковою величиною при будь-якому S_{X_1}, що задовольняє вимоги $1_s - 3_s$.

Нехай S_{X_1} – найширша сукупність підмножин множини Ω_{X_1}, тобто S_{X_1} містить всі підмножини множини Ω_{X_1} (разом з $\varnothing$ і Ω_{X_1}).

Тоді оскільки $X_1^{-1}(G) \in S$ для довільного $G \in S_{X_1}$, $G \subset \Omega_{X_1}$, то така функція $X_1(E)$, $E \in \Omega$, є S/S_{X_1}-вимірною, тобто S/S_{X_1}-випадковою величиною.

Очевидно, існують і інші сукупності S_{X_1} підмножин множини Ω_{X_1}, для яких функція $X_1(E)$ буде S/S_{X_1}-вимірна, наприклад,

$$S_{X_1} = \{\varnothing, H_1, H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + H_6, \Omega_{X_1}\},$$

$$S_{X_1} = \{\varnothing,\ H_1 + H_2 + H_3,\ H_4 + H_5 + H_6, \Omega_{X_1}\} \text{ і т.д.}$$

Приклад 3.2.5. Нехай, як і в попередньому прикладі, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{6} H_i$, $H_i H_j = \varnothing$, $i \neq j$, $S = \{\varnothing, H_1, ..., H_6, H_1 + H_2, ..., \Omega\}$ – породжена поділом множини Ω на підмножини H_i, $i \in \overline{1,6}$, $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{6} H_i = \Omega$, $P_n^*(H_i)$, $i \in \overline{1,6}$, – задані.

Нехай на множині Ω задана кусково-стала функція $X_2(E)$, $E \in \Omega$, графік якої подано на Рис. 3.2.4 (функція $X_2(E)$ не набуває сталих значень на кожній із множин H_i). При цьому $X_2(\Omega)=\Omega_{X_2}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}=\Omega_{X_1}$, тобто множина Ω_{X_2} значень функції $X_2(E)$, $E\in\Omega$, така сама, як і множина Ω_{X_1} значень функції $X_1(E)$, $E\in\Omega$, із прикладу 3.2.4.

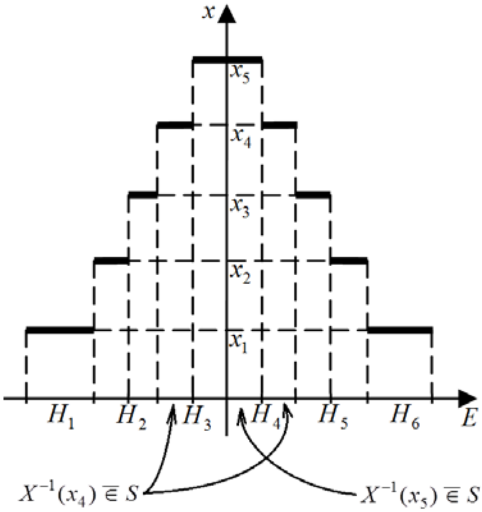


Рис. 3.2.4

Нехай як і раніше, S_{X_2} – найширша сукупність підмножин множини Ω_{X_2}, тобто містить всі підмножини множини Ω_{X_2} (разом з $\varnothing$ і Ω_{X_2}).

Оскільки прообрази елементів x_2, x_3, x_4, x_5 складаються з інтервалів, які не входять до сукупності *S*, породженої інтервалами H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, то неможливо визначити статистичні ймовірності попадання в множини $\{x_2\}$, $\{x_3\}$, $\{x_4\}$, $\{x_5\}$, які входять до S_{X_2}, а тому функція $X_2(E)$ не є S/S_{X_2}-вимірна.

Разом з тим, якщо обрати S_{X_2} так:

$$S_{X_2}=\{\varnothing,\{x_1\},\{x_2,x_3\},\{x_4,x_5\},\{x_1\}\bigcup\{x_2,x_3\},\{x_1\}\bigcup\{x_4,x_5\},$$
$$\{x_2,x_3\}\bigcup\{x_4,x_5\},\{x_1\}\bigcup\{x_2,x_3\}\bigcup\{x_4,x_5\}=\Omega_{X_2}\},$$

тоді прообрази всіх елементів так заданого S_{X_2} належатимуть до *S*, а тому в такому разі можна визначити статистичні ймовірності попадання в підмножини $G \in S_{X_2}$:

$$P^*_{nX_2}(\{x_1\}) = P^*_n(X_2^{-1}(\{x_1\})) = P^*_n(H_1 \cup H_6) = P^*_n(H_1) + P^*_n(H_6),$$

$$P^*_{nX_2}(\{x_2, x_3\}) = P^*_n(X_2^{-1}(\{x_2, x_3\})) = P^*_n(H_2 \cup H_5) = P^*_n(H_2) + P^*_n(H_5),$$

$$P^*_{nX_2}(\{x_4, x_5\}) = P^*_n(X_2^{-1}(\{x_4, x_5\})) = P^*_n(H_3 \cup H_4) = P^*_n(H_3) + P^*_n(H_4).$$

Очевидно, існують і інші сукупності S_{X_2} підмножин множини Ω_{X_2}, для яких функція $X_2(E)$ буде S / S_{X_2}-вимірна. Якщо позначити $\{x_1\} = \tilde{H}_1$, $\{x_2, x_3\} = \tilde{H}_2$, $\{x_4, x_5\} = \tilde{H}_3$, тоді задаючи сукупності S_{X_2} у вигляді $S_{X_2} = \{\varnothing, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2 + \tilde{H}_3, \Omega\}$, $S_{X_2} = \{\varnothing, \tilde{H}_1 + \tilde{H}_2, \tilde{H}_3, \Omega\}$ і т.д., будемо щоразу одержувати S / S_{X_2}-вимірну функцію $X_2(E)$, $E \in \Omega$.

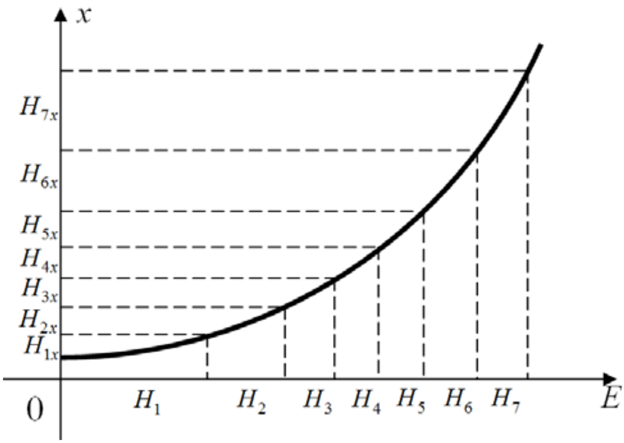


Рис. 3.2.5

Приклад 3.2.6. Нехай $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} H_i$, $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, S – породжена поділом множини Ω на підмножини H_i, $P^*_n(H_i)$ задані. Нехай задано функцію $X(E)$, $E \in \Omega$, $\Omega_X = X(\Omega)$, $H_{iX} = X(H_i)$. Якщо відображення X: $\Omega \to \Omega_X$ взаємнооднозначне, тоді як S_X можна обрати сукупність, породжену образами H_{iX} множин H_i, $H_{iX} = X(H_i)$. Зрозуміло, що в такому разі для довільного $G \in S_X$, $G = \bigcup_{i \in I} H_{iX}$, $I \subset \{1, 2, ..., k\}$, буде

$$X^{-1}(G) = X^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} H_{iX}\right) = \bigcup_{i \in I} X^{-1}(H_{iX}) = \bigcup_{i \in I} H_i \in S,$$

і тому функція $X(E)$, $E \in \Omega$, при так заданих S і S_X буде S / S_X-вимірна, тобто S / S_X-випадкова величина (Рис. 3.2.5).

При цьому $P_{nX}^*(G) = P_n^*(X^{-1}(G)) = P_n^*\left(\bigcup_{i \in I} H_i\right) = \sum_{i \in I} P_n^*(H_i)$.

Очевидно, виходячи із так побудованого простору S_X, як і раніше, можна побудувати і інші сукупності $\tilde{S}_X$ підмножин множини Ω_X, які задовольнятимуть вимоги $1_s - 3_s$, і функція $X(E)$ також буде $S / \tilde{S}_X$-вимірна.

Задачі

3.2.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Для будь-якої функції $X(E)$, $E \in \Omega$, кожна елементарна подія $E \in \Omega$ має єдиний образ.
2. Для будь-якої функції $X(E) = x \in R$, $E \in \Omega$, кожне число $x \in R$ має прообраз $X^{-1}(x)$, що містить лише один елемент.
3. Якщо функція $X(E)$, $E \in \Omega = [a; b]$, є зростаючою, то прообраз $X^{-1}(x)$ містить лише один елемент для кожного $x \in X([a; b])$.
4. Якщо функція $X(E)$ визначена на просторі Ω елементарних подій, то вона є випадковою величиною.
5. Якщо простір подій S не є найширшим простором для даного простору Ω елементарних подій, то існують функція $X(E)$, $E \in \Omega$, і S_X такі, що $X(E)$ не є S / S_X-випадковою величиною.

3.2.2. Нехай $\Omega = \{Г, Ц\}$. Побудувати ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), функцію $X(E)$, $E \in \Omega$, і S_X такі, що: а) $X(E)$ є S / S_X-випадковою величиною; б) $X(E)$ не є S / S_X-випадковою величиною.

3.2.3. Навести приклади дискретних та неперервних просторів Ω елементарних подій, відповідних імовірнісних просторів, функцій $X(E)$, $E \in \Omega$, та сукупностей S і S_X підмножин множин відповідно Ω і $\Omega_X = X(\Omega)$ таких, що $X(E)$ є S/S_X-випадковими величинами, і таких, що $X(E)$ не є S/S_X-випадковими величинами.

3.3. Поняття про закон великих чисел

Інтуїтивно зрозуміло, що чим довша серія із n випробувань, за якою визначена статистична ймовірність $P_n^*(A)$ деякої події $A \subset \Omega$, $A \in S$, тим з більшою впевненістю можна стверджувати, що і в майбутніх досить довгих серіях подібних випробувань подія A відбуватиметься із відносною частотою (статистичною ймовірністю), близькою до статистичної ймовірності, визначеної за результатами досить великої кількості вже проведених випробувань.

Якщо провести досить велику кількість m досить довгих серій по n випробувань, в яких спостерігається одна і та сама подія A, і в кожній i-й серії із n випробувань визначити статистичні ймовірності $P_{ni}^*(A)$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, то в переважній більшості при досить великих n і m швидше за все статистичні ймовірності $P_{ni}^*(A)$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$ досить мало відрізнятимуться одна від одної і зосереджуватимуться в досить малому околі деякого числа $P^*(A) \in [0,1]$.

В цьому і полягає *сутність закону великих чисел*. Найчастіше як $P^*(A)$ обирають середнє арифметичне спостережених статистичних ймовірностей $P_{ni}^*(A)$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, тобто покладають $P^*(A) = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P_{ni}^*(A)$.

Це число $P^*(A)$ є *узагальненою статистичною ймовірністю* випадкової події A.

Очевидно $P^*(A)$ задовольняє всі вимоги (аксіоми) щодо статистичної ймовірності, зокрема вимоги $1_p - 3_p$, а тому є ймовірнісною мірою.

Зауважимо, що узагальнені статистичні ймовірності завжди обчислюють з певною наперед заданою точністю Δ. Якщо вдається визначити $P^*(A)$ для всіх подій $A \in S$ і в межах заданої точності узгодити Ω, S і P^*, то тим самим буде побудовано ймовірнісний простір (Ω, S, P^*). Для цього ймовірнісного простору будуть правильними всі твердження, що стосуються розглянутих раніше ймовірнісних просторів (Ω, S, P_n^*), якщо в них замінити P_n^* на P^*.

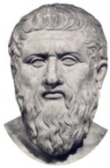
Слід підкреслити, що $P^*(A)$, $A \in S$, – *гіпотетична ймовірнісна міра, що вводиться на основі припущення, яке базується на статистичних даних* – результатах великої кількості m досить довгих серій по n випробувань. Разом з тим ніяк неможливо довести, що в наступних випробуваннях подія A відбуватиметься з відносною частотою (статистичною ймовірністю), яка дорівнюватиме $P^*(A)$. Наприклад, неможливо довести, що відносна частота випадання герба при великій кількості підкидань реальної монети буде рівною $\frac{1}{2}$, що відносна частота випадання кожної грані реального грального кубика при великій кількості підкидань буде рівною $\frac{1}{6}$ і т.д.

Наведені міркування цілком узгоджуються з думкою одного з творців теорії ймовірностей Я. Бернуллі, який писав: «Що не дано нам вивести *apriori* (тобто наперед передбачити до проведення досліду), те принаймні можна дістати *aposteriori* (тобто з численних спостережень результатів подібних дослідів). Тому можна передбачити, що деяке явище згодом може відбутися у стількох же випадках, у скількох воно раніше було відмічене як таке, що відбулося за подібних умов. Цей емпіричний спосіб визначення числа випадків за спостереженнями не новий і не незвичайний, тому усі дотримуються його у повсякденній практиці».

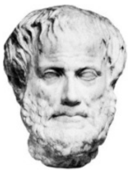
Історичні відомості


Демокріт

Проблеми дослідження випадкових явищ хвилювали людство ще у сивій давнині. Так, видатні давньогрецькі філософи *Демокріт* (460-370 р.р. до н.е.), *Платон* (428-348р.р. до н.е.), *Арістотель* (384-322 р.р. до н.е.) та інші розмірковували над неминучими та випадковими явищами. Вельми загальні висловлювання щодо випадкових явищ робили мислителі стародавніх Китаю, Індії та Близького Сходу.


Платон

Про випадкові експерименти з підкиданням гральних кубиків писали у 1220-1250 роках *Річард де Форніваль* (1200-1250), у 1487 році *Лука Пачолі* (1445-1515), у 1526 році *Джироламо Кардано* (1501-1576), у 1556 році *Ніколло Тарталья* (1449-1557), а також видатний італійський вчений *Галілео Галілей* (1564-1642), який, мабуть, першим розглянув випадкові похибки, що виникають у деяких експериментах.


Арістотель

Поняття ідеалізованого випадкового експерименту ввів у 1918 році відомий німецький математик *Ріхард Мізес* (1883-1953), а множину Ω, як модель множини наслідків випадкового випробування, і випадкову подію, як підмножину простору Ω, ввів у 1936 році видатний російський математик *Андрій Миколайович Колмогоров* (1903-1987).


Л. Пачолі

До кінця XIX століття не виникало питання про необхідність строгого математичного означення «випадкової події». З давніх давен математики оперували з випадковими подіями (знаходили суми подій, добутки та протилежні до них події), спираючись лише на інтуїтивне, часто досить суб'єктивне уявлення про них. Лише після того, як теорія ймовірностей досягла досить високого рівня застосувань, виникла потреба в її логічному обґрунтуванні. Про це свідчить, зокрема, одна


Д. Кардано

Н. Тарталья

Г. Галілей

Р. Мізес

А.М. Колмогоров

Д. Гільберт

С.Н. Бернштейн

із славетних математичних проблем (шоста проблема, пов’язана з аксіоматичним обґрунтуванням математичних теорій, включаючи теорію ймовірностей) видатного німецького математика *Давіда Гільберта* (1862-1943), сформульованих ним на ІІ Міжнародному конгресі математиків (Париж, 1900 р.). У 1917 році відомий російський математик *Сергій Натанович Бернштейн* (1880-1968) навів чітке математичне тлумачення випадкової події як елемента так званої бульової алгебри.

Основні вимоги 1_s-3_s до сукупності *S* подій ввів у 1936 році Андрій Миколайович Колмогоров.

Галілео Галілей розумів сутність поняття ймовірності, як числа, від якого мало відхиляються найбільша кількість відносних частот спостережених випадкових похибок вимірювання певної величини.

У роботах англійських математиків *Джона Граунта* (1620-1675) і *Вільяма Петті* (1623-1687), опублікованих у 1662 та 1682 роках і присвячених політичній арифметиці для дослідження випадкових соціальних явищ, мабуть уперше було суттєво використано поняття відносної частоти випадкової події.

Сутність поняття статистичної ймовірності розкрита у 1693 році видатним швейцарським математиком *Якобом Бернуллі* (1654-1705), який писав: «*Що не дано нам вивести apriori* (тобто наперед передбачити до проведення досліду), *те принаймні можна дістати aposteriori*, *тобто з численних спостережень результатів подібних дослідів*. Тому *можна передбачати, що деяке явище згодом зможе відбутися у стількох же випадках, у скількох воно раніше було відмічене як таке, що відбулося за подібних умов...*».

Уявлення про правила обчислення ймовірності суми подій є вже у роботах, опублікованих у 1663 році відомим англійським астрономом *Едмондом Галлеєм* (1656-1742). У роботах, здійснених *Якобом Бернуллі* у 1693 році та *Миколою Бернуллі* (1687-1759) у 1718 році, сформульовано правила обчислення ймовірності протилежної події та суми подій.

Термін «ймовірність» мабуть першим використав відомий філософ *Бенедикт Спіноза* (1632–1677) у назві однієї із своїх робіт: «Допис про математичну ймовірність», проте ніякого означення ймовірності у цій роботі нема.

У своїй роботі «Книга про гру в кості» *Джероламо Кардано* кілька разів пропонував розглянути відношення m/n, яке іноді називають «класичним означенням ймовірності», проте важливість цього відношення він не помітив.

Недосконала форма «класичного означення» ймовірності введена у 1693 році *Якобом Бернуллі* у трактаті «Мистецтво припущень». Чітке «класичне означення» ймовірності з вимогою рівноможливості усіх шансів ввів у 1812 р. видатний французький вчений *П'єр Лаплас* (1749–1827) у трактаті «Аналітична теорія ймовірностей».

Видатні швейцарські вчені *Даніїл Бернуллі* (1700–1782) та *Леонард Ейлер* (1707–1782) зробили значний внесок у застосування теорії ймовірностей у демографії. Вони фактично започаткували основи сучасної демографії.

Статистичний та емпіричний підхід до формування поняття ймовірності розвинув англійський математик *Рональд Фішер* (1890–1962) та німецький математик *Ріхард Мізес*.

Після виходу книги відомого французького математика *Жозефа Бертрана* (1822–1900) «Числення ймовірностей», опублікованої у 1899 році, математики звернули увагу на недосконалість існуючих означень ймовірності і на необхідність логічного обґрунтування теорії ймовірностей.

Д. Граунт

В. Петті

Я. Бернуллі

Е. Галлей

Б. Спіноза

П. Лаплас

Д. Бернуллі

Л. Ейлер

Р. Фішер

Ж. Бертран

У. Феллер

Визначальні властивості ймовірностей $1_P - 3_P$ ввів у 1936 році *Андрій Миколайович Колмогоров*. Тому властивості 1_s-3_s та 1_P-3_P називають *системою аксіом теорії ймовірностей А.М. Колмогорова*.

Відомий американський математик *Уільям Феллер* (1906–1970) вважав, що у 30-х роках XX століття лише у Радянському Союзі теорія ймовірностей розвивалася як справжня математична наука, що стало можливим після створення А.М. Колмогоровим аксіоматичної теорії ймовірностей. Завдяки цьому теорія ймовірностей перейшла від етапу напівмістичних міркувань, які переважали ще у 20-х роках XX ст., до сучасного етапу розвитку.

Чітке формулювання теореми про ймовірність суми подій:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

міститься у роботі англійського математика *Томаса Байєса* (1702-1761), опублікованій лише у 1763 році. Т. Байєс по суті ввів також поняття умовної ймовірності і визначив, що

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Поняття незалежності подій введено англійським математиком *Абрахамом Муавром* (1667-1773), який також чітко сформулював правило знаходження ймовірності добутку подій.

Формулу повної ймовірності першим у 1795 році навів *П'єр Лаплас* у своєму трактаті «Дослід філософії теорії ймовірностей». У цьому ж трактаті він вперше навів і формулу, яку зараз називають *формулою Байєса*, проте швидше за все Байєс не знав цієї формули.

Поняття випадкової величини по суті використовували вже у 1654 році засновники теорії ймовірностей видатні французькі математики *Блез Паскаль* (1623-1662) та *П'єр Ферма* (1601-1665). Випадкові похибки вимірювань, введені *Галілео Галілеєм* у першій

Т. Байєс

Б. Паскаль

П. Ферма

С. Пуассон

К. Гаусс

К. Жордан

половині XVII століття, також є одним з перших прикладів випадкових величин.

Поняття простої випадкової величини по суті введено у 1832 році відомим французьким математиком *Симоном Пуассоном* (1781-1840) в роботі «Про ймовірність середніх результатів спостережень», проте сам термін «випадкова величина» вперше зустрічається у роботах видатного російського математика *Пафнутія Львовича Чебишова* (1821-1894).

Строге означення випадкової величини ввів наприкінці 20-х років XX століття *Андрій Миколайович Колмогоров*.

По суті уявлення про розподіл ймовірностей на певній (досить простій) множині виникли ще у сивій давнині. Проте чітке розуміння сутності поняття розподіл ймовірностей та класифікація розподілів сформувалися лише наприкінці XIX століття і на початку XX століття після побудови строгої теорії міри (теорії вимірювання довжин, площ, об'ємів, мас тощо) завдяки працям відомих французьких математиків *Каміла Жордана* (1838-1892), *Еміля Бореля* (1871-1956) та *Анрі Лебега* (1875-1941). *Олександр Михайлович Ляпунов* (1857-1918) у 1900 році першим ввів по суті сучасне означення розподілу ймовірностей. Лише після того, як *Андрій Миколайович Колмогоров* побудував аксіоматичну теорію ймовірностей, стало можливим введення строгих означень, зокрема й означення розподілу ймовірностей.

Окремі випадки неперервних розподілів ймовірностей першими досліджували англійський математик *Абрахам Муавр* у 1733 році, німецький математик *Карл Гаусс* (1777-1855) у 1809 році та французький математик *П'єр Лаплас* у 1812 році. Важливі результати, пов'язані з розподілами ймовірностей, належать російському математику *Пафнутію Львовичу Чебишову* та його учням *Маркову Андрію Андрійовичу* (1856-1922) і *Ляпунову*

Е. Борель

Олександру Михайловичу.

Класифікація розподілів ймовірностей зустрічається у дослідженнях багатьох математиків, які у XX столітті розвивали загальну теорію міри, фундаментальні основи якої належать французькому математику *Анрі Лебегу*.

А. Лебег

Значні результати, пов'язані з розподілами ймовірностей, належать відомим українським математикам *Йосипові Іллічу Гіхману* (1918-1985), *Володимиру Семеновичу Королюку* (1925), *Анатолію Володимировичу Скороходу* (1930-2011), *Михайлу Йосиповичу Ядренку* (1932-2004) та іншим.

П.Л. Чебишов

Значний вплив на розвиток основ теорії ймовірностей мав трактат видатного нідерландського вченого *Християна Гюйгенса* (1629-1695) «Про розрахунки в азартних іграх», виданий у 1657 році. У цьому трактаті вперше вводиться поняття про числові характеристики розподілів ймовірностей на множинах значень деяких простих випадкових величин, множини значень яких складаються з двох або трьох чисел.

О.М. Ляпунов

Микола Бернуллі у 1709 році вивчав числові характеристики розподілів ймовірностей на множинах значень випадкових величин з довільною скінченною множиною значень.

А.А. Марков

Середнє квадратичне відхилення увійшло в математику завдяки працям *Галілео Галілея*, *Абрахама Муавра*, *Леонарда Ейлера*, *Карла Гаусса* та *П'єра Лапласа*.

Центр розсіювання і дисперсію розподілу ймовірностей на множині значень довільної випадкової величини наприкінці XIX століття систематично вивчали *Пафнутій Львович Чебишов* та його учні *Андрій Андрійович Марков* та *Олександр Михайлович Ляпунов*.

В.С. Королюк

П.Л. Чебишов першим довів властивості числових характеристик розподілів ймовірностей на множинах значень сум та добутків ви-

Й.І. Гіхман

А.В. Скороход

М.Й. Ядренко

Х. Гюйгенс

О.Я. Хінчин

падкових величин, проте опубліковані ці доведення лише у 1913 році у відомому підручнику *А.А. Маркова* «Числення ймовірностей».

Повторні незалежні випробування та біноміальні ймовірності розглядалися ще на початку розвитку теорії ймовірностей.

Якоб Бернуллі був одним з перших, хто систематично досліджував біноміальні ймовірності. Тому його ім'ям названо формулу для обчислення біноміальних ймовірностей, а схему повторних незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність події A не змінюється, названо *схемою Бернуллі*.

Джероламо Кардано ще у першій половині XVI століття мав уявлення про закон великих чисел. Наприкінці XVII століття у роботах *Едмунда Галлея* з теорії ймовірностей зустрічаються міркування, що нагадують закон великих чисел. *Якоб Бернуллі* наприкінці XVII століття використав біноміальні ймовірності для обґрунтування закону великих чисел, проте суттєве узагальнення і обґрунтоване доведення цього закону навів у 1867 році *Пафнутій Львович Чебишов*. Саму назву «закон великих чисел» ввів у 1837 році відомий французький математик *Симон Пуассон*.

Важливі результати, пов'язані з законом великих чисел, належать французькому математику *Емілю Борелю* та російським математикам *Андрію Миколайовичу Колмогорову*, *Олександру Яковичу Хінчину* (1894-1959), *Валерію Івановичу Глівенку* (1897-1940) та *Борису Володимировичу Гнєденку* (1912-1995).

Біноміальні ймовірності використовують для проведення так званого статистичного (або вибіркового) контролю якості продукції, що випускається у великих обсягах. Пріоритет у такому практичному застосуванні теорії ймовірностей належить відомому російському математику українського походження *Михайлу Васильовичу Остроградському* (1801-1862),

Б.В. Гнеденко

який у 1846 році опублікував роботу, присвячену такому застосуванню.

Рівномірний дискретний розподіл ймовірностей по суті використовувався ще на початку виникнення стохастичних ідей та методів.

Геометричний розподіл ймовірностей пов'язаний із запропонованою *Якобом Бернуллі* схемою послідовних випробувань для випадку, коли ці випробування проводяться доти, поки не відбудеться дана подія.

М.В. Остроградський

Симон Пуассон у 1837 році довів теорему про наближення $P(B_{n,m}) \approx e^{-a_m} \dfrac{a_n^m}{m!}$.

Ж. Бюффон

Рівномірний розподіл ймовірностей на неперервній множині Ω по суті вперше згадується у 1692 році у перекладі книги *Християна Гюйгенса* «Про розрахунки в азартних іграх». Цей розподіл суттєво використовував французький вчений *Жорж Бюффон* (1707-1788).

К. Пірсон

Систематично і ефективно рівномірний розподіл ймовірностей використовував *П'єр Лаплас*.

Поняття ймовірнісних просторів по суті використовували вже засновники теорії ймовірностей, проте чіткі відповідні означення з'явилися лише у XX столітті після створення сучасних теорії міри та теорії ймовірностей.

Е. Пірсон

Формули, пов'язані з обчисленням кількостей різноманітних розміщень, перестановок, сполучень вивчаються у розділі математики, який називається «Комбінаторика». Тому і згадані формули називають комбінаторними. Засновниками комбінаторики були *Блез Паскаль* і *П'єр Ферма*. Значний вклад у розвиток комбінаторики внесли *Готфрід Лейбніц*, *Якоб Бернуллі*, *Леонард Ейлер* і багато інших вчених.

Ю. Нейман

Зміст

Навчальне видання

Мирослав Іванович Жалдак

Геннадій Олександрович Михалін

Іванна Михайлівна Біляй

ВСТУП ДО СТОХАСТИКИ

Посібник для учнів старшої школи