МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ А.М.ГОРЬКОГО

На правах рукописи

Галина Карловна Кржеминская

ОТНОШЕНИЯ КОНГРУЭНТНОСТИ И ПОДОБИЯ ФИГУР В ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ

(Диссертация написана на украинском языке)

(13.00.02 - методика преподавания математики)

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук
по методике математики

Киев - 1974

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ А.М.ГОРЬКОГО

На правах рукописи

Галина Карловна Кржеминская

ОТНОШЕНИЯ КОНГРУЭНТНОСТИ И ПОДОБИЯ ФИГУР В ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ

(Диссертация написана на украинском языке)

(13.00.02 - методика преподавания математики)

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук
по методике математики

Киев - 1974

Работа выполнена на кафедре математики и методики преподавания математики Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького.

Научный руководитель - кандидат педагогических наук, доцент Бевз Г.П.

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук, профессор Кованцов Н.И.

Кандидат педагогических наук Чередниченко В.И.

Внешний отзыв - Черкасский государственный педагогический институт имени 300-летия Воссоединения Украины с Россией, кафедра геометрии и методики математики.

Автореферат разослан "7" марта 1974 г.

Защита состоится "10" апреля 1974 г.

в 14.00 часов на заседании Ученого Совета по присуждению ученых степеней физико-математического факультета Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького (ауд.4 31).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института (г.Киев, ул.Пирогова, 9).

Отзывы просим присылать по адресу: 252030, Киев-30, ул.Пирогова 9, научная часть.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ СОВЕТА

ПРЕДМЕТ, ЦЕЛЬ, ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Осуществляемое в наши дни обновление содержания школьного курса математики характеризуется сближением его с ведущими и перспективными отраслями, идеями и методами современной математики. Одной из таких идей является теоретико-множественная трактовка математических понятий. Важным теоретико-множественным понятием является понятие отношения между элементами множества. Какое бы множество ученики не рассматривали, они встречаются с определенными отношениями на нем. Отношения фактически пронизывают весь школьный курс математики.

Отношение - одна из основных логико-философских категорий. На важность выяснения отношений между вещами неоднократно указывали классики марксизма-ленинизма. В.И.Ленин выделял 16 элементов диалектики, три из которых предусматривают необходимость исследования отношений: "... 2) вся совокупность многоразличных о т н о ш е н и й этой вещи к другим; ... 8) отношения каждой вещи (явления etc) не только многоразличны, но всеобщи, универсальны. Каждая вещь (явление, процесс etc) связаны с к а ж д о й; ...

... 10) бесконечный процесс раскрытия новых сторон, отношений etc "*.

В математике отношения также играют важную роль. В последнее время математику рассматривают как науку о структурах, а структура - это множество с заданными на нем отношениями. Множества уже вошли в школьный курс математики. Нужно изучать и отношения на разных множествах. Но раньше в школе мало обращали внимания на отношения между предметами и свойства этих отношений. Учащиеся изучали параллельные прямые, конгруэнтные фигуры, вертикальные углы, но не знали, что отношение конгруэнтности, например, симметрично и транзитивно, хотя неявно пользовались этими свойствами.

Вице-президент Международной комиссии по математическому образованию С.Страшевич (ПНР) на XIУ Международном математическом конгрессе (1962 г.) говорил: "Я убежден, что элементы теории отношений более важны, чем некоторые традиционные темы школьной математики. Если мы научим учащихся замечать отношения и формулировать их свойства, мы сделаем для их математического воспитания намного больше, чем тренируя их, например, в решении сложных уравнений" ("Математика в школе", 1965, № 2, стр.91).

О необходимости изучения отношений в школьном курсе математики наряду с обобщающими понятиями множества, отображения, функции, группы и т.п. пишут в своих работах А.Н.Колмогоров, А.А.Столяр, И.Ф.Тесленко и др.

К сожалению, на страницах наших методических журналов опыт изучения отношений с учащимися освещается пока еще слабо, он касается работы математических кружков IX-X классов, факультатив-

---

* В.И.Ленин. Философские тетради. М.,Политиздат.1965, стр.202.

ных занятий или математических школ ("Математика в школе", 1968, № 2,4; 1970, № 1). Назрел вопрос изучения отношений, прежде всего двучленных (бинарных), со всеми учащимися.

В новых учебных пособиях по алгебре и геометрии для УI и УП классов термин "отношение" употребляется, хотя и эпизодически; здесь отмечаются некоторые свойства отдельных отношений (параллельности прямых, подобия фигур и т.п.). В геометрии учащиеся встречаются с разнообразными отношениями на различных множествах, пользуются их свойствами, оперируют функциональными отношениями - отображениями. Есть предложения сделать это понятие таким же действенным, как и понятия множества, отображения и т.д.

Наиболее важными отношениями в курсе геометрии УI-УП классов являются конгруэнтность и подобие фигур. На их изучение новая программа отводит довольно много времени: 25-30% общего количества учебных часов по геометрии. Но традиционное изложение этого материала в школе сильно устарело. В учебниках А.П.Киселева и Н.Н.Никитина изучались конгруэнтность и подобие только многоугольников, а не произвольных фигур. Гомотетия не входила явно в эти учебники. Методика изучения ее в массовой школе недостаточно разработана. В статьях и брошюрах О.П.Сергуновой, В.Г.Соболевой, Л.И.Лященко рассмотрена методика изучения гомотетии в основном по учебнику Н.А.Глаголева. Векторный подход к гомотетии почти не освещен в методической литературе.

Таким образом, возникает потребность уделить серьезное внимание методике изучения этих новых для школьного курса геометрии вопросов: отображение фигур; введение понятия конгруэнтности фигур любой конфигурации и согласование с ним конгруэнтности отрезков, углов, дуг, многоугольников; подобие произвольных фигур; гомотетия и ее свойства; связь отношений между фигурами с преобразованиями плоскости и т.д.

В пособиях по геометрии для УI и УП классов под редакцией академика А.Н.Колмогорова, отражающих содержание модернизированной программы, имеем качественно новое изложение указанных тем: теоретико-множественный и функциональный подход, связь с геометрическими преобразованиями, введение сначала общего понятия конгруэнтных и подобных фигур. Учителя испытывают много трудностей при преподавании этих тем. Поэтому возникла необходимость разработать методику изучения этих тем в школе, выявить трудности, с которыми встречаются учащиеся во время освоения этого материала, и указать пути их предупреждения и устранения.

Обе темы - конгруэнтность и подобие фигур - рассматриваются в новых пособиях на основе отображения фигуры на фигуру, и лишь разные отношения, связывающие расстояния между точками, характеризуют или одинаковость формы и размеров, или сохранение только формы. Совместный подход к изучению этих тем дает возможность разработать и использовать общие методические приемы для успешного усвоения обоих разделов, позволяет употреблять методы аналогии, сопоставления и противопоставления.

Центральная задача диссертации - разработать методику изучения с учащимися тех вопросов конгруэнтности и подобия фигур, которые впервые рассматриваются по новым программам или в изучение которых внесены существенные изменения; показать, где, когда и как целесообразно знакомить учащихся с двучленными отношениями в курсе геометрии восьмилетней школы, какие именно свойства отношений целесообразно использовать при изучении теоретического материала и при решении задач.

В соответствии с этой задачей мы ставили и пытались решить следующее:

I. Показать, когда и как целесообразно вводить понятие двучленного отношения на множествах; определить, какие свойства отношений надлежит изучать и где их использовать.

2. Выявить, какие ошибки допускают учащиеся в понимании отношений вообще и при изучении конгруэнтности и подобия фигур в частности.

3. Проанализировать различные подходы к изучению конгруэнтности фигур и рассмотреть наиболее важные вопросы методики преподавания конгруэнтных фигур.

4. Проанализировать различные подходы к изучению подобия и гомотетии и разработать методику преподавания подобных и гомотетичных фигур в УП классе.

Диссертация написана на основании изучения и анализа математической, научно-методической и психолого-педагогической литературы по исследуемым вопросам, собственного опыта работы в средней школе и в педагогическом институте, экспериментальных исследований, проведенных автором в 1970-1973 г.г., а также изучения опыта работы передовых учителей математики г.Киева, Житомирской и Киевской областей УССР.

Обучающий эксперимент проводился в 1971-1973 гг. лично и по разработанным автором материалам в СШ № 92 (учителя Ю.И.Малеванный, Н.Ф.Голюк), в СШ № 30 (учительница Л.Б.Мирецкая) г.Киева. Диссертантом велись также исследования в школе юных математиков при Житомирском педагогическом институте имени И.Франко.

СТРУКТУРА И ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и заключения. В конце работы помещены приложения, включающие список наиболее употребляемых в школьном курсе геометрии отношений с их свойствами и указатель использованной литературы.

П е р в а я г л а в а "Некоторые вопросы теории отношений и изучения их в школе" посвящена выяснению сущности понятия отношения, краткой характеристике тех свойств отношений, которые целесообразно рассматривать в школе, взаимосвязи отношений, соответствий, функций, отображений, а также общим вопросам изучения отношений в восьмилетней школе.

Термин "отношение" в математике употребляется для обозначения двух разных понятий. В школе его до сих пор трактуют как синоним частного. Но в современной математике оперируют унарными, бинарными, тернарными и т.д. отношениями как одним из основных понятий теории множеств.

В школе прежде всего желательно познакомить учащихся с бинарными отношениями. Как известно, бинарным отношением R на множестве M называется подмножество R множества M x M.

Чтобы характеризовать разные конкретные отношения, выясняют их свойства. Особое значение для школьного курса математики имеют отношения эквивалентности и порядка. Поэтому в первую очередь нужно познакомить учащихся с четырьмя свойствами, входящими в определения этих типов отношений: рефлексивностью, симметричностью, антисимметричностью и транзитивностью.

В школе предлагаем придерживаться такой трактовки этих понятий, которая вытекает из следующих определений. Отношение R на множестве M называется р е ф л е к с и в н ы м, если для произвольного элемента x множества M выполняется xRx. Равенство на множестве чисел, подобие фигур, соизмеримость отрезков, " не меньше" для чисел, равносильность уравнений - все это примеры рефлексивных отношений на указанных множествах.

Отношение R на множестве M называется с и м м е т р и ч н ы м, если для произвольной пары x и y элементов множества M из xRy следует yRx. Примерами таких отношений являются конгруэнтность фигур, равновеликость треугольников, смежность углов, перпендикулярность прямых и т.п.

Отношение R на множестве M называется а н т и с и м м е т р и ч н ы м, если для произвольных элементов x и y множества M из xRy и yRx следует, что x=y. В этот класс входят отношения: "не больше" для чисел (если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$), "делится на" на множестве натуральных чисел, равенство на числовых множествах и т.п.

Отношение R на множестве M называется т р а н з и т и в н ы м, если для произвольных элементов x, y, z множества M из xRy и yRz следует xRz. Примеры транзитивных отношений: равенство на множестве величин, подобие фигур, сонаправленность лучей и т.п.

Представление о том, какие отношения наиболее часто встречаются в школьном курсе планиметрии, о их свойствах, а также о соответствующих типах отношений, дает таблица, приведенная на следующей странице.

В работе рассматривается символическая запись отношений (общая и частная), иллюстрируется на примерах наглядное представление отношений над конечными множествами с помощью сетки (решетки), графа, диаграммы, а над произвольными - с помощью декартового графика.

Отношения тесно связаны с соответствиями, отображениями, функциями. При неформальном изложении нет причин различать отношения и соответствия, особенно в школьном преподавании. С отношениями учащиеся встречаются в жизни (родственные, общест-

№ п/п	Отношения	На множестве	Символ	Свойства					Тип отношения
				Рефлек-сивность	Антирефлек-сивность	Симметрич-ность	Антисим-метричность	Транзитив-ность	
1.	Равенство	величин	$=$	+		+	+	+	Э*
2.	Конгруэнтность	фигур	$\cong$	+		+		+	Э
3.	Параллельность	прямых	$\parallel$	+		+		+	Э
4.	Сонаправленность	лучей	$\uparrow\uparrow$	+		+		+	Э
5.	Равновеликость	фигур		+		+		+	Э
6.	Подобие	фигур	$\sim$	+		+		+	Э
7.	Коллинеарность	векторов		+		+		+	Э
8.	Больше(меньше)	величин	$>(<)$		+		+	+	СП
9.	Не больше (не меньше)	величин	$\leq(\geq)$	+			+	+	НП
10.	Пересечение	прямых	x		+	+			
11.	Смежность	углов			+	+			
12.	Вертикальность	углов			+	+			
13.	Перпендику-лярность	прямых	$\perp$		+	+			
14.	Неравенство	величин	$\neq$		+	+			
15.	"... наклонная к..."	прямых			+	+			
16.	Противонаправ-ленность	лучей	$\uparrow\downarrow$		+	+			
17.	Гомотетичность	фигур		+		+			

* Э - эквивалентность; СП - строгий порядок, НП - нестрогий порядок.

венные отношения), и этот термин, как синоним связи между двумя объектами, интуитивно понятен и известен. В школе следует систематически пользоваться термином "отношение" и опираться на понимание отношений как связи между объектами.

В научной и учебной литературе понятию отображения придают разный логический смысл. I. Отображение задано, если указаны два множества: А, которое отображается (область отправления), и В, в которое отображается А, (область прибытия) и если для каждого $x \in A$ определен единственный элемент $y \in B$. 2. Отображение задано, если указано множество А, которое отображается, и для каждого элемента $x \in A$ определен единственный элемент у. Здесь не требуется задавать множество В, поэтому получаем новый смысл понятия отображения. Если, например, отрезок АВ спроектировать на прямую MN, причем $A \to A_1$ и $B \to B_1$, то отображения $[AB]$ на $[A_1B_1]$ и $[AB]$ в (MN) в первом случае различные, а во втором рассматриваются как одно отображение. 3. Отображение задано, если указано множество пар с разными первыми элементами. При втором и третьем толкованиях понятия отображения каждое обратимое отображение имеет обратное, и при первом подходе не всегда существует обратное обратимому отображению множества в множество.

Говоря о педагогической целесообразности каждого из трех рассмотренных толкований понятия отображения, нужно принимать во внимание возраст детей, доступность материала учащимся УI класса, где это понятие вводится. Считаем более уместным рассматривать отображение как множество пар с разными первыми элементами.

Важными видами отображений являются взаимно однозначные отображения . Наряду с ними в математике пользуются понятием взаимно однозначного соответствия. Последнее более знакомо учителям и его иногда механически переносят на отображения. Сохранение термина "взаимно однозначные отображения" в школьной учебной литературе может внести путаницу, когда под взаимно однозначными понимали бы только отображения множества на множество. Термин "обратимое отображение" более удачен и его использование в школе оправдано.

Во втором параграфе первой главы рассматриваются некоторые общие методические вопросы, возникающие в связи с изучением отношений в школе, в частности, как познакомить учащихся с понятием отношения, когда его ввести, какие свойства отношений и как изучать.

Считаем, что давать строгое определение понятию отношения в восьмилетней школе преждевременно и не вызывается потребностями обучения. Основная цель здесь - научить учащихся распознавать конкретные отношения, формулировать свойства отношений, использовать их при доказательстве теорем и решении задач, уметь сравнивать свойства отдельных отношений на одном и том же множестве, делать простейшие выводы из таких сравнений, подготовить фундамент для последующих обобщений и абстракций.

В отечественной и зарубежной методической литературе распространено мнение, что знакомить учащихся с понятием отношения следует на конкретных примерах. Но называть только примеры отношений на множествах, которые встречаются при изучении программного материала, недостаточно, чтобы учащиеся осознали понятие отношения. Проведенные диссертантом исследования показали, что учащиеся разных классов смешивают понятие двучленного отношения и свойство отдельного элемента множества (например, перпендикулярные прямые и вертикальная прямая, простое число и взаимно простые числа, смежные углы и острый угол и т.п.), неполно формулируют утверждения, относящиеся к отношениям. Особенно это касается симметричных отношений.

Понятие отношения следует формировать постепенно. Это процесс длительный, рассчитанный не на один определенный класс и не на один-два урока. В IУ-У классах этим словом можно пользоваться как существительным в понимании связи между двумя элементами множества. Начиная с УI класса, нужно систематически пользоваться термином "отношение" в вопросах, где это понятие встречается.

В изучении свойств отношений возможны два пути: I) выделить определенное количество часов для компактного изучения свойств в одном классе, а потом применять эти свойства в разных вопросах программы; 2) изучать их постепенно, по мере возрастания необходимости использования при овладении программным материалом. В обоих случаях можно использовать абстрактно-дедуктивный метод изучения свойств отношений (по определению) или конкретно-индуктивный (на примерах).

Для облегчения восприятия этих вопросов иногда предлагают начинать с графических иллюстраций и на основе их характеристики подойти к определениям рефлексивных, симметричных и других отношений. Но предварительное изучение свойств отношений на основании иллюстративного материала существенно не облегчает их усвоения по определению. Оба подхода сосуществуют параллельно, усвоение каждого требует времени и определенных усилий. Кроме того, графы, сетки, диаграммы и т.п. эффективны для конечных множеств, а в геометрии приходится в основном иметь дело с отношениями на бесконечных множествах.

Сосредотачивание материала об отношениях в одном месте учебника и изучение их свойств в абстрактном виде не оправдывает себя.

Поэтому изучать их лучше поэтапно, начиная с IУ класса, и знакомить с ними учащихся не в общем виде, а на примерах конкретных отношений в период изучения соответствующего понятия.

Пропедевтика изучения отношений в IУ-У классах включает ознакомление со свойствами отношений, которые выясняются здесь на основании определений понятий с помощью целесообразно поставленных вопросов. Начинать изучение свойств отношений равенства и неравенства рационально при сравнении отрезков, а не на множестве натуральных чисел в IУ классе. Эти свойства формулируются и записываются сокращенно для наиболее важных из отношений, изучаемых в IУ-У классах, без употребления специальной терминологии (для равенства чисел, перпендикулярности и параллельности прямых, смежности и вертикальности углов, "является кратным" и "является делителем" для чисел и т.д.). Терминологию следует применять, начиная с УI класса, когда значительно возрастает количество доказываемых утверждений, и ссылаться на свойства отношений в развернутом словесном виде становится уже неудобно.

Необходим внимательный анализ программного материала и выявление мест, где возможно и полезно рассматривать элементы теории отношений. Автором выполнена такая работа относительно тем "Конгруэнтность фигур" и "Подобие фигур" с учетом роли изучаемого материала в общей системе курса или отдельного раздела.

Во второй главе "Методика изучения отношения конгруэнтности фигур" излагаются различные подходы к изучению конгруэнтности фигур в научной, учебной и методической литературе, освещаются некоторые спорные терминологические вопросы, касающиеся затрагиваемых в главе понятий. Здесь раскрываются возможности наиболее эффективного решения проблем, связанных с введением общего понятия конгруэнтных фигур и согласованием с ним отношения конгруэнтности на других множествах, методика обучения учащихся этим вопросам.

Известно, что в различных системах построения геометрии конгруэнтность может быть первичным понятием (в системе Паша - конгруэнтность произвольных фигур, у Веронезе - только отрезков, у Гильберта - отрезков и углов), либо определяться на основании движения или расстояния. В § I этой главы кратко анализируется, какой подход к изучению конгруэнтности принят в школьных учебниках разных стран. Оказывается, что отношение конгруэнтности фигур часто непосредственно опирается на понятие движения либо связывается с метрикой трехмерного и двухмерного пространства.

Считаем, что не только теоретико-множественный подход к геометрическим фигурам, но и методические соображения (предупредить возможность механического перенесения свойств числовых равенств на множество фигур) обуславливают необходимость введения термина "конгруэнтность" для фигур. Чтобы избежать трудностей переучивания учащихся УI класса в данном вопросе, можно воспользоваться предложением А.Н.Колмогорова о том, чтобы в IУ классе обойтись без слов "равные фигуры", говорить о фигурах, которые можно совместить, т.е. отношение равенства изучать только для величин. Тогда в У классе, рассматривая геометрические преобразования, говорить о конгруэнтных фигурах (без определения, но объяснить, что это фигуры, которые можно совместить наложением), а в УI классе дать определение этому понятию.

В § 2 диссертации указываются преимущества ознакомления учащихся в курсе планиметрии с общим понятием конгруэнтных фигур, а не только многоугольников. Во-первых, если дать одно общее определение для произвольных фигур, то не придется снова и снова определять конгруэнтность отдельных видов фигур, и мы сможем, например, рассматривать конгруэнтные окружности, даже не изучая отдельно это отношение. Кроме того, в практике измерений, построений, расчетов приходится иметь дело именно с конгруэнтностью произвольных фигур. Отметим также, что в геометрических преобразованиях речь идет о фигурах любой конфигурации, что можно говорить о свойствах площадей произвольных фигур, а не только многоугольников. В стереометрии конгруэнтность фигур специально нет надобности изучать, знания учащихся из курса планиметрии должны распространяться и на пространственные фигуры. В УП классе подобие также изучается для произвольных фигур, что отвечает практическим потребностям работы с моделями, планами, с техническими чертежами. Вот почему считаем, что в школе следует изучать конгруэнтность произвольных фигур, причем непременно согласовывать конгруэнтность многоугольников с общим определением.

Анализ различных определений конгруэнтных фигур в школьных учебниках и пособиях показывает, что полную общность для любых фигур обеспечивает определение через отображение с сохранением расстояний. Оно отвечает современному толкованию указанного отношения в научной литературе и, как показывают наблюдения, соответствует жизненным представлениям детей об этих фигурах и вполне доступно пониманию шестиклассников.

Исходным материалом для введения в школьный курс геометрии общих понятий конгруэнтных и подобных фигур, перемещений и гомотетии служат отображения фигур. Даже при условии, что учащиеся сначала в алгебре изучают понятие функции, а потом в геометрии сталкиваются с отображениями, характер упражнений, рассматриваемых в курсе алгебры, незначительное количество задач с бесконечными точечными множествами, отсутствие геометрических примеров с конечными множествами точек (например, отображение вершин двух симметричных относительно оси многоугольников), отсутствие понятия обратимой функции в УI классе приводят к выводу, что в геометрии нельзя ограничиться теми сведениями об отображениях, которые учащиеся получают в курсе алгебры. Необходимо добиться четкого усвоения учащимися основных черт отображений на уроках геометрии.

На основании проведенных исследований в работе сделаны определенные выводы относительно понимания учениками темы "Отображение фигур" и указаны приемы устранения или уменьшения замеченных недостатков.

Во-первых, не следует считать, что рисунок достаточно показывает учащимся, как задается отображение. Нужно читать его, выясняя, каким построением получается образ и прообраз.

Во-вторых, сознательному усвоению всех условий отображения фигуры на фигуру содействуют контрпримеры, в которых нарушается хотя бы одно из условий. Если варьировать несущественные условия отображения, то неизменные существенные условия тесно ассоциируются с изучаемым понятием.

В-третьих, описательное изучение обратимых отображений малоэффективно, ведет к сужению или расширению понятия. Только пользуясь четким, "положительным" определением обратимого отображения, учащиеся быстро и правильно распознают обратимые и необратимые отображения.

В-четвертых, чтобы учащиеся не смешивали обратимое и обратное данному отображения, нужно подчеркнуть, что каждое отображение является обратимым либо необратимым. А об обратном отображении можно говорить только относительно другого отображения (аналогия - число, обратное данному).

В-пятых, следует увеличить внимание к отображениям фигуры на фигуру другой конфигурации. Иначе возникает неоправданная связь между отображением фигуры на фигуру и конгруэнтностью фигур, когда существование первого отношения учащиеся связывают с наличием второго.

Имеющуюся в пособии по геометрии УI класса систему упражнений по теме "Отображение фигур" целесообразно дополнить упражнениями, которые требуют от учащихся выполнения построений, активных действий, а не только умения пользоваться готовыми рисунками:

I) построить образ данной точки в заданном отображении;

2) построить точку, образ которой в заданном отображении известен;

3) придумать закон отображения для двух данных фигур;

4) указать несколько различных отображений данной фигуры на другую данную фигуру и под.

Практика работы школы свидетельствует о том, что сознательное понимание учащимися отношений между объектами невозможно без серьезной работы над определениями понятий, без системы упражнений, выясняющих наличие связи между двумя объектами. Чтобы подчеркнуть, что по определению устанавливается конгруэнтность лишь двух фигур, предлагаем учащимся упражнения, в которых выясняем различие между свойствами одной фигуры (равнобедренный треугольник, ограниченная фигура) и отношением между двумя фигурами.

Большинство определений и теорем в геометрии поданы в симметричной форме, т.е. их формулировка включает симметричность соответствующих отношений. Но определение конгруэнтных (в УП классе - подобных) фигур имеет несимметричную форму: "фигура Ф называется конгруэнтной фигуре $Ф_1$, если..." Практика работы с обычной формой утверждений переносится учителями и на новые определения, а это мешает усвоению новых понятий и свойств соответствующих отношений. Навыки свободного перехода от симметричной формы утверждений к несимметричной и наоборот помогают учащимся глубже понять материал, сознательно использовать свойства отношения конгруэнтности фигур.

Свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности отношения конгруэнтности фигур вполне доступны пониманию шестиклассников. Правда, при обосновании этих свойств они иногда рассуждают только о расстояниях, забывая об отображении фигур. Но рефлексивность этого отношения не так очевидна, как кажется. Учащиеся сомневаются, правильно ли сказать, что фигура конгруэнтна сама себе. Чтобы убедить их в этом, нужно показать отображение фигуры на себя, которое сохраняет расстояния (например, тождественное отображение). В работе показаны примеры использования свойств конгруэнтности фигур в курсе планиметрии.

Конгруэнтность фигур тесно связана с такими функциональными отношениями как перемещения. К изучению осевой симметрии, поворота и параллельного переноса в школе следует осуществлять единый подход, а именно: определять их как перемещения. Тогда конгруэнтность образа и прообраза непосредственно следует из определений. Проведенные исследования подтвердили, что систематизация свойств каждого перемещения, сопоставление свойств различных перемещений и выделение общих свойств всех перемещений в значительной мере содействуют успешному их усвоению и сознательному применению.

Во время эксперимента работа по изучению свойств перемещений сопровождалась оформлением таблицы, представленной на следующей странице. Она заполнялась учащимися по мере изучения теоре-

Перемещения / Свойства	I. Поворот	2. Центральная симметрия	3. Осевая симметрия	4. Параллельный перенос
I. Свойство соответствующих фигур	Фигура отображается на конгруэнтную ей фигуру	Фигура отображается на конгруэнтную ей фигуру	Фигура отображается на конгруэнтную ей фигуру	Фигура отображается на конгруэнтную ей фигуру
2. Образ прямой	Прямая	Прямая, параллельная данной прямой	Прямая	Прямая, параллельная данной прямой
3. Символика	$R_0^{\alpha^\circ}(X) = X_1$	$S_0(X) = X_1$	$S_\ell(X) = X_1$	$T(X) = X_1$
4. Неподвижные элементы	Центр поворота	Центр симметрии; прямые, проходящие через центр	Точки оси; ось и перпендикулярные к ней прямые	
5. Тождественное перемещение	Поворот на 0^0			Перенос на $\vec{0}$
6. Перемещение, обратное данному	Поворот около того же центра	Она сама	Она сама	Перенос на то же расстояние в противоположном направлении
7. Задание перемещения	Каждые два луча OX и $OX_1 = R_0^{\alpha^\circ}([OX))$	Каждая точка плоскости	Каждая прямая плоскости	Пара точек M и $M_1 = T(M)$
8. Композиция перемещений	Поворот на $(\alpha+\beta)^\circ$ с общим центром			Параллельный перенос

тического материала и решения задач. Например, параллельность центрально симметричных прямых отмечали после доказательства соответствующей теоремы. Некоторые клетки таблицы оставались длительное время пустыми, например, второй ряд, первый столбик. Когда соответствующее свойство было изучено для других перемещений, возник вопрос, справедливо ли оно для поворота. Тогда рассмотрели этот вопрос и заполнили соответствующую клетку. Работа по заполнению итоговой таблицы помогала возникновению положительных ассоциаций в памяти учащихся и в конечном счете более глубокому усвоению материала.

В связи с систематизацией свойств перемещений появляется возможность готовить учащихся к пониманию понятия группы преобразований, хотя в УI классе этот термин еще не вводится. Материал о перемещении, обратном данному, о композиции перемещений, тождественном перемещении не должен оказаться вне поля зрения учащихся. Учитывая перспективы изучения геометрии, учителю не следует обходить рассмотрение свойств перемещений, связанных с понятием группы.

В третьем параграфе второй главы "Методика изучения конгруэнтности отдельных фигур в УI-УП классах" раскрываются слабо используемые возможности применения конгруэнтности отрезков, углов, дуг и многоугольников при формировании понятия двучленного отношения, при конструировании определений конгруэнтных фигур частных видов, сопоставлении признаков конгруэнтности углов и дуг, а также треугольников. Обращается внимание на необходимость выработки у учащихся таких навыков: отображать угол на угол, отрезок на отрезок, дугу на дугу и на основании этого не механически, а сознательно применять общее определение конгруэнтных фигур для углов, отрезков, дуг и т.д.; учитывать симметричность отношений в формулировке утверждений (определений, теорем).

Материал школьного курса геометрии дает возможность использовать свойства отношений конгруэнтности отрезков и углов для обоснования отдельных этапов доказательств как при решении задач, так и при изучении теоретического материала. Например, часто приходится рассматривать два треугольника, имеющих общую сторону. Если в таких случаях записывать конгруэнтность отрезка самому себе на основании рефлексивности соответствующего отношения, то учащиеся легче и быстрее выясняют, какой признак конгруэнтности треугольников нужно использовать. Употребление записи типа $\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3 \cong \angle 4$ позволяет подвести учащихся к выводу, что благодаря транзитивности данного отношения углы любой пары конгруэнтны.

Обосновывая этапы доказательств не только в теоремах, но и в задачах, учащиеся познают логическую структуру доказательств, развивают дедуктивное мышление. Если записывать доказательство в два столбика (утверждение и обоснование), предлагать ученикам заполнять мотивировку в правом столбике, то будем иметь хороший методический прием для обучения и одновременно возможность отмечать использование свойств отношений.

С введением новых школьных учебников роль признаков конгруэнтности треугольников несколько уменьшилась, так как конгруэнтность фигур можно доказывать на основании свойств перемещений. Но нередко целесообразно применять и признаки. Они изучаются в УI классе без доказательства.

Эффективность усвоения признаков конгруэнтности треугольников в УI классе в значительной мере возрастает, если изучение каждого признака проводить в таком плане: конкретная задача на построение треугольников, бесконечное множество решений этой задачи; результат - все треугольники конгруэнтны. После такой подготовительной работы объяснение: можно доказать, что существует перемещение, которое отображает данный треугольник на построенный с сохранением расстояний; следовательно, треугольники конгруэнтны как соответствующие фигуры при перемещении. Имеет место признак конгруэнтности треугольников (формулируют его).

Применяя признаки конгруэнтности треугольников, важно соблюдать логическую последовательность операций при рассуждениях (выбрать два треугольника, выяснить число соответственно конгруэнтных элементов, рассмотреть их расположение, применить признак, выяснить расположение искомых элементов, сделать вывод об отношении между ними). В работе характеризуются типичные ошибки, допускаемые учениками в процессе применения признаков, и возможные пути их устранения.

В диссертации обосновывается роль и место изучения признака конгруэнтности многоугольников (при $n>3$), указана возможность увязать этот вопрос с решением конкретной задачи, приведены образцы упражнений на признаки конгруэнтности конкретных видов четырехугольников. Целенаправленное их решение способствует повторению признаков конгруэнтности разных фигур, систематизации материала и готовит базу для решения последующих вопросов курса геометрии (свойства площадей, признаки подобия многоугольников и т.д.).

Третья глава - "Методика изучения подобных фигур и гомотетии". Она посвящена исследованию вопросов изучения подобных и гомотетичных фигур, выяснению их общности и различия, связи этих фигур с соответствующими преобразованиями плоскости.

В § I анализируются разные подходы к изучению подобных и гомотетичных фигур в учебной и методической литературе, в том числе и зарубежной, отражена дискуссия о порядке изучения подобия и гомотетии, недостатки и преимущества каждого пути и наши мнения по этим вопросам.

В методической литературе неоднократно указывались отдельные недостатки изучения этого раздела программы. Наиболее существенные из них такие. I) Подобие рассматривалось как один из видов метрического соотношения между элементами фигур и не связывалось с преобразованием плоскости; 2) не изучалась гомотетия, хотя ее использовали для построения подобных многоугольников; 3) отсутствовало пропедевтическое ознакомление с подобными фигурами; 4) изучались подобные треугольники и многоугольники, но не произвольные фигуры; 5) ученики не знакомились с обобщенными свойствами подобных фигур относительно площадей, длин, объемов; 6) не изучались свойства отношения подобия, хотя ими неявно пользовались. По новой программе большинство указанных недостатков устраняется, кроме 3 и 5.

В жизненной практике дети рано знакомятся с фигурами одинаковой формы, но эти представления лишь в УП классе получают математическую обработку. Заслуживает внимания идея пропедевтического ознакомления учащихся с подобными фигурами. Уже в IУ классе наряду с примерами фигур, которые можно совместить, полезно отмечать фигуры одинаковой формы. Изменение площадей, поверхностей и объемов отдельных фигур в IУ–У классах можно рассматривать для случая, когда линейные размеры увеличиваются или уменьшаются в целое число раз. В УI классе нужно обращать внимание на признаки отсутствия подобия двух фигур и т.д.

В работе аргументируется целесообразность введения общего понятия подобных фигур, причем в начале темы, так как в этом случае естественно согласовать с общим определением подход к подобным многоугольникам. Невозможно доказать существование подобных фигур непосредственным построением, опираясь на определение фигуры, подобной данной фигуре. Поэтому необходимо как-то иначе показать их существование. Отметим две возможности решить поставленный вопрос: 1) использовать гомотетию; 2) постулировать существование фигуры, подобной данной с произвольным коэффициентом подобия, и конгруэнтность соответствующих углов подобных фигур. Признавая полезность и доступность изучения гомотетии по новой программе, в школе естественно идти первым путем, доказывая существование подобных фигур.

В § 2 раскрываются эффективные приемы и способы, направленные на сознательное усвоение учащимися понятия подобных фигур: использование предыдущего опыта и знаний детей, сопоставление рассматриваемого понятия с предметами окружающего мира; использование контробразов, сочетание в обучении слова и наглядности, установление логических взаимосвязей между понятиями. Задача учителя состоит в том, чтобы сначала выявить, как ученики понимают подобие фигур, исправить неправильные и закрепить правильные представления, на примерах подвести учащихся к необходимости уточнить отношение "имеют одинаковую форму" через известные геометрические понятия. Учащиеся правильно воспринимают определение подобных фигур, если основное содержание его прежде всего выясняется на одном-двух частных примерах (две окружности, два квадрата, два треугольника). Для последующего усвоения темы необходимо четкое представление об инвариантности отношений всех соответствующих расстояний в подобных фигурах. В диссертации приведены образцы примеров и контрпримеров, вопросы к ним, закрепляющие эти представления.

Подобие фигур - еще одно бинарное отношение на множестве фигур, которое учащиеся изучают в геометрии. В работе показано, какого характера упражнения дают возможность подчеркнуть наличие отношения подобия между двумя объектами, выяснить свойства этого отношения, иллюстрируется применение этих свойств в обучении.

Чтобы обратить внимание учащихся на то, что подобие фигур-двучленное отношение, целесообразно выяснить, о скольких фигурах идет речь в определении подобных фигур, провести аналогию с другими отношениями (параллельность прямых, конгруэнтность фигур), противопоставлять подобие, связывающее две фигуры, ограниченности, выпуклости, прямолинейности и т.п. как свойствам одной фигуры, добиваться правильной формулировки утверждений, касающихся подобия фигур.

Проведенные исследования показали, что после изучения зависимости между конгруэнтными и подобными фигурами следует учить учащихся выполнять двучленное разбиение множества подобных фигур и представить его в виде классификационной схемы.

Подобные фигуры

конгруэнтные фигуры | подобные неконгруэнтные фигуры

Схематическое изображение указанной зависимости в сочетании с примерами подобных конгруэнтных и неконгруэнтных фигур обеспечивают стойкое и неискаженное ее представление.

Следующий параграф посвящен вопросам, связанным с новым для учащихся видом отображения плоскости на себя - гомотетией и соответствующим ей отношением гомотетичности фигур. Предварительное изучение векторов и действий над ними в УП классе позволяет использовать векторную форму определения гомотетии и не ограничивать значения коэффициента гомотетии ($к > 0$, $к \neq 1$), как предлагали у нас А.В.Погорелов, Г.П.Сенников и практикуют в школах ГДР, ПНР. Если считать, что $к \neq 1$, то не имеет места рефлексивность гомотетичности фигур, и равные фигуры не являются гомотетичными. Если принять коэффициент гомотетии большим нуля, то лишь композиция гомотетии и центральной симметрии дает представление об обратно гомотетичных фигурах. Оба ограничения коэффициента гомотетии нецелесообразно вводить в школьный курс геометрии.

При изучении гомотетии большое внимание следует уделять формированию у учащихся преемственности представлений об изученных ранее перемещениях и новым характером отображения плоскости на себя. Поэтому естественно выходить из известного им отображения – центральной симметрии, начинать с построения гомотетичных точек, а не фигур. Исследования подтвердили эффективность введения понятия гомотетии с учетом этих замечаний по предложенному нами плану.

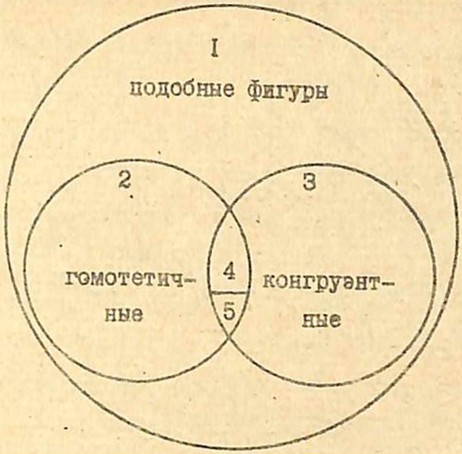
Хотя гомотетия предоставляет простой и удобный способ построения подобных фигур, но фактически с ней связано другое отношение между соответствующими фигурами – гомотетичность, а не подобие. Опыт показал, что целесообразно показать два подхода к понятию гомотетичных фигур – через гомотетию и по аналогии с введением подобных фигур, подчеркивая при этом два пути изучения преобразований плоскости и отношений между фигурами. В диссертации уделено значительное внимание месту изучения гомотетичности фигур, выяснению двучленного характера этого отношения, изучению его свойств и характеристике типичных ошибок учащихся при их обосновании, особенно в связи с нетранзитивностью гомотетичности фигур (в школьном курсе гомотетия рассматривается только с собственным центром).

Учение о свойствах гомотетичных фигур является важной частью рассматриваемой темы. Исследования показали, что учащиеся неполно отмечают отношения, связывающие отрезки в равенстве $\overrightarrow{X_1У_1} = к.\overrightarrow{XУ}$. Поэтому здесь нужно подчеркнуть не только зависимость между расстояниями, но и параллельность соответствующих отрезков. Важное следствие из теоремы об отрезках, концы которых гомотетичны (гомотетичные фигуры подобны), воспринимается учащимися формально, если в рассуждениях не показать, из каких утверждений оно вытекает. Необходимо остановиться и на вопросе о том, что каждая точка прямой (отрезка) гомотетией отображается на точку, принадлежащую образу этой прямой (отрезка), рассмотреть не теоретически, а практически гомотетию окружностей, строить подобные, но не только подобно расположенные фигуры.

Как показывает опыт, многие учащиеся нечетко понимают, чем отличаются подобные и гомотетичные фигуры, неправильно сравнивают объемы этих понятий, такие свойства гомотетичных фигур как параллельность соответствующих отрезков или наличие центра гомотетии полностью отрицают у подобных фигур, в то время как некоторые подобные фигуры имеют эти свойства.

Предупреждению таких заблуждений способствует проведение аналогии с подобными фигурами, выявление общих и отличных черт не только в соответствующих определениях, но и в свойствах этих фигур, их расположении, ориентации, установление связи с преобразованиями плоскости. Необходимо сравнивать и свойства соответствующих отношений.

Изучение гомотетичных фигур дает возможность выяснить и уточнить связь между разными отношениями на множестве фигур.



На этой схеме область 4 - центрально симметричные фигуры, а 5 - равные фигуры. В работе приведены образцы задач, которые можно предложить в связи с этой схемой. Применение этой и подобных классификационных схем в обучении способствует усвоению существенных признаков различных понятий.

Использование таблиц, особенно составление сравнительных таблиц, содействует выработке таких приемов мышления, как сравнение, сопоставление, обобщение. Они помогают систематизировать и повторить материал не только отдельной темы, но и родственных тем, а также могут служить источником новых знаний. Сравнивая в приведенной ниже таблице свойства перемещений и гомотетии и используя знания учеников о подобных фигурах, имеем возможность познакомить их со свойствами подобных преобразований.

В § 4 рассматривается педагогическая эффективность и целесообразность каждой из двух последовательностей изучения подобных треугольников и многоугольников, отличия в доказательстве признаков подобия треугольников в школьных учебниках и коррект-

Свойства \ Отображения	Перемещение	Гомотетия	Подобие
Отношение между соответствующими фигурами.	конгруэнтны	гомотетичны	подобны
Зависимость между соответствующими расстояниями.	$\|X_I Y_I\| = \|XY\|$	$\|X_I Y_I\| = \|k\| \cdot \|XY\|$	$\|X_I Y_I\| = k \cdot \|XY\|$
Параллельны ли соответствующие отрезки?	не обязательно	да	не обязательно
Отношение между соответствующими углами	конгруэнтны	конгруэнтны	конгруэнтны
Существование центра отображения	не обязательно	да	не обязательно
Образ прямой	прямая	прямая, параллельная данной	прямая
Обратимо ли данное отображение?	да	да	да
Обратное к данному отображению	перемещение	гомотетия	подобие
Композиция двух отображений	перемещение	не обязательно гомотетия	подобие

ность формулировки признака подобия многоугольников.

Изучение отношения подобия фигур на множествах треугольников и n - угольников при $n > 3$ позволяет вернуться к вопросам, затрагиваемым ранее: двучленность отношения, симметричная и несимметричная форма утверждений (определений, теорем) и вытекающие из этого виды работы с ними, свойства подобия многоугольников, место и возможности их использования.

Важнейшим вопросом теории подобия треугольников является изучение признаков их подобия. Эксперимент подтвердил, что усвоение их происходит продуктивно и целенаправленно, если подвести учащихся к самостоятельному формулированию признаков на основании признаков конгруэнтности треугольников, если перед доказательством каждого признака решить соответствующую задачу на построение. Нужно много внимания уделять основной идее доказательства, а после доказательства всех признаков выделить общие этапы в рассуждениях.

Использование в обучении сравнительной таблицы признаков конгруэнтности и подобия треугольников позволяет показать аналогию между условиями соответствующих признаков, проследить, как происходит переход от признака конгруэнтности к соответствующему признаку подобия.

Несомненную пользу приносит знакомство учащихся со схемой (см.стр. 32), которая показывает общность рассуждений в доказательствах признаков подобия треугольников, связь с признаками конгруэнтности треугольников. Хотя по программе четвертый признак не изучается, полная аналогия его доказательства с другими признаками позволяет включить его в схему и тем самым описательно познакомить учащихся с существованием такого признака.

В диссертации обсуждается вопрос о целесообразности дока-

Признаки:	по трем сторонам	по двум углам	по двум сторонам и углу между ними	по двум сторонам и углу против большей из них
Дано:	$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$	$\angle A \cong \angle A_1$ $\angle B \cong \angle B_1$	$\frac{c}{c_1}=\frac{b}{b_1}$ $\angle A \cong \angle A_1$	$\frac{c}{c_1}=\frac{b}{b_1}$; $c>b$ $\angle C \cong \angle C_1$
Доказать:	$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$			
Построим	$\triangle A_2B_2C_2$ гомотетичный $\triangle A_1B_1C_1$			
Коэффициент гомотетии	$K=\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$	$K=\frac{c}{c_1}$	$K=\frac{c}{c_1}=\frac{b}{b_1}$	$K=\frac{c}{c_1}=\frac{b}{b_1}$
	$a_2=K\cdot a_1$; $b_2=K\cdot b_1$; $c_2=K\cdot c_1$; $\angle A_2\cong\angle A_1$; $\angle B_2\cong\angle B_1$; $\angle C_2\cong\angle C_1$			
	$a=a_2$ $b=b_2$ $c=c_2$	$c=c_2$ $\angle A\cong\angle A_2$ $\angle B\cong\angle B_2$	$b=b_2$ $c=c_2$ $\angle A\cong\angle A_2$	$b=b_2$ $c=c_2$ $\angle C\cong\angle C_2$ $c>b$
Используем признак конгруэнтности треугольников	ССС	УСУ	СУС	ССУ
	$\triangle ABC \cong \triangle A_2B_2C_2$			

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

зательства в школе признаков подобия многоугольников, рассмотрены некоторые распространенные ошибки, которые допускают учащиеся, изучая подобные многоугольники, а также возможные пути предупреждения и исправления этих ошибок.

Результаты проведенных экспериментов убеждают, что изучение конгруэнтности и подобия фигур с учетом общих свойств бинарных отношений согласно указанным в диссертации рекомендациям доступно учащимся, развивает их дедуктивное мышление, способствует более эффективному усвоению материала.

Основные результаты исследований опубликованы в следующих статьях автора:

I. Отношения в школьном курсе математики, сб."Методика викладання математики", вып.7. К., "Радянська школа", 1971, на укр.языке.

2. Изучение конгруэнтности геометрических фигур в 6 классе, сб."Методика викладання математики", вып.8. К., "Радянська школа", 1972, на укр.языке.

3. Об отношениях подобия и гомотетичности фигур, сб."Методика викладання математики", вып.8. К., "Радянська школа", 1972, на укр.языке.

4. Об одной ошибке в понимании отношений в школе, сб."Методика викладання математики", вып.9. К., "Радянська школа", 1973, на укр.языке.

Заказ 4-233/13/П-74 г. Объем 2 п.л. Формат 60 х 84 1/16.
Тираж 200 экз.

Киевская книжная типография научной книги. Киев, Репина, 4.