КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. ГОРЬКОГО

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Л. З. ГРИЩЕНКО

Исследование некоторых обобщенных преобразований Фурье функций с суммируемым квадратом

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель — доктор технических наук, профессор Рапопорт И. М.

Киев — 1956 г.

Обобщенное преобразование Фурье

$$F(\lambda) = \underset{a \to \infty}{\text{l. i. m}} \int_0^a f(t)\, w(t, \lambda)\, dt$$

функции $f(t) \subset L_2(0, \infty)$ с ядром $w(t, \lambda)$, являющимся решением дифференциального уравнения

$$x'' + [\lambda - q(t)]\, x = 0, \quad t \geqslant 0, \quad q(\infty) = 0$$

исследовалося рядом авторов — Г. Вейлем (1), Е. Титчмаршем (2), Б. М. Левитаном (3) и другими.

Г. Вейль исследовал случай $q(t) \subset L(0, \infty)$.

Е. Титчмарш исследовал случай $\lim\limits_{t \to \infty} q(t) = \pm\, \infty$ при некоторых дополнительных предположениях относительно функции $q(t)$.

В диссертации исследуется тот случай, когда $q(t)$ — функция ограниченной вариации в интервале $(0, \infty)$.

Диссертация состоит из четырех глав.

В первой главе исследуется асимптотическое поведение решений дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\, x = 0,\ t \geqslant 0,\ \overset{\infty}{\underset{0}{V}}\, p(t) < \infty,\ p(\infty) \neq 0. \qquad (1)$$

Асимптотическое поведение решений этого дифференциального уравнения при дополнительном условии абсолютной непрерывности коэффициента $q(t)$ исследовано Н. Левинсоном (5). Наше исследование свободно от этого дополнительного ограничения.

Метод, разработанный Н. Левинсоном, в нашем исследовании не мог быть применен. Возможность наличия счетного множества точек разрыва у коэффициента $q(t)$ потребовала разработки нового приема исследования асимптотического поведения решений дифференциального уравнения (1).

В диссертации установлены следующие асимптотические формулы для двух линейно-независимых решений дифференциального уравнения (1) $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

$$
\left.
\begin{aligned}
x_1 &= [1 + o(1)] \exp \int_{t_0}^{t} \sqrt{-p(t)}\, dt \\
\frac{dx_1}{dt} &= [\sqrt{-p(\infty)} + o(1)] \exp \int_{t_0}^{t} \sqrt{-p(t)}\, dt \\
x_2 &= [1 + o(1)] \exp \left[-\int_{t_0}^{t} \sqrt{-p(t)}\, dt\right] \\
\frac{dx_2}{dt} &= [-\sqrt{-p(\infty)} + o(1)] \exp \left[-\int_{t_0}^{t} \sqrt{-p(t)}\, dt\right]
\end{aligned}
\right\} \quad (2)
$$

для случая $p(\infty) < 0$, и

$$
\left.
\begin{aligned}
x_1 &= \cos \int_{t_0}^{t} \sqrt{p(t)}\, dt + o(1) \\
\frac{dx_1}{dt} &= -\sqrt{p(\infty)} \sin \int_{t_0}^{t} \sqrt{p(t)}\, dt + o(1) \\
x_2 &= \sin \int_{t_0}^{t} \sqrt{p(t)}\, dt + o(1) \\
\frac{dx_2}{dt} &= \sqrt{p(\infty)} \cos \int_{t_0}^{t} \sqrt{p(t)}\, dt + o(1)
\end{aligned}
\right\} \quad (3)
$$

для случая $p(\infty) > 0$.

При $p(t) = \lambda - q(t)$ эти асимптотические формулы описывают асимптотическое поведение двух линейно-независимых решений дифференциального уравнения (1) при $\lambda < 0$ и $\lambda > 0$.

Во второй главе исследуется асимптотическое поведение производных по λ от решений дифференциального уравнения (1) для случая $\lambda > 0$.

Для этого случая установлены следующие асимптотические формулы

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial x_1}{\partial \lambda} &= -\frac{t}{2\sqrt{\lambda}} \sin \int_{t_0}^{t} \sqrt{p(t)}\, dt + o(t) \\
\frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial \lambda} &= -\frac{t}{2} \cos \int_{t_0}^{t} \sqrt{p(t)}\, dt + o(t) \\
\frac{\partial x_2}{\partial \lambda} &= \frac{t}{2\sqrt{\lambda}} \cos \int_{t_0}^{t} \sqrt{p(t)}\, dt + o(t) \\
\frac{\partial^2 x_2}{\partial t \partial \lambda} &= -\frac{t}{2} \sin \int_{t_0}^{t} \sqrt{p(t)}\, dt + o(t) \\
&[p(t) = \lambda - q(t)].
\end{aligned}
\right\} \quad (4)
$$

Асимптотические формулы (4) используются в третьей главе для исследования асимптотического поведения собственных значений и собственных функций краевой задачи

$$\frac{d^2x}{dt^2} + [\lambda - q(t)]\, x = 0, \qquad \overset{\infty}{\underset{0}{V}} q(t) < \infty, \quad q(\infty) = 0 \tag{5}$$

$$\begin{gathered} x(0,\ \lambda)\cos\alpha + x'_t(0,\ \lambda)\sin\alpha = 0 \\ x(l,\ \lambda)\cos\beta + x'_t(l,\ \lambda)\sin\beta = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

при неограниченном возрастании длины интервала $(0,\ l)$.

Для положительных собственных значений λ_n и соответствующих им нормированных собственных функций $\xi_n(t)$ установлены следующие асимптотические формулы

$$\begin{gathered} \sqrt{\lambda_{n+1}} - \sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi}{l} + o\left(\frac{1}{l}\right) \\ \xi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\, \frac{x(t,\ \lambda_n)}{\sqrt{f^2(\lambda_n) + r^2(\lambda_n)}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\right) \end{gathered} \tag{7}$$

где

$$f(\lambda) = -\frac{x_2(0,\lambda)\sin\alpha + x'_{2t}(0,\lambda)\cos\alpha}{\sqrt{\lambda}}$$

$$r(\lambda) = \frac{x_1(0,\lambda)\sin\alpha + x'_{2t}(0,\lambda)\cos\alpha}{\sqrt{\lambda}}$$

$$x(t,\lambda) = f(\lambda)\, x_1(t,\lambda) + r(\lambda)\, x_2(t,\lambda)$$

$x_1(t,\lambda)$ и $x_2(t,\lambda)$ — частные решения дифференциального уравнения (1), для которого были установлены ранее асимптотические соотношения (3) и (4).

Для последовательности отрицательных собственных значений и соответствующих им нормированных собственных функций установлены следующие асимптотические формулы

$$\begin{gathered} \lambda_\nu = \Lambda_\nu + 0\left(\exp\left[-2\int_{t_0}^{l}\sqrt{-p(t)}\,dt\right]\right) \\ \xi_\nu(t) = \frac{u_2(t,\Lambda_\nu)}{\sqrt{\int_0^\infty u_2^2(t,\Lambda_\nu)\,dt}} + o(1) \end{gathered} \tag{8}$$

где $\{\Lambda_\nu\}$ — последовательность нулей функции

$$m(\lambda) = \frac{u_2(0,\lambda)\sin\alpha + u_2{}'(0,\lambda)\cos\alpha}{2\sqrt{-\lambda}}$$

на полуоси $\lambda < 0$, а $u_2(t, \lambda)$ — частное решение дифференциального уравнения (5), удовлетворяющее в соответствии с (2) асимптотическому соотношению

$$u_2(t, \lambda) = [1 + o(1)] \exp[-\int_{t_0}^{t} \sqrt{-p(t)}\, dt]$$

$$\frac{\partial u_2(t, \lambda)}{\partial t} = [-\sqrt{-\lambda} + o(1)] \exp[-\int_{t_0}^{t} \sqrt{-p(t)}\, dt].$$

При $\operatorname{ctg} \beta < 0$, кроме собственных значений λ_ν, начиная с достаточно большого l, будет существовать отрицательное собственное значение

$$\mu = -\operatorname{ctg}^2 \beta + o(1).$$

Собственному значению μ соответствует нормированная собственная функция $\eta(\mu)$, для которой при фиксированном t имеет место предельное соотношение

$$\lim_{l \to \infty} \eta(t) = 0$$

В четвертой главе посредством метода, разработанного Б. М. Левитаном и И. М. Рапопортом (4), конструируется преобразование Фурье, ядром которого является решение уравнения (5) и доказывается следующая теорема.

Терема 1. Для всякой функции $f(t) \subset L_2(0, \infty)$ существует предел в среднем

$$F(\lambda) = \underset{L \to \infty}{\text{l. i. m}} \int_{0}^{L} f(t)\, w(t, \lambda)\, dt$$

где

$$w(t, \lambda) = \frac{x(t, \lambda)}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\lambda}\, \rho(\lambda)}$$

$x(t, \lambda)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + [\lambda - q(t)]x = 0, \quad \overset{\infty}{\underset{0}{V}} q(t) < \infty, \; q(\infty) = 0 \qquad \text{(A)}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = \sin \alpha, \; x'(0) = -\cos \alpha, \qquad \text{(B)}$$

$$\rho(\lambda) = \sqrt{\lim_{l \to \infty} \frac{1}{l} \int_{0}^{l} x^2(t, \lambda)\, dt}$$

При этом имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^{\infty} F^2(\lambda)\,d\lambda + \sum_{\nu} \left[\int_0^{\infty} f(t)\,u(t, \Lambda_{\nu})\,dt \right]^2 = \int_0^{\infty} f^2(t)\,dt,$$

где Λ_{ν} те значения параметра λ ($\Lambda_{\nu} \leqslant 0$), при которых решение дифференциального уравнения (A), удовлетворяющее начальному условию (B) обладает суммируемым квадратом в интервале $0 \leqslant t < \infty$, $u(t, \Lambda_{\nu})$ — соответствующие нормированные собственные функции сингулярной краевой задачи.

С помощью установленого нами равенства Парсеваля доказывается соответствующая теорема разложения.

Теорема 2. Если коэффициент дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + [\lambda - q(t)]\,x = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{A}$$

$q(t)$ имеет ограниченную вариацию в интервале $0 \leqslant t < \infty$, причем $q(\infty) = 0$, а функция $f(t)$ суммируема с квадратом в этом интервале, то почти для всех t (за исключением множества меры нуль) имеет место равенство

$$f(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_0^{\infty} F(\lambda) \int_0^{t} w(t, \lambda)\,dt\,d\lambda + \sum_{\nu} \int_0^{\infty} f(t)\,u(t\Lambda_{\nu})\,dt \int_0^{t} u(t, \Lambda_{\nu})\,dt \right].$$

где

$$F(\lambda) = \underset{L \to \infty}{\mathrm{l.\,i.\,m}} \int_0^{L} f(t)\,w(t, \lambda)\,dt,$$

а $w(t, \lambda)$ и $u(t, \Lambda_{\nu})$ — решения дифференциального уравнения (A), указанные в теореме 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Weyl а) Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen, Cöttinger Nachrichten (1909).

б) Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehorigen Entwiklungen willkurlicher Funktionen, Math. Annalen, 68 (1910).

в) Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen, Cöttingen Nachricten (1910).

2. E. C. Titchmarsh а) On expansions in eigeufunctions, Journ. Lond. Math. Soc., 14 (1939), Quart J. of Math. (Oxforq) 11 (1940), 12 (19.1), 16 (1945).

б) Eigenfunctions expansions associated with second-order differential equations, Oxford (1946).

3. Б. М. Левитан а) Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, ГТТИ, 1950.

б) К теории разложения по собственным функциям диффепенциальных уравнений второго порядка, ДАН СССР 71 (1950).

в) Доказательство теоремы разложения по собственным функциям самосопряженных дифференциальных уравнений ДАН СССР 73 (1950).

4. И. М. Рапопорт. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений ИАН УССР (1954).

5. N. Levinson a) The asymptotic behavior of system lineare differential equations, Amer. J Math. 68 (1946).

б) The asymptotic nature of solutions of lineare systems of differential equations, Duke Math J. 15 (1948).

БФ 11666. 19.VII 1956 г. Тип. КГПИ, Франко, 44. Зак. 682—100