Звичайно, розробка такого засобу організації навчання, як онлайн-курс, вимагає чималих часових ресурсів, надлишком яких не може похизуватися сучасний педагог. Проте перспективи реалізації подібних ініціатив цілком виправдовують затрачені на їхню організацію зусилля.

Використана література:

1. Закон України "Про вищу освіту" від 01.07.2014 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/1556-18 .
2. Система управління електронними курсами. Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.dn.npu.edu.ua/
3. *Требенко Д. Я.* Формування внутрішнього стимулу і готовності до самоконтролю при вивченні вищої алгебри / Д. Я. Требенко, О. О. Требенко // Наукові записки НДУ ім. М. Гоголя. Психолого-педагогічні науки. – 2012. – № 1. – С. 177-181.
4. *Антошків М.* С. Відкритий онлайн-курс як ефективний засіб організації самостійної роботи студентів в навчанні вищої алгебри / М. С. Антошків, О. О. Требенко // Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 3. Фізика і математика у вищій і середній школі. Випуск 15. – Київ, 2015. ISSN: 2410-7816. – С. 3-14.

Abstract

Possibilities of using open online courses for the organization of students' independent work in teaching Higher Algebra are demonstrated in the paper. The first conclusions of the pilot experiment and the analysis of questionnaire survey conducted among the students were made.

Keywords: *open online course, students' independent work, the study of algebra.*

УДК 504.064.45

Біленко В. І., Божонок К. В., Пасенко А. В., Стеля О. Б.

ІНТЕГРО-ПОЛІНОМІАЛЬНИЙ АЛГОРИТМ МОДЕЛЮВАННЯ І ПРОГНОЗУВАННЯ ЕКОЛОГІЧНОГО СТАНУ ҐРУНТОВИХ ВОД

Розроблено та обґрунтовано інтегро-поліноміальний алгоритм аналізу, моделювання та прогнозу динамічних процесів у неоднорідних середовищах при складних гідрогеологічних умовах. Математичними моделями таких процесів є нелінійні параболічні рівняння з розривними коефіцієнтами.

Ключові слова*: математичні моделі, неоднорідне середовище, гідрогеологічні умови, найкращі наближення.*

Актуальність роботи обумовлена зростаючими вимогами при вирішенні прикладних задач до трьох основних характеристик обчислювальних алгоритмів: точності, швидкодії і інформаційної складності [1-4]. При розв'язувані подібних задач, як правило, використовуються різницеві методи, методи скінчених елементів, сплайн-функції, інтегро-інтерполяційні методи, які мають основний недолік – властивість насичуваності, наслідком якого може бути "вибух" похибок. **Метою** роботи було розробити оптимальний без насичення точності алгоритм для моделювання, аналізу і прогнозу екологічного стану неоднорідного гідрогеологічного середовища.

Математичні моделі. Базовою моделлю для досліджень є модель нестаціонарної дифузії рідини в області $(x,t) \in Q_T$ у вигляді початково-крайових задач для двомірних рівнянь параболічного типу

$$\frac{\partial \theta(x,t,u)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x,u)\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x,u)\frac{\partial \theta}{\partial x_2}\right) + f(x,u,t), \tag{1}$$

де x_i , $i=1,2$ – вертикальна та горизонтальна координати, $x=(x_1,x_2)$; t – час; $u(x,t)$ – гідравлічний напір; $f(x,u,t)$ – розподілене або зосереджене джерело чи стік в області; $\theta(x,t,u)$ – об'ємна вологість ґрунту; $k_1(x,u)$, $k_2(x,u)$ коефіцієнти вологопровідності у напрямі координатних осей.

За певних припущень стосовно структурних властивостей гідрофізичних параметрів процесу, можна вважати, що коефіцієнти задачі (1) апроксимовані кусково-поліноміальними функціями відповідного числа змінних.

Загальний алгоритм. Запропонований алгоритм узагальнює алгоритми, що були побудовані у попередніх роботах авторів [5-7] полягає в реалізації наступної схеми:

1. Задачу (1) запишемо в еквівалентній інтегро-функціональній формі (рівняння балансу) для одновимірного випадку [1-2]:

$$L(u)=F(x,t,u), \tag{2}$$

де $L(u)$ – алгебраїчно-нелінійний інтегральний оператор, $F(x,t,u)$ – алгебраїчна функція, що одержується в результаті еквівалентного переходу.

2. Наближений розв'язок інтегро-функціонального рівняння (2) шукаємо у вигляді поліномів

$$u_{mn}(x,t)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}c_{ij}\omega_i(t)\cdot\omega_j(x), \tag{3}$$

де $\{\omega_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ – класичні ортогональні многочлени (Лежандра, Чебишева-Ерміта,Чебишева-Лагерра та загальні многочлени Якобі).

3. Інтегро-функціональне рівняння (2) замінюємо операторним рівнянням

$$L(u_{mn}(x,t))=F(x,t,u_{mn}(x,t))+\varepsilon_{mn}(x,t) \tag{4}$$

відносно поліноміального розв'язку (3) та з невідомою нев'язкою

$$\varepsilon_{mn}(x,t)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\delta_{ij}\tau_{ij}\omega_i(x)\omega_j(t), \tag{5}$$

де $\delta_{00}=\frac{1}{4}$, $\delta_{0j}=\delta_{i0}=\frac{1}{2}$, якщо $i\geq 1$ і $j\geq 1$, та $\delta_{ij}=1$, якщо $ij>0$.

4. Після виконання операцій множення та інтегрування в (4), прирівнюємо коефіцієнти при однакових членах $x^i t^j$ і, в отриманій, таким чином, системі нелінійних алгебраїчних рівнянь, визначаємо усі невідомі коефіцієнти c_{ij} і τ_{ij} ($i=\overline{0,m}$, $j=\overline{0,n}$).

Оцінку похибки алгоритму дослідимо для випадку, коли функцій ω_i та ω_j у формулах (3), (5) – це многочлени Чебишева першого роду $T_k(\cdot)=\cos(k\,arc\cos(\cdot))$, $k=0,1,2,\dots$, зміщені, відповідно, на сегменти $[0,H]$ і $[0,\Theta]$: $T_i\left(2\frac{x}{H}-1\right)$ та $T_j\left(2\frac{t}{\Theta}-1\right)$.

Через $C[\pi]$ та $L_g^2[\pi]$ будемо позначати, відповідно, простори неперервних та сумовних з квадратом при чебишевській вазі

$$g(h,\theta):=1/\sqrt{1-\left(\frac{2x}{h}-1\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{2t}{\theta}-1\right)^2} \tag{6}$$

на прямокутнику $\pi=[0,h]\times[0,\eta]$ функцій з загальновідомими нормами $\|\cdot\|_{L_g^2[\pi]}$, $\|\cdot\|_{C[\pi]}$. На основі результатів [1-3] доведено наступну теорему:

Теорема. Нехай при деяких $h \in (0, H]$, $\eta \in (0, \Theta]$ і деяких $m, n = 1, 2, 3, \dots$ в кулі $\sigma(\rho) := \left\{ \psi \in C[\pi] : \|\psi\|_{C[\pi]} \le \rho \right\}$ існує єдиний розв'язок $u(x,t)$ задачі (1) і єдиний розв'язок (3) операторного рівняння (4) на π. Тоді при вказаних m і n на π справедлива оцінка:

$$\overline{\lim_{m,n \to \infty}} \frac{\left\| u(x,y) - u_{mn}(x,y) \right\|_X}{E_{m,n}^{h\eta}(u)_X} = 1,$$

де $X = C[\pi]$ або $X = L_g^2[\pi]$ з вагою (6), $E_{m,n}^{h\eta}(u)_X$ – найкраще наближення функції $u(x,t)$ алгебраїчними поліномами двох змінних степені, не вище ніж m і n, відповідно.

Результати обчислювальних експериментів. Проведено обчислювальні експерименти для тестових задач з робіт [1-3], які підтвердили високу ефективність запропонованого алгоритму.

Моделювання реальних задач. ([3], [5], [6], [8-9]) У роботі проведений аналіз руху забруднюючих речовин у геофільтраційному середовищі на прикладі території Полтавського ГЗКа.

Використана література:

1. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / В. К. Дзядык. – Киев : Наукова думка, 1988.
2. *Біленко В. І.* Кусково-поліноміальні наближення розв'язків жорстких задач на основі апроксимаційного методу В. К. Дзядика / В. І. Біленко, А. І. Дерієнко, Н. Г. Кирилаха // Журн. обчисл. та приклад. математики. – № 2. – 2013. – С. 68-77.
3. *Дейнека В. С.* Модели и методы решения задач в неоднородных середах / В. С. Дейнека, І. В. Сергієнко. – Київ : Наукова думка, 2001.
4. *Бабенко К. И.* О явлении насыщения в численном анализе / К. И. Бабенко // Докл. АН СССР. – 1978. – № 241 (3). – С. 505-508.
5. *Стеля О. Б.* Моделирующий комплекс для расчета потока грунтовых вод в сложных гидрогеологических условиях / О. Б. Стеля // Математическое моделирование. – 2011. – № 23 (4). – С. 120-130.
6. *Біленко В. І.* Інформаційно-математичне моделювання та прогнозування екологічного стану грунтових вод. / В. І. Біленко, В. В. Воробйов, А. В. Пасенко [та ін.] // Техногенно-екологічна безпека та цивільний захист. – 2015. – № 8. – С. 49-54.
7. *Биленко В. И.* О погрешности а-метода решения интегральных уравнений Вольтерра с полиномиальными нелинейностями / В. И. Биленко // Украинский математический журнал. – 1989. – № 41 (4). – С. 537-543.
8. *Пасенко А. В.* Расчет времени термического обезвоживания шламовой пульпы / А. В. Пасенко, А. Н. Коробочка, А. И. Базык // Математичне моделювання. – 2009. – № 1 (20). – С. 36–39.
9. *Bozhonok E. V.* Some Existence Conditions for the Compact Extrema of Variational Functionals of Several Variables in Sobolev Space W_2^1. Operator Theory: Advances and Applications, 190. / E. V. Bozhonok. – 2009. – P. 141-155.

Abstract

Integro-polynomial algorithm for analysis and modeling of dynamical processes in heterogeneous mediums with complex geological conditions is developed and proved. Non-linear parabolic equations with discontinuous coefficients are mathematical models of these processes.

Keywords: *mathematical model, heterogeneous medium, hydrogeological conditions, the best approximation.*