Парчук М.І.
Національний педагогічний університет
імені М.П. Драгоманова

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ В КУРСІ «ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА» ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ «ФІЗИКА» ПЕДАГОГІЧНИХ УНІВЕРСИТЕТІВ

Запропоновано методичні рекомендації щодо навчання змістового модуля «Елементи випадкових процесів» курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика» студентів спеціальності «Фізика» педагогічних університетів.

Ключові слова: *теорія ймовірностей, теорія випадкових процесів, напрям підготовки «Фізика», педагогічний університет.*

Вступ. Враховуючи вимоги до освітньо-кваліфікаційних рівнів вищої освіти, сформульовані в системі стандартів вищої освіти [8], підготовку фахівців напряму підготовки «Фізика» в педагогічних університетах необхідно розглядати як цілісну структуру циклів професійної і практичної, загальнонаукової (фундаментальної) та математичної підготовки. При цьому фундаментальна підготовка фахівця-фізика включає такі нормативні математичні дисципліни: аналітична геометрія та лінійна алгебра, математичний аналіз, диференціальні рівняння, векторний і тензорний аналіз, теорія ймовірностей та математична статистика.

Однією з дисциплін, що створює методологічну базу для подальшого вивчення предметів циклу професійної і практичної підготовки фахівця-фізика є «Теорія ймовірностей та математична статистика». Її методи і моделі є ефективними й адекватними для опису та дослідження багатьох реальних фізичних процесів і явищ, які розглядаються в курсах статистичної фізики, квантової фізики, ядерної фізики тощо.

Одним із змістових модулів курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика» для студентів спеціальності «Фізика» педагогічних університетів є «Теорія випадкових процесів». На сьогодні існує ряд підручників та навчальних посібників, які можуть використовуватися в процесі навчання теорії випадкових процесів [11,4]. В основному ця література розрахована на студентів фізико-математичних спеціальностей класичних університетів, в яких на вивчення даного розділу відводиться більше часу. У навчальних планах таких університетів, як правило, теорія випадкових процесів представлена як окрема навчальна дисципліна. Наприклад, на вивчення курсу «Теорія випадкових процесів» для студентів напряму підготовки «Прикладна фізика» (спеціальність «Радіофізика і електроніка») в Київському національному університеті імені Т.Г.Шевченка відводиться 72 год. (2 кредити ECTS).

У педагогічних університетах, як правило, не вивчають окремо навчальну дисципліну «Теорія випадкових процесів», її елементи включають в курс «Теорія ймовірностей та математична статистика». При цьому в навчальних програмах такого курсу для студентів напряму підготовки «Фізика» на вивчення змістового модуля «Елементи теорії випадкових процесів» відводиться незначна кількість часу (іноді його виносять на самостійне опрацювання або взагалі «забувають» включити в програму). Часто причинами цього є недостатня кількість годин на вивчення всього курсу та невиправдана думка деяких викладачів про те, що випадкові процеси не досить широко застосовуються при розв'язанні фізичних задач. Хоча остання причина є абсолютно помилковою. Випадкові процеси є математичними моделями багатьох фізичних процесів і явищ. Більше того, деякі з них ґрунтовно досліджувались саме тому, що були адекватними моделями важливих фізичних процесів (наприклад, вінерівський процес).

Таким чином, на сьогодні існує проблема якісного методичного забезпечення навчання теорії ймовірностей та математичної статистики студентів напряму підготовки «Фізика» педагогічних університетів, оскільки кількість підручників та посібників, які відповідають навчальним планам підготовки фахівців, освітньо-кваліфікаційним характеристикам та освітньо-професійним програмам, є недостатньою.

Серед підручників та посібників, які можна було б рекомендувати до використання в навчальному процесі, велика кількість тих, які не перевидавалися останнім часом, і тому є малодоступними для студентів [2,5,6,10], а ряд сучасних підручників та посібників розраховані, в першу чергу, на студентів економічних спеціальностей, містять мало задач фізичного та технічного змісту і часто взагалі не розглядають елементи теорії випадкових процесів [1,12,14]. Тому проблема розробки ефективної методики та відповідного методичного забезпечення навчання теорії ймовірностей та математичної статистики студентами напряму підготовки «Фізика» педагогічних ВНЗ є актуальною.

Мета та завдання статті:

- запропонувати методичні рекомендації щодо навчання змістового модуля «Елементи випадкових процесів» курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика» студентів напряму підготовки «Фізика» педагогічних університетів;
- проаналізувати різні підходи до відбору та структуризації змісту навчального матеріалу;
- запропонувати систему задач фізичного змісту, які доцільно використовувати в процесі навчання теми «Марківські процеси та ланцюги Маркова».

Виклад основного матеріалу. Розглянемо мету, завдання, вимоги до знань та вмінь, а також зміст навчального матеріалу змістового модуля «Елементи випадкових процесів».

Мета вивчення змістового модуля – ознайомлення з деякими основними математичними поняттями, теоретичними положеннями і методами сучасної теорії випадкових процесів; формування вмінь застосовувати теоретичні знання до розв'язування задач, зокрема задач фізичного змісту.

На нашу думку, при вивченні даного змістового модуля до тематичного плану мають входити такі підмодулі:

1. Вступ до теорії випадкових процесів. Основні поняття. Приклади.
2. Процеси, стаціонарні у широкому та вузькому смислі. Ергодична теорія.
3. Ланцюги Маркова з дискретним та неперервним часом. Марківські процеси.

На нашу думку, послідовність викладу теоретичного матеріалу змістового модуля «Елементи теорії випадкових процесів» можна побудувати двома способами. Представимо логічно-структурну схему вивчення для двох способів.

I спосіб

№ п/п	Тема	Основні знання	Основні вміння
1	Випадкові процеси. Основні поняття. Пуассонівський процес. Вінерівський процес. (2 год лекцій + 2 години практичного заняття)	Означення випадкового процесу. Траєкторія випадкового процесу. Означення процесу з незалежними приростами, пуассонівського процесу. Означення вінерівського процесу. Основні теореми.	Вміння знаходити траєкторію випадкового процесу, використовувати властивості розподілів випадкових величин до знаходження числових характеристик випадкових процесів та відповідних розподілів ймовірностей.
2	Марківські процеси. Ланцюги Маркова. (2 год лекцій + 1 год практичного заняття)	Означення дискретного марківського процесу та означення ланцюга Маркова (як його частинного випадку). Умова однорідності, регулярності та стаціонарності. Стани ланцюга. Скінченність, незвідність, періодичність ланцюга Маркова. Граничні ймовірності для ланцюга Маркова. Матриця ймовірностей переходу груп станів.	Вміння представляти ланцюг Маркова у вигляді графа, вміння знаходити ймовірність того, що система перебуватиме в к-му стані, вміння знаходити граничні ймовірності та умови стаціонарності.
3	Процеси випадкових блукань, загибелі та розмноження. (2 год лекцій + 1 год практичного заняття)	Означення процесу розгалуження. Докритичні, критичні і надкритичні процеси. Процес виродження. Процес чистого розмноження.	Вміння знаходити числові характеристики, ймовірності переходу з одного стану в інший; вміння знаходити граничний розподіл ймовірностей.

II спосіб

№ п/п	Тема	Основні знання	Основні вміння
1	Ланцюги Маркова та їх застосування. (2 год. лекцій + 2 год. практичного заняття)	Означення ланцюга Маркова. Умова однорідності, регулярності та стаціонарності. Стани ланцюга. Скінченність, незвідність, періодичність ланцюга Маркова. Граничні ймовірності для ланцюга Маркова. Матриця	Вміння представляти ланцюг Маркова у вигляді графа, вміння знаходити ймовірність того, що система перебуватиме в к-му стані, вміння знаходити граничні ймовірності та умови стаціонарності.

		ймовірностей переходу груп станів. Означення дискретного марківського процесу.	
2	Поняття випадкового процесу. Приклади випадкових процесів: пуассонівський, вінерівський, процеси випадкових блукань, загибелі та розмноження. (2 год. лекцій + 2 год. практичного заняття)	Означення випадкового процесу. Траєкторія випадкового процесу. Означення процесу з незалежними приростами, пуассонівського процесу. Означення вінерівського процесу. Означення процесу розгалуження. Процес виродження. Процес чистого розмноження. Основні теореми.	Вміння знаходити траєкторію випадкового процесу, використовувати властивості розподілів випадкових величин до знаходження числових характеристик випадкових процесів та відповідних розподілів ймовірностей. Вміння знаходити числові характеристики ймовірності переходу з одного стану в інший; вміння знаходити граничний розподіл ймовірностей.

Різниця між запропонованими способами викладу матеріалу полягає у тому, що в першому випадку матеріал подається абстрактно-дедуктивним методом, а у другому – конкретно-індуктивним (від простого до складного), а це, у свою чергу, призводить до різної кількості використаних годин. На вивчення підмодуля першим способом відводиться три лекційних та два практичних заняття. Під час викладання теорії випадкових процесів другим способом необхідно дві лекції та два практичних заняття. Оскільки матеріал подається різними способами, то під час навчальних занять використовуються і різні методи та форми його подання: викладач має можливість одразу ілюструвати теоретичні дані на прикладах, розв'язувати задачі і т.д. Оскільки на вивчення всієї теорії ймовірностей та математичної статистики для фізиків відводиться лише один семестр, то даний спосіб є досить вдалим.

Представимо фрагмент лекції на тему «Ланцюги Маркова та їх застосування» за умови, що підмодуль вивчається другим способом.

Мета: *Ознайомити* студентів із такими *основними поняттями*: ланцюг Маркова, стани ланцюга Маркова; скінченність, незвідність, періодичність ланцюга Маркова; дискретний марківський процес; матриця ймовірностей переходу груп станів.

Сформулювати такі *основні факти*: умови однорідності, регулярності та стаціонарності; граничні ймовірності для ланцюга Маркова.

Сформувати вміння представляти ланцюг Маркова у вигляді графа; знаходити ймовірність того, що система перебуватиме в к-му стані; знаходити граничні ймовірності та умови стаціонарності.

План

І. Актуалізація опорних знань (*проводить викладач у вигляді фронтальної бесіди; студенти дають відповіді на питання*).

1. Що таке випадкова величина?
2. Що називають послідовністю випадкових величин?

3. Які випадкові величини називають незалежними? Назвіть умови незалежності випадкових величин.

4. Чи правильне твердження: якщо ξ і η - незалежні випадкові величини, то ξ і η - некорельовані. А навпаки?

ІІ. Виклад основного матеріалу.

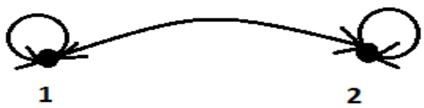
Викладач пропонує аудиторії приклад, тим самим створюючи проблемну ситуацію. Студенти розв'язують, дискутують.

Нехай задано систему, яка може перебувати в двох станах: 1 і 2. У початковий момент часу ймовірність будь-якого стану визначається за формулами: $\mathrm{P}\{\xi_0 = 1\} = q_1$, $\mathrm{P}\{\xi_0 = 2\} = q_2$. $q_1 + q_2 = 1$.

Відомі ймовірності переходу в кожен стан в наступний момент часу, при чому вони не залежать від номера кроку, тобто:

$$\mathrm{P}\{\xi_{к+1} = 1 | \xi_к = 1\} = 0{,}4$$
$$\mathrm{P}\{\xi_{к+1} = 1 | \xi_к = 2\} = 0{,}6$$
$$\mathrm{P}\{\xi_{к+1} = 2 | \xi_к = 1\} = 0{,}5$$
$$\mathrm{P}\{\xi_{к+1} = 2 | \xi_к = 2\} = 0{,}5$$

Імовірності переходу із стану 1 в стан 2 зручно представляти у вигляді незв'язного орієнтованого графа, оскільки з нього легко побачити, які переходи можуть відбуватися.



Для будь-якого кроку можна порахувати ймовірність переходу в кожен стан. Наприклад, порахуємо ймовірність того, що на другому кроці система перебуватиме в стані 2. Для цього використаємо формулу добутку ймовірностей.

$$\mathrm{P}\{\xi_t = 2\} = \mathrm{P}\{\xi_1 = 2 | \xi_0 = 2\} \cdot \mathrm{P}\{\xi_1 = 2 | \xi_0 = 1\} = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25.$$

Тільки ми розглянули математичний об'єкт, який називають ланцюгом Маркова.

2.1. Основні поняття.

Дамо означення ланцюга Маркова в термінах випадкових величин.

Послідовність випадкових величин ξ_t, $t = 0, 1, 2, \ldots$, називається *ланцюгом Маркова* зі станами $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$, якщо

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(\xi_t = k) = 1, t = 0, 1, 2, \ldots$$

і при будь-яких $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n < s < t\ (n = 1, 2, \ldots)$, і довільних $i, j \in \mathcal{N}$ і будь-яких підмножинах $B_1, B_2, \ldots, B_n$ множини $\mathcal{N}$ виконується рівність

$$\mathrm{P}\left(\xi_t = j \middle| \xi_{t_1} \in B_1, \ldots, \xi_{t_n} \in B_n, \xi_s = i\right) = \mathrm{P}(\xi_t = j | \xi_s = i). \qquad (1)$$

Значення випадкових величин ξ_t можуть інтерпретуватися як номери станів досліджуваної системи, яка в дискретні моменти часу $t\ (t = 0, 1, 2, \ldots)$ змінює свій стан. Властивість (1) означає, що при фіксованому положенні системи в даний момент часу s майбутня поведінка системи $(t > s)$ не залежить від поведінки системи в минулому

$(\xi_{t_1} \in B_1, \dots, \xi_{t_n} \in B_n)$, або коротше: при фіксованому теперішньому майбутнє не залежить від минулого. Властивість (1) називають *властивістю марковості*.

Ланцюг Маркова ξ_t називатимемо *однорідним*, якщо при довільних $i, j \in \mathcal{N}$ ймовірності

$$\mathrm{P}(\xi_{t+1} = j | \xi_t = i\ ) = p_{ij}, t = 0, 1, 2, \dots, \qquad (2)$$

не залежать від t. Матрицю , елементами якої є ймовірності (2), називають *матрицею ймовірностей переходу*, а вектор

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_N), \qquad (3)$$

де $q_i = \mathrm{P}(\xi_0 = i\ ), i = 1, 2, \dots, N,$ - *вектором початкових ймовірностей.* Очевидно, що числа p_{ij} та q_i задовольняють умови

$$p_{ij} \geq 0, q_i \geq 0, \sum_{j=1}^{N} q_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1. \qquad (4)$$

Будь-які матриці, елементи яких задовольняють умову (4), називають *стохастичними.*

Стан i ланцюга Маркова називається *несуттєвим*, якщо існують стан j та число t_0 такі, що $P_{ij}(t_0) > 0$, і $P_{ji}(t\ \ ) = 0$ при довільному t. У протилежному випадку стан називається *суттєвим.*

Зауваження! Ми переконалися в тому, що можна знаходити ймовірності кожного стану на будь-якому кроці. Цей факт можна сформулювати у вигляді теореми.

2.2. Основні факти.

Теорема. Матриця ймовірностей переходу (4) і вектор початкових ймовірностей однозначно визначають спільні розподіли величин $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_t$ при довільних t.

↓ За формулою ймовірності добутку подій отримаємо

$$\mathrm{P}(\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \dots, \xi_{t-1} = i_{t-1}, \xi_t = i_t) = \mathrm{P}(\xi_0 = i_0)\mathrm{P}(\xi_1 = i_1 | \xi_0 = i_0)$$
$$\mathrm{P}(\xi_2 = i_2 | \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1\ ) \dots \mathrm{P}(\xi_t = i_t | \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_{t-1} = i_{t-1}). \qquad (5)$$

Скористаємось наступним частинним випадком рівності (1):

$$\mathrm{P}(\xi_s = i_s | \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_{s-1} = i_{s-1}) \mathrm{P}(\xi_s = i_s | \xi_{s-1} = i_{s-1}), s = 1, 2, \dots . \ (6)$$
$$i_k \in \mathcal{N}\ (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Відповідно (2) для однорідних ланцюгів Маркова права частина (6) дорівнює p_{i_{s-1}, i_s}. Замінивши цими величинами і величинами (3) відповідні множники в правій частині (5), отримаємо спільний розподіл величин $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_t$:

$$\mathrm{P}(\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \dots, \xi_{t-1} = i_{t-1}, \xi_t = i_t) = q_{i_0} p_{i_0 i_1}, p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{t-1}, i_t}. \qquad (7)\ \uparrow$$

Зауваження 1. Очевидно, що рівність (6) – частковий випадок співвідношення (1). З іншої сторони, як відмічалось раніше, із (6) випливає (7), а із (7) випливає умова марковості (1). Таким чином, має місце *твердження*: рівність (6) рівносильна умові марковості (1).

Зауваження 2. Для однорідного ланцюга Маркова ξ_t при довільному s виконується рівність

$$\mathrm{P}(\xi_{t+s} = j | \xi_s = i) = \mathrm{P}(\xi_t = j | \xi_0 = i), \ i, j \in \mathcal{N}. \qquad (8)$$

Це співвідношення доводиться прямим обчисленням умовних ймовірностей за допомогою такої формули $p(\omega) = q_{i_0} p_{i_0 i_1}, p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{T-1}, i_T}$. Оскільки ймовірність (8) не залежить від s, то можемо покласти

$$\mathrm{P}(\xi_{t+s} = j|\xi_s = i) = P_{ij}(t). \qquad (9)$$

Функції $P_{ij}(t),\ i,j \in \mathcal{N}$,називають *імовірностями переходу* із стану i в стан j за час t.

Крім ймовірностей «суцільних» ланцюгів (7), часто доводиться обчислювати ймовірності ланцюгів виду

$$\xi_{t_1} = l_1, \xi_{t_2} = l_2, \dots, \xi_{t_s} = l_s, \qquad (10)$$

де моменти часу $t_1, \dots, t_s$ уже не обов'язково є сусідніми. Ймовірність події (10) можна виразити через ймовірності переходу $P_{ij}(t)$. За формулою повної ймовірності

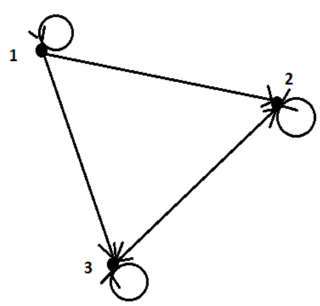
$$\mathrm{P}(\xi_{t_1} = l_1, \xi_{t_2} = l_2, \dots, \xi_{t_s} = l_s) = \sum_{k=1}^{N} P(\xi_0 = k) P(\xi_{t_1} = l_1, \dots, \xi_{t_s} = l_s | \xi_0 = k). \quad (11)$$

Перетворивши другий співмножник під знаком суми за формулою ймовірності добутку подій і використовуючи умову марковості (1) і умови однорідності (8), (9), отримаємо:

$$\mathrm{P}(\xi_{t_1} = l_1, \xi_{t_2} = l_2, \dots, \xi_{t_s} = l_s) = \sum_{k=1}^{N} q_k P_{kl_1}(t_1) P_{l_1 l_2}(t_2 - t_1) \dots P_{l_{s-1} l_s}(t_s - t_{s-1}). \quad (12)$$

Для обчислень за формулою (12) необхідно вміти знаходити $P_{ij}(t)$.

Задача 1 [13, с. 164]. Нехай



$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, q_1 = 1,\ q_2 = q_3 = 0.$$

Імовірності переходу із стану 1 в стан 2 чи 3 зручно представляти у вигляді незв'язного орієнтованого графа. Як видно з графа із 2-го і 3-го в 1-й стан переходи не відбуваються, то

$$\mathrm{P}(\xi_t = 1) = \mathrm{P}(\xi_0 = 1|\xi_1 = 1, \dots, \xi_t = 1)$$
$$= \mathrm{P}(\xi_0 = 1)\mathrm{P}(\xi_1 = 1|\xi_0 = 1) \dots \mathrm{P}(\xi_t = 1|\xi_{t-1} = 1) = 3^{-t}.$$

Подію *A,* яка полягає в тому, що ланцюг завжди буде знаходитись в 1-му стані, можна представити у вигляді $A = \bigcap_{t=1}^{\infty}\{\xi_t = 1\}$, де $\{\xi_t = 1\}$ – монотонно спадна послідовність подій. Звідси за формулою ймовірності попарно незалежних подій матимемо: $P(A) = \prod_{t=1}^{\infty} P\{\xi_t = 1\} = 0.$ Тобто стан 1 є несуттєвим, а стан 2 і 3 – суттєвими. Тобто система, яка описується ланцюгом Маркова, може зникати із несуттєвого стану з ймовірністю.

Теорема [10, с. 161-167]. Для довільних s, t

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=1}^{N} P_{ik}(s) P_{kj}(t), i,j = 1, 2, \dots, N. \qquad (13)$$

↓ Обчислимо ймовірність $\mathrm{P}(\xi_{t+s} = j|\xi_0 = i)$ за формулою повної ймовірності, поклавши $B_k = (\xi_k = k)$:

$$\mathrm{P}(\xi_{t+s} = j|\xi_0 = i) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(\xi_s = k|\xi_0 = i)\ \mathrm{P}(\xi_{t+s} = j|\xi_s = k). \qquad (14)$$

Із рівностей (1) та (8) випливає

$$\mathrm{P}(\xi_{t+s} = j|\xi_0 = i, \xi_s = k) = \mathrm{P}(\xi_{t+s} = j|\ \xi_s = k) = \mathrm{P}(\xi_t = j|\xi_0 = k).$$

Звідси із рівності (14) і того, що

$$\mathrm{P}(\xi_{t+1} = j|\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_{t-1} = i_{t-1}, \xi_t = i) = \mathrm{P}(\xi_{t+1} = j|\xi_t = i),\ i,j = 1,2,$$

випливає твердження теореми. ↑

Визначимо матрицю $P\ (t) = \left\|P_{ij}(t)\right\|$. В матричному записі (13) має вигляд

$$P(t+s) = P(s)P(t). \tag{15}$$

Оскільки $P_{ij}(1) = p_{ij}$,то $P(1) = P$, де P - матриця ймовірностей переходу. Із (15) випливає

$$P(t) = \left(P(1)\right)^t = P^t. \tag{16}$$

Результати, отримані в теорії матриць, дозволяють за формулою (16) обчислювати $P_{ij}(t)$ і досліджувати їх поведінку при $t \to \infty$.

Задача 2 [10, с. 337]. При обговоренні основних положень кінетичної теорії матерії Еренфестом була запропонована наступна модель: m молекул, розподілених в двох резервуарах, випадково по одній переміщаються із свого резервуару в інший. Знайти середні граничні ймовірності числа молекул в першому резервуарі.

Система може перебувати в m різних станах. Позначимо Q_i - стан системи, при якому в першому резервуарі - i молекул $(i = 0, 1, \dots, m)$. В залежності від початкового розподілу молекул система за один крок може переходити в два стани з Q_i в Q_{i+1} *або* Q_{i-1}. При цьому ймовірності переходу визначаються так:

$P_{i,i+1} = \frac{m-i}{m}; P_{i,i-1} = \frac{i}{m}, i = \overline{0,m}.$

Імовірність переходу представимо у вигляді матриці

$$\mathcal{P} = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 1-\frac{1}{m} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{m} & 0 & 1-\frac{2}{m} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Ця матриця може розглядатися як матриця переходу ймовірностей для ланцюга Маркова. З будь-якого стану Q_i повернення в Q_i можливе лише за кількість кроків, яка кратна двом. Тому, в цьому випадку, ланцюг Маркова періодичний з періодом $x = 2$, оскільки кожен стан досягається завдяки будь-якому іншому стану.

Рядок $\hat{p}$ середніх граничних ймовірностей визначається з умови

$\hat{p}\mathcal{P} = \hat{p}$, тобто $\frac{1}{m}\hat{p}_1 = \hat{p}_0, \quad \left(1 - \frac{k-1}{m}\right)\hat{p}_{k-1} + \frac{k+1}{m}\hat{p}_{k+1} = \hat{p}_k, \hat{p}_m = \frac{1}{m}\hat{p}_{m-1} \quad (k = 1, 2, \dots, m-1).$

Звідси знаходимо $\hat{p}_k = \hat{p}_0 C_m^k$. Використовуючи рівність $\sum_{k=0}^{m} \hat{p}_k = 1$, отримуємо $\frac{1}{\hat{p}_0} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k = 2^m$, тому шукані ймовірності $\hat{p}_k = \frac{1}{2^m} C_m^k \quad (k = 0, 1, \dots, m)$.

Задача 3 [13, с. 163]**.** Нехай по цілих точках відрізка $[0, n]$ блукає частинка. Позначимо ξ_t її координату в момент часу $t\ (t = 0, 1, 2, \dots)$. Рухом частинки керує нескінченна послідовність незалежних випробувань з двома результатами 1 та -1. Покладемо

$$\xi_{t+1} = \begin{cases} \xi_t + 1, & \text{якщо в } t-\text{му випробуванні з'явилась } 1 \text{ і } \ \xi_t < n, \\ \xi_t - 1, & \text{якщо в } t-\text{му випробуванні з'явилась } -1 \text{ і } \ \xi_t > 0. \end{cases}$$

Якщо $\xi_t = 0$ або $\xi_t = n$ при деякому t, то частинка завжди залишається в цих точках. Припустимо, що $\xi_0 = k$. Позначимо p і q як ймовірності результатів 1 та -1 відповідно. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що частинка коли-небудь потрапить в точку n. Нас цікавить ймовірність $\pi_{nk} = P(A)$.

Покладемо $\pi_{nk}(t) = P(\xi_t \quad = n)$. Для досліджуваного блукання достатньо очевидно, що умовна ймовірність події $\{\xi_{t+1} \quad = n\}$ за умови, що першим переходом частинки був перехід із k в $k+1$, дорівнює безумовній ймовірності події $\{\xi_t \quad = n\}$ в схемі блукання, яка починається із точки $k+1$, тобто

$$P(\xi_{t+1} \quad = n|\xi_1 \quad = k+1) = \pi_{k+1,n}(t)\,, \qquad (*)$$

аналогічно,

$$P(\xi_{t+1} \quad = n|\xi_1 \quad = k-1) = \pi_{k-1,n}(t). \qquad (**)$$

Блукання цієї частинки є ланцюгом Маркова , в якому $q_l = 0\ (l \neq k), q_k = 1;$ $p_{n,l} = 0\ (l = 0,1,\dots,n-1);$ $p_{0,l} = 0\ (l = 1,\dots,n);$ $p_{0,0} = p_{n,n} = 1;$ $p_{l,l+1} = p$ і $p_{l,l-1} = 1-p\ \ (l = 1,\dots,n-1)$. Рівності (*) і (**) є результатом однорідності ланцюга Маркова. А суттєвими станами є *0* та n, решта станів є несуттєвими.

Отже, підсумовуючи все вище сказане, ми прийшли до таких **висновків:**

1. Змістовий модуль «Елементи теорії випадкових процесів» є необхідною складовою курсу «Теорій ймовірностей та математична статистика» для студентів фізичних спеціальностей.
2. Під час вивчення даного модуля доцільно розглядати такі теми:
   1) Ланцюги Маркова та їх застосування.
   2) Поняття випадкового процесу. Приклади випадкових процесів: пуассонівський, вінерівський, процеси випадкових блукань, загибелі та розмноження.
   3) При вивченні будь-якої теми доцільно використовувати задачі фізичного змісту, що дозволить підвищити мотивацію навчання, реалізує принцип професійної та прикладної спрямованості навчання, а отже, підвищить ефективність навчального процесу в цілому.

Список використаної літератури

1. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика. 5-те видання. — Київ: Центр учбової літератури, 2010. — 424 с.
2. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. «Теория случайных процессов и ее инженерные приложения» 2-е изд. - М.: Высшая школа, 2000. - 383 с.
3. Гельфанова Д.Д. Організаційно-педагогічні умови формування професійно-математичної компетентності майбутніх інженерів-педагогів/ режим доступу http://vuzlib.com/content/view/179/84
4. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. - М.: Наука, 1977. – 570 с.
5. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. 9-е изд., стер.—М.: Высшая школа, 2004.— 404 с.

6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. 9-е изд., стер.— М.: Высшая школа, 2003.— 479 с.
7. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. - М.: Едиториал УРСС, 8-е изд., испр. и доп., 2005. - 448 с.
8. Закон України «Про вищу освіту»/ режим доступу http://zakon3.rada.gov.ua/laws/show/2984-14
9. Козловська І.М., Козловський Ю. М. Методи експериментального дослідження інтегративних процесів / Козловська І.М., КозловськийЮ.М.// Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми : зб. наук. пр. – Вип. 10./ [редкол. : І.А. Зязюн та ін.]. – К. – Вінниця : ДОВ “Вінниця”, 2006. – 500 с.
10. Свешников А.А.(под ред.) Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных величин. – М.: Наука, изд. II, доп., 1970. – 656 с.
11. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів: Навч. посібник. – К.: Либідь, 1990. – 168 с.
12. Турчин В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. – Днепропетровск: Изд-во ДНУ, 2008. – 656 с.
13. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, Главная редакція фізико-математической литературы, 1982. – 256 с.
14. Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей. Підручник. - 2-ге вид., перероб. і допов. - К.: Вища школа, 1994. - 192 с.: іл.

Парчук М.И. Элементы теории случайных процессов в курсе «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов направления подготовки «Физика» педагогических университетов.

Предложены методические рекомендации по изучению содержательного модуля «Элементы случайных процессов» курса «Теория вероятностей и математическая статистика» студентов специальности «Физика» педагогических университетов.

Ключевые слова: *теория вероятностей, теория случайных процессов, направление подготовки «Физика», педагогический университет.*

Parchuk M. I. Elements of the theory of casual processes in a course “Probability theory and mathematical statistics” for students of the preparation direction “Physicist” in pedagogical universities.

Methodical recommendations about studying of the substantial module «Elements of casual processes» course «Probability theory and the mathematical statistics» students of a speciality of "Physicist" of pedagogical universities are offered.

Keywords: *probability theory, the theory of casual processes, a direction of preparation of "Physicist", pedagogical university.*